Caracterización de la estructura asintótica normal de los espacios de Banach, y su relación con la propiedad del punto fijo

Por E. LLORENS FUSTER

Presentado por el académico numerario P. Alberto Dou

Recibido: 6 de junio de 1984

Abstract

Asymptotic normal structure is a geometric property of Banach spaces (Baillon-Schöneberg (1), 1981 – which is closely related with the fixed pont theory for nonexpansive mappings.

Many equivalent formulations are given here which can be applied to guarantee a fixed point property.

1. INTRODUCCION Y RESULTADOS

Dados un espacio de Banach real $(E, \|\ \|)$ y un subconjunto $X \subset E$, una aplicación $T:X \longrightarrow E$ se denomina *no expansiva* si para cualesquiera elementos $x,y \in X$ $\|T(x)-T(y)\| \leqslant \|x-y\|$. (Es decir, si es lipschitzciana de constante 1).

Se dice que E tiene la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas, (brevemente *propiedad B—G—K*) si cualquiera que sea el conjunto X no vacío, cerrado, acotado y convexo, $X \subset E$, toda aplicación no expansiva $T:X \longrightarrow X$ tiene algún punto fijo.

Desde 1965 se han realizado numerosos intentos de describir qué espacios de Banach tienen la propiedad $B—G—K$.(Cfr. p. ej. el repaso restrospectivo hecho por Kirk en (3)).En concreto datan de ese año resultados en los que se garantiza esta propiedad si se añaden ciertas hipótesis sobre la norma del espacio. Tales pueden ser la convexidad uniforme, la llamada condición de Opial, o bien la estructura normal para el caso de ser E reflexivo.

En años posteriores se introducen y estudian otras condiciones (de naturaleza geométrica, similares a las mencionadas) suficientes para que se de la propiedad del punto fijo para aplicaciones no expansivas. En particular nos referimos aquí a la estructura asintótico normal.

Un espacio de Banach tiene estructura asintótico normal si, para cada subconjunto X no vacío, cerrado, acotado, convexo y conteniendo más de un punto, $X \subset E$, y para cada sucesión (x_n) en X verificando.

(I) $x_n - x_{n+1} \longrightarrow 0$

se cumple que

(II) Existe $x \in X$ tal que $\lim \inf \|x - x_n\| < \operatorname{diam}(X)$.

Esta noción, introducida en 1981 por J. B. Baillon y R. Schöneberg (1), es más general que las otras citadas más arriba, y todo espacio de Banach reflexivo con estructura asintótico normal tiene la propiedad B-G-K. En el mismo trabajo se dan ejemplos de espacios de Banach reflexivos con la propiedad del punto fijo y carentes de estructura asintótico-normal.

La cuestión de si es suficiente la reflexividad del espacio para que se cumpla la propiedad B-G—K parece subsistir abierta.

El principal objetivo de esta nota es dar condiciones equivalentes a la estructura asintótico normal, y concretamente mostrar que la condición (I) puede hacerse más estricta:

Sea (a_n) una sucesión de números reales con $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n = \infty$ y con $a_n \geqslant n$ ($n = 1, 2, \ldots$). (Por comodidad llamaremos "sucesión adecuada" a cualquiera que cumpla estas condiciones). Se tiene:

Teorema

El espacio de Banach real E tiene estructura asintótico normal sí y sólo sí, dada cualquier sucesión adecuada (a_n) para cada subconjunto $X \subset E$, con X cerrado, acotado, convexo y conteniendo más de un punto, y para toda sucesión (x_n) en X que cumpla la condición

$$(I')\ a_n(x_n - x_{n-1}) \longrightarrow 0$$

se verifica (II).

Se verá también (observación) que cualquiera de estas propiedades equivalentes a la estructura asintótico normal puede servir, sin hacer uso del Teorema de Baillon-Schöneberg, para establecer directamente la propiedad B—G—K en el caso de que el espacio E sea reflexivo.

2. PRUEBA DEL TEOREMA

Supongamos que E cumpla alguna de las condiciones del enunciado, para una sucesión adecuada fija (a_n). Si E careciera de estructura asintótico normal, existirían un conjunto X cerrado, acotado, convexo, con diámetro positivo, $X \subset E$, y una sucesión (x_n) en X tal que verifica la condición (I) y además:

$$\|x_n - x\| \longrightarrow \operatorname{diam}(X)$$

para cualquier $x \in X$.

Como $\Sigma\ 1/a_n$ es divergente, podemos seleccionar una sucesión (p_k) de enteros no negativos con $0 = p_0 < p_1 < p_2 < \ldots$ de modo que se tenga:

$$\sum_{j=1+p_k}^{p_{k+1}} 1/a_j \leqslant 1 \qquad \sum_{j=1+p_k}^{1+p_{k+1}} 1/a_j > 1 \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

A partir de aquí formamos en X una sucesión (z_n) del siguiente modo:

$$z_1 = \frac{1}{a_1} x_1 + (1 - \frac{1}{a_1}) x_2$$

. . .

$$z_{p_1} = (\sum_{j=1}^{p_1} 1/a_j) x_1 + (1 - \sum_{j=1}^{p_1} 1/a_j) x_2$$

$$z_{p_1+1} = (1 - \frac{1}{a_{p_1+1}}) x_2 + \frac{1}{a_{p_1+1}} x_3$$

. . .

$$z_{p_2} = (1 - \sum_{j=p_1+1}^{p_2} 1/a_j) x_2 + (\sum_{j=1+p_1}^{p_2} 1/a_j) x_3$$

. . .

Entonces resulta que $z_{n+1} - z_n$ será de forma

$$z_{n+1} - z_n = \begin{cases} \pm \dfrac{1}{a_{n+1}} (x_{s(n)} - x_{s(n)+1}) & (n \neq p_r) \\ \pm \left[\dfrac{1}{a_{n+1}} (x_{s(n)+2} - x_{s(n)+1}) + (1 - \displaystyle\sum_{j=p_{r-1}}^{p_r} 1/a_j)(x_{s(n)+1} - x_{s(n)}) \right] & (n = p_r) \end{cases}$$

donde $s(n)$ es un entero positivo menor o igual que n tomado de modo que z_n es combinación convexa de $x_{s(n)}$ y $x_{s(n)+1}$, con lo cual es claro que $\lim s(n) = +\infty$.

A partir de la expresión de z_{n+1}- $z_n$vista anteriormente, un cálculo directo muestra que para todo $n \in Z^+$:

$$a_{n+1} \|z_{n+1} - z_n\| \leqslant \| x_{s(n)} - x_{s(n)+1} \| + \| x_{s(n)+1} - x_{s(n)+2} \| \quad (*)$$

pues hay que tener en cuenta que, por la propia construcción de la sucesión (p_k) sucede que

$$\frac{1}{a_{p_r+1}} > 1 - \sum_{j=1+p_{r-1}}^{p_r} 1/a_j \geqslant 0$$

En definitiva, dado que (x_n) está en la situación (I), de la desigualdad anterior (*) deducimos que

$$a_{n+1}\ (z_{n+1} - z_n) \quad \to 0$$

o, en otros términos, que la sucesión (z_n) cumple la restricción (I′), y entonces, según se ha supuesto al comenzar la demostración, también verificará (II).

Sin embargo, para cualquier elemento x de X se tiene

$$\|x - x_{s(n)}\| \leqslant \|x - z_n\| + \|z_n - x_{s(n)}\| \qquad (n = 1,\ldots)$$

pero dado que z_n es una combinación convexa $x_{s(n)}$ y $x_{s(n)+1}$ se sigue que

$$\|x - x_{s(n)}\| \leqslant \|x - z_n\| + \|x_{s(n)} - x_{s(n)+1}\| \quad (n = 1,\ldots)$$

y teniendo en cuenta cómo se ha elegido la sucesión (x_n), de esta última desigualdad obtenemos

$$\text{diam}\,(X) = \text{lím inf}\,\|x - z_n\|$$

lo cual es una contradicción con la condición (II). En consecuencia se concluye que, en el supuesto inicial, E tiene estructura asíntótico normal.

Recíprocamente, si E tiene estructura asintótico normal, todas las sucesiones (x_n) que verifiquen la condición (I) también cumplirán (II), y en particular tal sucederá con las que estén en la situación (I′). Esto completa la prueba.

3. OBSERVACION

El Teorema 1 de (1) establece que si E es un espacio de Banach reflexivo con estructura asintótico normal, entonces posee la propiedad B—G—K. Vamos a ver que, a partir de cualesquiera de las condiciones cuya equivalencia con la estructura asintótico normal ha probado el teorema anterior, es posible probar, *directamente*, la propiedad del punto fijo.

Sea pues X un subconjunto no vacío, cerrado acotado convexo del espacio de Banach reflexivo E, y sea T una aplicación no expansiva de X en sí mismo.

Una aplicación rutinaria del lema de Zörn, junto con la reflexividad de E, permiten afirmar que existe un subconjunto $K \subset X$ con las propiedades de ser no vacío, cerrado, convexo, acotado, y *T-invariante* (es decir $T(K) \subset K$) y además minimal para tales propiedades.

Si (b_n) es cualquier sucesión real, con $b_n \to +\infty$ y $b_n \geqslant 1$ $(n = 1,\ldots)$, las aplicaciones

$$h_n : K \longrightarrow K$$

dadas por

$$h_n(x) = \frac{1}{b_n}\, z + (1 - \frac{1}{b_n})\ T(x) \qquad (z \in K, \text{fijo})$$

están bien definidas por ser K invariante y convexo, y además son contractivas con constante $(1 - 1/b_n)$, La aplicación directa del conocido principio de Banach suministra un sucesión (x_n) en K tal que:

$$x_n = \frac{1}{b_n} z + (1 - \frac{1}{b_n}) T(x_n)$$

con lo cual se comprueba directamente que, por ser K acotado,

$$x_n - T(x_n) \longrightarrow 0$$

(en otras palabras, que la sucesión (x_n) está formada por puntos de los llamados "quasi–fijos").

Siendo K minimal, es conocido (ver por ejemplo (2)) que esta última condición implica

$$\|x - x_n\| \longrightarrow \text{diam } (K).$$

para todo $x \in K$.

Por otra parte, es también directo comprobar que

$$\|x_n - x_{n+1}\| \leqslant \frac{b_n - b_{n-1}}{b_{n-1}} \|z - T(x_n)\|$$

Si tomamos ahora cualquier sucesión adecuada (a_n) y ponemos

$$b_n = \sum_1^n 1/a_j$$

resulta

$$\|x_n - x_{n+1}\| \leqslant \frac{\frac{1}{a_n}}{\sum_1^{n-1} 1/a_j} \text{diam } (K)$$

o sea que

$$a_n(x_n - x_{n-1}) \longrightarrow 0$$

Si K constase de más de un punto y E estuviera en las condiciones del teorema 1 para alguna sucesión adecuada (a_n) existiría $x_0 \in X$ con

$$\text{lím}_n \text{ inf } \|x_0 - x_n\| < \text{diam } (K)$$

lo cual es una contradicción. Luego K se reduce a un punto y E tiene la propiedad *B—G—K*.

REFERENCIAS

[1] BAILLON, J. B. Y SCHONEBERG, R.: "Asymptotic normal structure and fixed points of nonexpansive mappings". *Proc. Amer. Math Soc* 81 (1981, 257-264.

[2] KARLOVITZ, L. A.: "Existence of fixed points of nonexpansive mappings in a space without normal structure" *Pacific J. of Matth.* 66 (1976), 153-158.

[3] KIRK, W. A.: "Fixed point theory for nonexpansive mappings" en Lecture Notes in Math. n. 886 (1891), 484-505.