Sobre la ecuación matricial d/dt X(t) = A(t)X(t) + X(t)B(t) + C(t) con coeficientes periódicos

Por Vicente Hernandez Garcia
y Lucas Jodar Sanchez

Recibido: 6 junio 1984

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia.

Abstract

Some results of Floquet-Lyapunov theory for periodic linear systems are generalized to the case of linear matrix differential equations. An algebraic characteritation of periodic solution spaces are obtained for the homogeneous and non-homogeneous case.

1. INTRODUCCION

En la teoría de las ecuaciones diferenciales vectoriales lineales

$$d/dt\, x(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

es conocido el resultado de Floquet-Lyapunov, [1] pág. 47, que permite mediante un transformación de coordenadas reducir el sistema anterior a otro sistema equivalente de coeficientes constantes, en el caso de que la matriz de coeficientes $A(t)$ sea T-periódica. En este trabajo se extiende dicho resultado al caso más general de las ecuaciones diferenciales matriciales con coeficientes periódicos.

$$dt/dt\, X(t) = A(t)X(t) + X(t)B(t) + C(t) \tag{1.1}$$

En primer lugar se estudia la existencia de transformaciones de Lyapunov que permiten reducir la ecuación homogénea asociada a (1.1), a la ecuación de coeficientes constantes

$$d/dt\, Y(t) = R\, Y(t) + Y(t)\, S \tag{1.2}$$

A continuación se estudian los espacios de soluciones T-periódicas de la ecuación (1.1), tanto en el caso homogéneo como en el no-homogéneo, poniendo de relieve el papel fundamental que juega en dichos espacios la ecuación matricial lineal algebraíca

$$U\, X\, V - X = W \tag{1.3}$$

2. TRANSFORMACIONES DE LYAPUNOV.

Sea la ecuación diferencial matricial lineal homogénea

$$d/dt\, X(t) = A(t)X(t) + X(t)B(t) \tag{2.1}$$

donde $A(B)$, $B(t)$, son funciones contínuas a trozos en el intervalo $J = [0, \infty[$ con valores en los espacios de matrices $\mathbb{C}_{m\,x\,m}$, $\mathbb{C}_{n\,x\,n}$, respectivamente, siendo $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos.

Se considera la transformación matricial

$$X(t) = P(t)Y(t)Q(t) \tag{2.2}$$

siendo $P(t)$, $Q(t)$, funciones de clase C^1 a trozos en J, con valores en $\mathbb{C}_{m\,x\,m}$ $\mathbb{C}_{nxn}$, respectivamente, ambas invertibles para todo $t \epsilon J$. Sustituyendo (2.2) en (2.1) se obtiene que

$$\mathrm{P}(t)(d/dt\; Y(t))\; Q(t) =$$

$$= (A(t)P(t) - d/dt\, P(\mathrm{t}))\; Y(t)Q(t) + P(t)Y(t)\; (Q(t)B(t) - d/dt\; Q(t))$$

Premultiplicando por $P(t)^{-1}$ y postmultiplicando por $Q(t)^{-1}$ resulta la ecuación diferencial matricial lineal homogénea en $Y(t)$

$$d/dt\; Y(t) = [P(t)^{-1}\, (A(t)P(t) - dt/dt\, P(t))]\; Y(t) +$$

$$+\; Y(t)\; [(Q(t)B(t) - d/dt\; Q(t))\; Q(t)^{-1}\,] \tag{2.3}$$

Supongamos que las matrices coeficientes de (2.3) son matrices constantes $R \in \mathbb{C}_{mxm}$, $S \in \mathbb{C}_{nxn}$, respectivamente. Se verifica entonces que $P(\mathrm{t})$, $Q(t)$ satisfacen las ecuaciones diferenciales matricales lineales

$$d/dt\; P(t) = A(t)P(t) - P(t)\, R \tag{2.4}$$

$$d/dt\; Q(t) = -\, S\; Q(t) + Q(t)B(t) \tag{2.5}$$

Si $X_A\,(t,\, t_0)$ es la matriz de transición de estados en $t_0 \in J$ de la ecuación diferencial vectorial lineal

$$d/dt\; x(t) = A(t)x(t) \tag{2.6}$$

entonces por [1], pág. 59, la solución de (2.4) que verifica la condición inicial $P(0) = I_m$, viene dada por

$$P(t) = X_A\,(t,\, 0)e^{-tR} \tag{2.7}$$

Análogamente, si $X_B(t, t_0)$ es la matriz de transición de estados en $t_0 \epsilon J$ de la ecuación diferencial vectorial lineal

$$d/dt\, x(t) = B(t)'\, x(t) \tag{2.8}$$

siendo $B(t)'$ la matriz traspuesta de $B(t)$, entonces la solución de (2.5) que verifica la condición inicial $Q(0) = I_n$, resulta ser

$$Q(t) = e^{-tS}\, X_B(t, 0)' \tag{2.9}$$

En el siguiente teorema se demuestra que si las matrices coeficiente de (2.1) son T-periódicas entonces es posible determinar explícitamente R y S.

Teorema 1.

Si $A(t + T) = A(t)$, $B(t + T) = B(t)$, $\forall\, t \epsilon J$, $T > 0$, entonces la transformación matricial.

$$X(t) = P(t)Y(t)Q(t) \tag{2.10}$$

donde $P(t)$, $Q(t)$, son las matrices T-periódicas dadas por

$$P(t) = X_A(t, 0)\, e^{-tR}, \quad R = (1/T)\log X_A(T, 0) \tag{2.11}$$

$$Q(t) = e^{-tS}\, X_B(t, 0)', \quad S = (1/T)\log X_B(T, 0)' \tag{2.12}$$

siendo $X_A(t, 0)$ y $X_B(t, 0)$ las matrices de transición de estados en o de (2.6) y (2.8), respectivamente, reduce la ecuación (2.1) a la ecuación de coeficientes constantes

$$d/dt\ Y(t) = R\ Y(t) + Y(t)S \tag{2.13}$$

Demostración: Imponiendo la condición de que la matriz $P(t)$ dada por (2.7) sea T-periódica, se obtiene para todo $t \epsilon J$

$$X_A(t + T, 0)e^{-(t+T)R} = X_A(t,0)e^{-tR}$$

$$X_A(0, t)\, X_A(t + T, 0) = e^{TR}$$

Teniendo en cuenta que por ser $A(t)$, T-periódica, se verifica que $X_A(0, t) = X_A(T, t + T)$ luego

$$X_A(T, 0) = e^{TR}$$

$$R = (1/T)\log X_A(T, 0)$$

donde por [2], pág. 568, R está bien definida ya que al ser $X_A(T, 0)$ invertible, siempre es posible escoger una rama de la función logarítmo, $\log_\alpha$ cuyo dominio $D\alpha$ contenga al espectro $\sigma(X_A(T, 0))$.

Análogamente se prueba que la matriz T-periódica $Q(t)$ viene dada por (2.12). Es fácil comprobar que las matrices $P(t)$, $Q(t)$ dadas por (2.11), (2.12), respectivamente, verifican la definición de transformación de Lyapunov, [1], pág. 47.

A partir del teorema anterior se obtiene la siguiente descomposición de Floquet-Lyapunov.

Corolario 1

Si $A(t+T) = A(t)$, $B(t+T) = B(t)$, $\forall\, t \in J$, $T > 0$, entonces la solución de (2.1) que verifica la condición inicial $X(t_0) = X_0$, $t_0 \in J$, se puede descomponer de la forma siguiente

$$X(t) = P(t)e^{(t-t_0)R}\, P(t_0)^{-1} X_0\, Q(t_0)^{-1} e^{(t-t_0)S}\, Q(t) \qquad (2.14)$$

con matrices T-periódicas $P(t)$, $Q(t)$, y matrices constantes R, S, dadas por las expresiones (2.11) y (2.12).

Demostración: Si $X_A(t, t_0)$, $X_B(t, t_0)$, son las matrices de transición de estados en $t_0 \in J$ de las ecuaciones vectoriales (2.6), (2.8), respectivamente, entonces la solución de (2.1) que verifica la condición inicial $X(t_0) = X_0$, viene dada por, [1], pág. 59,

$$X(t) = X_A(t, t_0) X_0\, X_B(t, t_0)' \qquad (2.15)$$

A partir de las expresiones (2.11), (2.12) y por las propiedades de la matriz de transición de estados, [1], págs. 27-30, resulta que

$$X_A(t, t_0) = X_A(t, 0)\, X_A(0, t_0) = X_A(t, 0)\, X_A(t_0, 0)^{-1} =$$

$$= P(t)e^{(t-t_0)R} P(t_0)^{-1}$$

$$X_B(t, t_0)' = (X_B(t, 0)\, X_B(0, t_0))' =$$

$$= (X_B(t_0, 0)')^{-1} X_B(t, 0)' = Q(t_0)^{-1} e^{(t-t_0)S}\, Q(t)$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.15) se obtiene (2.14).

En el apartado siguiente estudiaremos el conjunto de soluciones T-periódicas de la ecuación homogénea (2.1).

3. SOLUCIONES PERIODICAS DE LA ECUACION HOMOGENEA.

Sea la ecuación diferencial matricial lineal homogénea

$$d/dt\, X(t) = A(t)X(t) + X(t)B(t) \qquad (3.1)$$

donde las matrices coeficiente $A(t)$, $B(t)$, verifican las condiciones impuestas en el apartado anterior. Si $X(t)$ es solución T-periódica de (3.1), se verifica por (2.15)

$$X(t) = X_A(t, t_0)X(t_0)X_B(t, t_0)'$$

$$X(t_0) = X(t_0 + T) = X_A(t_0 + T, t_0)X(t_0)X_B(t_0 + T, t_0)'$$

Luego $X(t_0)$ es solución de la ecuación matricial lineal homogéna.

$$X_A(t_0 + T, t_0)X\,X_B(t_0 + T, t_0)' - X = 0 \tag{3.2}$$

Recíprocamente, sea X_0 solución de (3.2), y $X(t)$ la solución de (3.1) dada por

$$X(t) = X_A(t, t_0)X_0X_B(t, t_0)'$$

Veamos que si $A(t)$ y $B(t)$ son T-periódicas en J, entonces $X(t)$ es T-periódica. En efecto, sea $U(t) = X(t + T)$. Derivando respecto de t, resulta que

$$d/dt\ U(t) = d/dt\ X(t + T) = A(t + T)X(t + T) +$$

$$+ X(t + T)B(t + T) = A(t)U(t) + U(t)B(t)$$

$$U(t_0) = X(t_0 + T) = X_A(t_0 + T, t_0)X_0X_B(t_0 + T, t_0)' = X_0$$

Como $U(t)$ satisface el mismo problema de condiciones iniciales que $X(t)$, se verifica por la unicidad de la solución

$$X(t) = U(t) = X(t + T),\ \forall\, t \in J$$

Este resultado se expresa en el teorema siguiente.

Teorema 2.

Sean $A(t)$, $B(t)$, T-periódicas en J, $T > 0$. Si $X_A(t, t_0)$ y $X_B(t, t_0)$ son las matrices de transición de estados en $t_0 \in J$, de las ecuaciones vectoriales (2.6) y (2.8), respectivamente, se verifica entonces que:

(1) El conjunto de soluciones T-periódicas de (3.1) viene dado por

$$X(t) = X_A(t, t_0)X_0X_B(t, t_0)' \tag{3.3}$$

siendo X_0 solución de la ecuación matricial lineal homogéna

$$X_A(t_0 + T, t_0)X\,X_B(t_0 + T, t_0)' - X = 0 \tag{3.4}$$

(2) La única solución T-periódica de (3.1) es la solución trivial $X(t) \equiv 0$, sí y sólo sí, se verifica la siguiente condición espectral

$$\alpha_j\beta_k \neq 1, \forall \alpha_j \epsilon \in \sigma(X_A(t_0 + T, t_0)). \ \forall \beta_k \in \sigma(X_B(t_0 + T, t_0)) \qquad (3.5)$$

Demostración: (1) Ha sido demostrado en las consideraciones previas al enunciado del teorema.

(2) Sea el isomorfismo $\nu:\mathbb{C}_{mxn} \longrightarrow \mathbb{C}_{mnx1}$, vector columna asociado a una matriz, que a $X = [x_{ij}]_{mxn}$ le hace corresponder el vector columna de mn componentes $\nu(X) = x$, que se obtiene colocando las filas de X una a continuación de otra en el orden natural, es decir

$$x = [x_{11}x_{12},\ldots,x_{1n}; \ \ldots \ ; x_{m1}, x_{m2},\ldots,x_{mn}]'$$

Aplicando el isomorfismo ν a (3.4), se obtiene por el lema-columna de [3], que la ecuación matricial lineal homogéna (3.4) es equivalente al sistema lineal homogéneo

$$[X_A(t_0 + T, t_0) \otimes X_B(t_0 + T, t_0) - I_m \otimes I_n]\, x = 0 \qquad (3.6)$$

donde $\otimes$ denota el producto de Kronecker de matrices. Por [4], pág. 250, la matriz de coeficientes de (3.6) tiene como espectro al conjunto de valores

$$\alpha_j\beta_k - 1, \ \alpha_j \in \sigma(X_A(t_0 + T, t_0)), \ \beta_k \in \sigma(X_B(t_0 + T, t_0))$$

La condición necesaria suficiente para que $X(t) \equiv 0$ sea la única solución T-periódica de (3.1) es que $X_0 = 0$ sea la única solución de (3.4), o de modo equivalente, que $x_0 = 0$, sea la única solución de (3.6). Esta última condición se cumple sí y sólo sí, se verifica (3.5).

A partir del teorema anterior se deducen los corolarios siguientes.

Corolario 1.

Bajo la hipótesis del teorema 2, se verifica que el conjunto de soluciones T-periódicas de (3.1) es un subespacio vectorial de dimensión $mn-h$, siendo

$$h = \text{rango}\ (X_A(t_0 + T, t_0) \otimes X_B(t_0 + T, t_0) - I_m \otimes I_n)$$

Demostración: Es consecuencia inmediata del teorema 2–(1), y el isomorfismo entre los espacios de soluciones de (3.4) y (3.6).

Corolario 2.

Dada la ecuación de coeficientes constantes

$$d/dt\, X(t) = AX(t) + X(t)B \qquad (3.7)$$

donde $A \in \mathbb{C}_{mxm}$, $B \in \mathbb{C}_{nxn}$, se verifica que:

(1) El conjunto de soluciones T-periódicas de (3.7) viene dado por

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}\, X_0\, e^{(t-t_0)B}, \; t_0 \in J$$

Siendo X_0 solucion de la ecuación matricial lineal homogénea

$$e^{TA}\, X\, e^{TB} - X = 0$$

(2) La única solución T-periódica de (3.7) es la solución trivial $X(t) \equiv 0$, si y sólo sí, para todo $\lambda_j \in \sigma(A)$ y para todo $\mu_k \in \sigma(B)$ se verifica que

$$\lambda_j + \mu_k \neq \frac{2p\pi}{T} i, \; p \text{ entero} \tag{3.8}$$

Demostración: (1) Es consecuencia inmediata del teorema 2–(1).
(2) Para la ecuación (3.7) se verifica que

$$X_A(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}, \; X_B(t,t_0)' = e^{(t-t_0)B}$$

luego por el teorema 2–(2), $X(t) \equiv 0$ es la única solución T-periódica de (3.7), sí y sólo sí,

$$\alpha_j \beta_k \neq 1, \; \forall \alpha_j \in \sigma(e^{TA}), \; \forall \beta_k \in \sigma(e^{TB}) \tag{3.9}$$

Teniendo en cuenta que los valores propios de las matrices e^{TA}, e^{TB}, son

$$\alpha_j = e^{T\lambda_j}, \; \lambda_j \in \sigma(A)$$

$$\beta_k = e^{T\mu_k}, \mu_k \in \sigma(B)$$

Es fácil comprobar que la condición (3.9) es equivalente a (3.8).
En el apartado siguiente pasamos a estudiar el conjunto de soluciones T-periódicas de la la ecuación no homogéna.

4. SOLUCIONES PERIODICAS DE LA ECUACION NO-HOMOGENEA.

Se considera la ecuación diferencial matricial lineal no-homogéna

$$d/dt\, X(t) = A(t)X(t) + X(t)B(t) + C(t) \tag{4.1}$$

donde las matrices $A(t)$, $B(t)$, verifican las condiciones del apartado 2, y $C(t)$ es una función continua a trozos en el intervalo J con valores en $\mathbb{C}_{m\,x\,n}$. Si $X(t)$ es una solución T-periódica de (4.1). se cumple por [1], pág. 59, que

$$X(t) = X_A(t, t_0)X(t_0)X_B(t, t_0)' + \int_{t_0}^{t} X_A(t, s)C(s)X_B(t, s)'\mathrm{d}s$$

y por ser T-periódica

$$X(t_0) = X(t_0 + T) = X_A(t_0 + T, t_0) X(t_0) X_B(t_0 + T, t_0)' +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+T} X_A(t_0 + T, s) C(s) X_B(t_0 + T, s)' \, ds$$

Premultiplicando por $X_A(t_0, t_0 + T)$, y postmultiplicando por $X_B(t_0, t_0 + T)'$ se obtiene que $X(t_0)$ es solución de la ecuación matricial lineal no homogénea

$$X_A(t_0, t_0 + T) X \; X_B(t_0, t_0 + T)' - X =$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} X_A(t_0, s) C(s) X_B(t_0, s)' ds \qquad (4.2)$$

Recíprocamente, sea X_0 solución de (4.2) y sea $X(t)$ la solución de (4.1) dada por

$$X(t) = X_A(t, t_0) X_0 \; X_B(t, t_0)' + \int_{t_0}^{t} X_A(t, s) C(s) X_B(t, s)' \, ds$$

Vamos a probar que si $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, son T-periódicas en $J, T > 0$, entonces $X(t)$ es T- periódica. Para ello sea $U(t) = X(t + T)$, $\forall t \in J$. Derivando respecto de t se obtiene que

$$d/dt \;\; U(t) = d/dt \;\; X(t + T) = A(t + T) X(t + T) + X(t + T) B(t + T) +$$

$$+ C(t + T) = A(t) U(t) + U(t) B(t) + C(t)$$

Además

$$U(t_0) = X(t_0 + T) = X_A(t_0 + T, t_0) X_0 \;\; X_B(t_0 + T, t_0)' +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_0+T} X_A(t_0 + T, s) C(s) X_B(t_0 + T, s)' \, ds$$

y efectuando la sustitución

$$X_0 = X_A(t_0, t_0 + T)X_0 X_B(t_0, t_0 + T)' -$$

$$-\int_{t_0}^{t_0+T} X_A(t_0, s)C(s)X_B(t_0, s)'ds$$

resulta que $U(t_0) = X_0$. Luego $U(t)$ satisface el mismo problema de condiciones iniciales que $X(t)$, y por la unicidad de la solución, $X(t) = U(t + T)$, $\forall\ t \in J$. Hemos probado entonces el resultado siguiente.

Teorema 3.

Sean $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, T-periódicas en J, $T > 0$. Si $X_A(t, t_0)$, $X_B(t, t_0)$ son las matrices de transición de estados en $t_0 \in J$ de las ecuaciones vectoriales (2.6), (2.8), respectivamente, entonces el conjunto de soluciones T-periódicas de (4.1) queda caracterizado por

$$X(t) = X_A(t, t_0)X_0 X_B(t, t_0)' +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} X_A(t, s)C(s)X_B(t, s)'\,ds \qquad (4.3)$$

siendo X_0 solución de la ecuación matricial lineal no-homogénea

$$X_A(t_0, t_0 + T)X\,X_B(t_0, t_0 + T)' - X =$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} X_A(t_0, s)C(s)X_B(t, s)'\,ds \qquad (4.4)$$

A partir del teorema anterior se deducen los resultados siguientes.

Proposición 1.

Bajo las hipótesis del teorema 3, se verifican que existen soluciones T-periódicas de (4.1), sí y sólo sí, $C(t)$ verifica la condición de ortogonalidad

$$\int_{t_0}^{t_0+T} tr(Y(s)^*\,C(s))\,ds = 0 \qquad (4.5)$$

Para toda solución T-periódica $Y(t)$ de la ecuación adjunta de (4.1)

$$d/dt\ Y(t) = -A(t)^*\ Y(t) - Y(t)\,B(t)^* \qquad (4.6.)$$

Demostración: Consideremos en el espacio de matrices $\mathbb{C}_{mxn}$ el producto interior

$$\langle X, Y\rangle = tr(X^*\, Y)$$

donde $tr(\ \ )$ denota la función traza y X^* representa la traspuesta conjugada de X. Por el teorema 3, existen soluciones T-periódicas de (4.1) sí y sólo sí la ecuación matricial (4.4) es compatible. Por [2], pág. 479, se verifica que (4.4) es compatible sí y sólo sí la matriz del segundo miembro de (4.4)

$$\int_{t_0}^{t_0+T} X_A(t_0, s)C(s)X_B(t_0, s)'\,ds$$

es ortogonal a cualquier solución Y_0 de la ecuación adjunta de (4.4)

$$X_A(t_0, t_0+T)^*\ Y\ X_B(t_0, t_0+T)'^* - Y = 0 \qquad (4.7)$$

Es decir, si se verifica que

$$\int_{t_0}^{t_0+T} tr(Y_0^*\, X_A(t_0, s)C(s)X_B(t_0, s)')\,ds = 0 \qquad (4.8)$$

para toda solución Y_0 de (4.7). Vamos a probar que esta última condición es equivalente a que la matriz $C(t)$ verifique la condición de ortogonalidad (4.5).

Supongamos que $C(t)$ verifica la condición (4.8) para toda solución Y_0 de (4.7). Sea $Y(t)$ solución T-periódica de (4.6). Si $Y_A(t, t_0)$, $Y_B(t, t_0)$ son las matrices de transición de estados en $t_0 \in J$ de las ecuaciones vectoriales, $d/dt\ y(t) = -A(t)^*\ y(t)$, $d/dt\ y(t) = -B(t)'^*\ y(t)$, respectivamente, se verifica por el teorema 2 que

$$Y(t) = Y_A(t, t_0)\, Y_0\, Y_B(t, t_0)'$$

siendo Y_0 solución de la ecuación matricial lineal homogénea

$$Y_A(t_0+T, t_0) Y\, Y_B(t_0+T, t_0)' - Y = .0$$

Teniendo en cuenta que, por [1], pág. 44, $Y_A(t, t_0) = X_A(t_0, t)^*$, $Y_B(t, t_0) = X_B(t_0, t)^*$, resulta que

$$Y(t) = X_A(t_0, t)^*\ Y_0\ X_B(t_0, t)'^* \qquad (4.9)$$

siendo Y_0 solución de la ecuación matricial lineal homogénea

$$X_A(t_0, t_0 + T)^* \; Y \; X_B(t_0, t_0 + T)'^* - Y = 0 \tag{4.10}$$

y de aquí que Y_0 es solución de (4.7). Por la hipótesis de partida, $C(t)$ verifica la condición (4.8), luego

$$\int_{t_0}^{t_0+T} tr(Y(s)^* C(s))ds = \int_{t_0}^{t_0+T} tr(X_B(t_0, s)' \; Y_0^* \, X_A(t_0, s)C(s))\, ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T} tr(Y_0^* \, X_A(t_0, s)C(s)X_B(t_0, s)')ds = 0$$

Recíprocamente, supongamos que $C(t)$ verifica la condición de ortogonalidad (4.5) para toda solucióm T-periódica $Y(t)$ de (4.6). Si Y_0 es solución de la ecuación adjunta (4.7), entonces la matriz $Y(t)$ dada por (4.9) es solución T-periódica de (4.6). De donde se deduce que

$$\int_{t_0}^{t_0+T} tr(Y_0^* X_A(t_0, s)C(s)X_B(t_0, s)')ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T} tr(X_B(t_0, s)' \; Y_0^* \, X_A(t_0, s)C(s))ds = \int_{t_0}^{t_0+T} tr(Y(s)^* \, C(s))ds = 0$$

Proposición 2.

Bajo la hipótesis del teorema 3, se verifica que existen soluciones T-periódicas de (4.1) sí y sólo sí, las matrices

$$\begin{bmatrix} M & O \\ O & N \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} M & P \\ O & N \end{bmatrix}$$

son semejantes,donde

$$P = \int_{t_0}^{t_0+T} X_A(t_0, s)C(s)X_B(t_0 + T, s)'ds \tag{4.11}$$

$$M = X_A(t_0, t_0 + T), \qquad N = X_B(t_0 + T, t_0)'$$

Demostración: A partir del torema 3, existen soluciones T-periódicas de (4.1) sí y sólo sí, la ecuación matricial (4.4) es compatible. Postmultiplicando (4.4) por la matriz$X_B(t_0 + T, t_0)'$ se obtiene la ecuación equivalente $MX - XN = P$, conM,Ny P dadas por (4.11). Por [5], pág. 342, esta última ecuación es compatible sí y sólo si, se verifica la condición del enunciado.

Proposición 3

Si $X(t) \equiv 0$ es la única solución T-periódica de la ecuación homogéna asociada a (4.1), se verifica entonces que, bajo la hipótesis del teorema 3:

(1) Existe una única solución T-periódica de (4.1) dada por

$$X_p(t) = X_A(t, t_0)(Q^{-1}E)\, X_B(t, t_0)' + \int_{t_0}^{t} X_A(t, s)C(s)X_B(t, s)'ds \quad (4.12)$$

donde

$$Q = q(M) = \sum_{j=0}^{m} q_j M^j \ , \quad E = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{j} q_j M^{k-1}\, PN^{j-k} \quad (4.13)$$

siendo

$$M = X_A(t_0, t_0 + T), \quad N = X_B(t_0 + T, t_0)' \quad (4.14)$$

$$P = \int_{t_0}^{t_0+T} X_A(t_0, s)C(s)X_B(t_0 + T, s)'ds$$

con $q(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} q_j \lambda^j$ el polinomio característico de N.

(2) La solución de (4.1) que verifica la condición inicial $X(t_0) = X_0$, $t_0 \in J$, se puede descomponer de forma única como suma de una solución periódica de (4.1) y una solución de la ecuación homogénea asociada, es decir

$$X(t) = X_p(t) + X_A(t, t_0)(X_0 - X_p(t_0))X_B(t, t_0)'$$

Demostración: (1) Por el teorema 3, el conjunto de soluciones T-periódicas de (4.1) queda caracterizado por (4.3), siendo X_0 solución de la ecuación matricial lineal no-homogéna (4.4). Si $X(t) \equiv 0$ es la única solución T-periódica de la ecuación homogénea asociada a (4.1), entonces por el teorema 2-(2), la ecuación (4.4) tiene solución única. Dicha ecuación es equivalente a la ecuación

$$MX - XN = P \quad (4.15)$$

donde M, N. P vienen dadas por (4.14). Por [6], la ecuación (4.15) es equivalente a

$$QX = E \quad (4.16)$$

con Q, E, dadas por (4.13). Esta última ecuación tiene la solución única $X_0 = Q^{-1}E$, que al ser sustituida en (4.3) conduce a la expresión (4.12). (2) Es consecuencia inmediata de (1).

En el caso de coeficientes constantes se obtiene como un corolario el resultado siguiente.

Corolario 2.– Sea la ecuación de coeficientes constantes

$$d/dt\, X(t) = A\, X(t) + X(t)\, B + C(t) \tag{4.17}$$

tal que $C(t)$ es T-periódica en J, $T > 0$. Si para todo $\lambda_j \in \sigma(A)$, y $\mu_k \in \sigma(B)$ se verifica la condición espectral

$$\lambda_j + \mu_k \neq \frac{2p\pi}{T} i. \; p \text{ entero}$$

entonces:

(1) Existe una única solución T-periódica de (4.17) dada por

$$X_p(t) = e^{tA}(Q^{-1}\, E)e^{tB} + \int_0^t e^{(t-s)A}\, C(s)e^{(t-s)B} ds$$

donde $Q = q(M) = \sum_{j=0}^{m} q_j M^j$, $E = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{j} q_j M^{k-1} P N^{j-k}$, siendo

$M = e^{-TA}$, $N = e^{TB}$,

$$P = \int_0^T e^{-sA}\, C(s) e^{(T-s)B}\, ds$$

con $q(\lambda) = \sum_{j=0}^{m} q_j \lambda^j$, el polinomio característico de N.

(2) La solución de (4.17) que verifica la condición inicial $X(0) = X_0$, se puede descomponer de forma única como suma de una solución periódica de (4.17) y una solución de la ecuación homogénea asociada, es decir,

$$X(t) = X_p(t) + e^{tA}\, (X_0 - X_p(0))e^{tB}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BROCKETT, R. W.: "Finite dimensional linear systems" Ed. John Wiley, New York, 1970.

[2] DUNDFORD, N. AND SCHWARTZ, J.: "Linear Operators", Part. I, Interscience, New York, 1957.

[3] BARNETT, S.: "Matrix differential equations and Kronecker products", SIAM, *J. Appl. Math.* 24 (1973), pág. 1-5.

[4] BELLMAN, R.: "Introducción al análisis matricial", Ed. Reverté, Barcelona, 1966.

[5] GOHBERG, I., LANCASTER, P. AND RODMAN, L. :"Matrix polynomials", Ed. Academic Press. New York, 1982.

[6] JAMESON, A. : "Solution of te equations $AX + XB = C$ by inversión of an MxM or NxN matrix", SIAM *J. Appl. MAth.*, 16 (1968), pág. 1020-1023.

Departamento de Matemáticas
Cátedra de Matemáticas II
E.T.S. Ingenieros Industriales,
Univ. Politécnica de Valencia
Camino de la Vera s/n, Valencia