Una nota sobre la coincidencia de topologías en productos tensoriales

POR JOSE BONET

Recibido: 18 enero 1984

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia Ureña

Abstract

If $E \otimes_\epsilon F$ is barreled and E has the bounded aproximation property then $E \otimes_\epsilon F = E \otimes_\pi F$. If $E \otimes_\pi F$ is ultrabornological then $E \otimes_\pi F = E \otimes_i F$.

Resumen

Si $E \otimes_\epsilon F$ *es tonelado y* E tiene la propiedad de la aproximación acotada, entonces $E \otimes_\epsilon F = E \otimes_\pi F$. Si $E \otimes_\pi F$ es ultrabornológico, entonces $E \otimes_\pi F = E \otimes_i F$.

Nuestra notación y terminología sigue la de Floret (4). Dentro del estudio de la estabilidad de ciertas clases de espacios localmente convexos en productos tensoriales, Defant y Govaerts prueban en (3) que si E y F son espacios localmente convexos separados (l.c.s.) y E posee la propiedad de aproximación acotada (p.a.a.) entonces $E \otimes_\pi F$ es tonelado si y sólo si E y F son tonelados y $E \otimes_\pi F$ coincide con $E \otimes_\beta F$. Las ideas usadas por ellos permiten probar (i) en el siguiente

Teorema.— Sean E *y* F *l.c.s.*

(i) *Si* E *tiene p.a.a. y* $\mathrm{E} \otimes_\epsilon \mathrm{F}$ *es tonelado, entonces* E *y* F *son tonelados y* $\mathrm{E} \otimes_\epsilon \mathrm{F}$ *coincide con* $\mathrm{E} \otimes_\pi \mathrm{F}$.

(ii) *Si* $\mathrm{E} \otimes_\pi \mathrm{F}$ ($\mathrm{E} \otimes_\epsilon \mathrm{F}$ *respectivamente*) *es ultrabornológico, entonces* E *y* F *son ultrabornológicos y* $\mathrm{E} \otimes_\pi \mathrm{F}$ ($\mathrm{E} \otimes_\epsilon \mathrm{F}$ *respectivamente*) *coincide con* $\mathrm{E} \otimes_i \mathrm{F}$.

Demostración.— Si para cualquier topología tensorial a, $E \otimes_a F$ es tonelado o ultrabornológico, entonces E y F son tonelados o ultrabornológicos respectivamente.

(i) Basta demostrar que $E \otimes_\epsilon F$ y $E \otimes_\pi F$ tiene el mismo dual. Sea B una forma bilineal continua sobre E x F y sea B' su linealización. Si $(A_t : t \in T)$

es una red equicontinua en L(E, E) de aplicaciones de rango finito, convergiendo puntualmente a la identidad de E, las restricciones de B' a cada $A_t(E) \otimes_\epsilon F$, que coincide con $A_t(E) \otimes_\pi F$, son obviamente continuas, así la red $\{B' \cdot (A_t \otimes id_F), t \in T\}$ es un débil acotado de$(E \otimes_\epsilon F)'$ que converge puntualmente a B'. Como $E \otimes_\epsilon F$ es tonelado, B' pertenece a $(E \otimes_\epsilon F)'$.

(ii) Supondremos que $E \otimes_\pi F$ es ultrabornológico. El otro caso es análogo. Basta demostrar que toda forma bilineal separadamente continua sobre E x F, B es continua. Sea B' la linealización de B y C un disco de Banach en $E \otimes_\pi F$. Procediendo como en la demostración del Teorema 1 en (6), existe un subespacio G de E de dimensión finita tal que $G \otimes_\pi F$,que es subespacio topológico de $E \otimes_\pi F$, contiene a C. La restricción de B' a $G \otimes_\pi F$ es continua, y así B' está acotada sobre C. Como $E \otimes_\pi F$ es ultrabornológico B' es continua. Q.E.D.

Observaciones 1.– El π-producto tensorial de un normado tonelado E y un tonelado F es siempre tonelado (ver (2) para una prueba directa; también se puede razonar viendo la coincidencia de $E \otimes_\pi F$ con $E \otimes_i F$). Así la condición de suficiente del siguiente resultado es clara: "*Sea* F *un l.c.s. y* E *un espacio normado con la p.a.a. cuya completación sea un* S_p – *espacio para algún* p. $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Entonces* $E \otimes_\epsilon F$ *tonelado si y sólo si* E *y* F *son tonelados y* F *es nuclear*". (Para la condición necesaria, por la parte (i) del Teorema, $E \otimes_\epsilon F$ coincide con $E \otimes_\pi F$, y por tanto coinciden $\hat{E} \otimes_\pi F$ y $\hat{E} \otimes_\epsilon F$; basta pues aplicar (5) 21.3.1).

2.– Con respecto a cúando $E \otimes_\pi F$ es ultrabornológico, mencionamos que esto ocurre en cada una de las situaciones que siguen:

a) E es normado ultrabornológico y F es ultrabornológico (un normado ultrabornológico no es necesariamente completo).

b) E y F son (*DF*) ultrabornológicos (por ejemplo (*LB*)-espacios).

c) E es metrizable ultrabornológico y F es Baire-like ultrabornológico (existen espacios Baire-like ultrabornológicos no metrizables).
(*a*) y (*b*) se siguen de (4)4.4. y (*c*) de (6) Theorem. 4.

3.– De la parte (ii) del Teorema y la observación precedente de deduce el siguiente resultado: "*Sea* E *un l.c.s. y* E'_b *su dual fuerte.* $E \otimes_\pi E'_b$ *es ultrabornológico si y sólo si* E *es un espacio normado ultrabornológico*". Basta tener en cuenta que si la forma bilineal canónica en E x E'_b, que es separadamente continua, es continua, entonces E es normado.

La topología hipocontinua β tiene propiedades de estabilidad, como se prueba en (3) Theorem 12. Para espacios χ_0-tonelados y χ_0-casitonelados (ver (5)) se tiene una situación similar, sin que esto implique la concidencia de $E \otimes_\pi F$ y $E \otimes_\beta F$, con E y F χ_0-tonelados: tómese como espacio E el espacio de Banach 1^2(I), I un conjunto de cardinal no numerable, y como F el espacio l^2(I), dotado con la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados separables de 1^2(I). En este caso la forma bilineal canónica es separadamente continua pero no hipocontinua.

Proposición

Sean E *y* F *espacios* χ_0*-tonelados* (χ_0*-casitonelados*). *Entonces* E $\otimes_\beta$ F *es* χ_0*-tonelado* (χ_0*-casitonelado*).

Demostración: Sólo para el caso χ_0-tonelado. Sea $W = \cap\ (W_n : n = 1,2,\ldots)$ un χ_0-tonel en $E \otimes_\beta K$. Sea A un acotado de E y sean

$$V_n : = \{ y \in F : a \otimes y \in W_n,\ a \in A \quad , n = 1,2,\ldots \}$$

que son 0-entornos absolutamente convexos y cerrados en F. Ideas similares a las utilizadas en (2) Theorem 1, prueban que V: $\cap\ (V_n : n = 1,2,\ldots)$ es absorbente en F y así un 0-entorno en F. Fijando un acotado B en F y razonando análogamente, deducimos que W es un 0-entorno en $E \otimes_\beta F$. Q.E.D.

En (1) probamos que si E es un espacio de Fréchet no normable, entonces $E \hat{\otimes}_\pi K^{(N)}$ es tonelado, o equivalentemente $E \otimes_\pi K^{(N)}$ es bornológico, si y sólo si todo cociente de E con una norma continua es un espacio de Banach. Este caso no puede ser cubierto por los teoremas generales incluidos aquí. Señalemos, sin embargo que como $E \otimes K^{(N)}$ es localmente denso en $E \hat{\otimes}_\pi K^{(N)}$, se sigue que la condición anterior es también equivalente a que $E \hat{\otimes}_\pi K^{(N)}$ sea ultrabornológico.

BIBLIOGRAFIA

[1] BONET, J., PEREZ CARRERAS, P.: Some results on barreledness in projective tensor products *Math. Z.* 185, 333-338 (1984).

[2] BONET, J., PEREZ CARRERAS, P.: Remarks on the stability of barreled type topologies. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 52, 313-318 (1983).

[3] DEFANT, A., GOVAERTS, W.: Tensor Products and spaces of vector valued continuous functions. *Manuscripta Math.* 55, 433-449 (1986).

[4] FLORET, K.: Some aspects of the theory of locally convex inductive limits. Func. Anal. Nort Holland, Notas de Matemáticas, vol. 801, 1980.

[5] JARCHON, H.: "Locally convex spaces" *Teubner. 1981.*

[6] VALDIVIA, M. A classe of locally convex spaces without C-web. *Ann. Inst. Fourier,* 32,2 (1982) 261-269.

"Nota añadida en las pruebas (7/87): La observación 1 ha sido extendida propiamente por A. Defaut, Barrellednen and nuclearity, Archiv. Math. 44,168–170 (1985)"

Departamento de Matemáticas

E. T. S. de Ingenieros Industriales – Valencia