Operadores sobre espacios de sucesiones infraperiódicas con valores vectoriales (II)

POR JOSE MANUEL MORAL MEDINA

Recibido: 10 diciembre 1983

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia

Sea ahora Γ el espacio vectorial de las matrices $(\gamma_j^\nu)_{\nu \in Z^+, j \in N}$ de elementos de $l(E, F)$ sujetas a las condiciones siguientes, que llamaremos *relaciones de compatibilidad*:

$$a)\ \gamma_j^\nu = \sum_{s=0}^{r-1} \gamma_{j+s\nu}^{r\nu} \text{ para } r \in Z^+, 0 \leqslant j \leqslant \nu - 1.$$

$$b)\ \gamma_j^\nu = 0 \text{ para } j \geqslant \nu.$$

Cada elemento de Γ es, pues, una matriz triangular superiormente en la que la fila $r\nu$ se puede obtener "desdoblando ' la fila ν de modo que cada elemento γ_j^ν de ésta no situado por encima de la diagonal principal se descomponga en los r elementos $\gamma_j^{r\nu}, \gamma_{j+\nu}^{r\nu}, \ldots, \gamma_{j+(r-1)\nu}^{r\nu}$ de la fila $r\nu$.

Cuando E y F son espacios vectoriales topológicos llamamos Γ_b al subespacio de Γ formado por las matrices (γ_j^ν) de Γ que verifican la condición siguiente: para cada entorno U de 0 en F existe un entorno V de 0 en E tal que

$$\sum_{j=0}^{\nu-1} \gamma_j^\nu . V \subset U \text{ para todo } \nu \in Z^+.$$

Es claro que esta condición implica que cada γ_j^ν es contínua, de modo que cada matriz de Γ_b está formada por elementos de $\mathcal{L}(E, F)$.

Demostraremos que Γ y Γ_b son respectivamente isomorfos a $ma(Z, R(S), l(E, F))$ y a $bv(Z, R(S), \mathcal{L}(E, F))$ –a los que notaremos abreviadamente ma y bv – y obtendremos como consecuencia de ello y de los teoremas 8 y 9 los dos siguientes, que figuran en (Núñez 1980) para sucesiones ordinarias y E localmente convexo, y en (Moral 1981) para $E = F = K$.

Teorema 10.– *$l(p(E), F)$ es isomorfo a Γ. La relación entre los elementos γ y (γ_j^ν) que se corresponden en el isomorfismo está expresada por*

$$\gamma(f) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \gamma_j^\nu . f(j) \text{ para } f \text{ de período } \nu$$

$$\gamma_j^\nu (a) = \gamma(av_{\nu j}) \text{ para } \nu \in Z^+, j \in N, 0 \leqslant j \leqslant \nu - 1, a \in E$$

Demostración.– Definimos una aplicación Φ de *ma* en Γ de la siguiente forma. para cada $\mu \in ma$ $\Phi(\mu) = (\gamma_j^\nu)$ es la matriz cuyo elemento νj es $\gamma_j^\nu = \mu(E_{\nu j})$ para $0 \leqslant j \leqslant \nu - 1$ y $\gamma_j^\nu = 0$ para $j \geqslant \nu$. De la aditividad de μ resulta inmediatamente que γ_j^ν cumple la relación de compatibilidad a) y, por tanto, pertenece ciertamente a Γ. La linealidad de Φ es consecuencia de la definición de las operaciones en *ma* y en Γ. Si $\Phi(\mu) = (\gamma_j^\nu) = 0$ es claro que μ es nula sobre S, y por tanto $\mu = 0$, lo que prueba que Φ es inyectiva. Para ver que es sobreyectiva, dada $(\gamma_j^\nu) \in \Gamma$ sea $\mu(E_{\nu j}) = \gamma_j^\nu$ para cada $\nu \in Z^+$, $j \in N$ tales que $0 \leqslant j \leqslant \nu - 1$. La relación de compatibilidad a) puede escribirse entonces $\mu(E_{\nu j}) = \sum_{s=0}^{r-1} \mu(E_{r\nu, j+s\nu})$, lo que, según la observación hecha al comienzo de este apartado, prueba que μ es aditiva sobre S. Su prolongación a $R(S)$, que llamamos igualmente μ, pertenece a *ma*, y obviamente $\Phi(\mu) = (\gamma_j^\nu)$, lo que prueba que Φ es un isomorfismo de *ma* sobre Γ. Componiéndolo con el de $l(p(E), F)$ sobre *ma* definido en el teorema 8, se obtiene un isomorfismo de $l(p(E), F)$ sobre Γ en el que a cada γ en el primer espacio le corresponde (γ_j^ν) en el segundo tal que, para $\nu \in Z^+$, $j \in N$, $0 \leqslant j \leqslant \nu - 1$,

$$\gamma_j^\nu (a) = \mu(E_{\nu j}) \cdot a = \gamma(av_{\nu j}) \qquad \text{para todo } a \in E$$

puesto que la función característica de $E_{\nu j}$ es $v_{\nu j}$. El isomorfismo recíproco asocia a cada $(\gamma_j^\nu) \in \Gamma$ el elemento γ de $l(p(E), F)$ definido, para f de período ν, por

$$\gamma(f) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \mu(E_{\nu j}) \cdot f(j) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \gamma_j^\nu \cdot f(j)$$

Esto concluye la demostración.

Teorema 11.– *Sea F completo.* $\mathcal{L}(lp(E), F)$ *es isomorfo a* Γ_b. *La relación entre los elementos* γ *y* (γ_j^ν) *que se corresponden en el isomorfismo está expresada por*

$$\gamma(f) = \lim_\alpha \sum_{j=0}^{\alpha-1} \gamma_j^\alpha \cdot f(j) \; para \; toda \; f \in lp(E)$$

$$\gamma_j^\nu(a) = \gamma(av_{\nu j}) \; para \; \nu \in Z^+, j \in N, \; 0 \leqslant j \leqslant \nu - 1, \; a \in E$$

Demostración. Sea Φ el isomorfismo definido en la demostración anterior y sea $\mu \in ma$. Decir que $\Phi(\mu) \in \Gamma_b$ equivale a decir que, para cada entorno U de 0 en F, existe un entorno V de 0 en E tal que, para toda partición de la forma $\Pi = \{E_{\nu j}\}_{0 \leqslant j \leqslant \nu-1}$, $\nu \in Z^+$, se cumple:

$$\sum_{j=0}^{\nu-1} \mu(E_{\nu j}) \cdot V \subset U$$

Esta condición se cumple siempre que μ es de variación acotada. Para probar que la afirmación recíproca también es cierta, supongamos que se cumple la condición y que $\Pi' = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ es una partición de Z por conjuntos de $R(S)$. Existe entonces un entero positivo ν tal que cada A_i es la unión de los conjuntos disjuntos $E_{\nu j}$, $j \in J_i$, siendo los J_i disjuntos y

$$\bigcup_{i=1}^{n} J_i = \{0, ..., \nu - 1\}.$$

Por tanto

$$\mu(A_i) \cdot V \subset \sum_{j \in J_i} \mu(E_{\nu j}) \cdot V \quad \text{para cada } i,$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \cdot V \subset \sum_{j=0}^{\nu-1} \mu(E_{\nu j}) \cdot V \subset U$$

Esto supone, como fácilmente se comprueba, que todos los valores $\mu(A)$, $A \in R(S)$, son aplicaciones continuas, es decir, elementos de $\mathcal{L}(E, F)$ –dicho de otra manera, es innecesario en la definición que hemos dado anteriormente de medida de variación acotada incluír la condición de que sus valores sean aplicaciones continuas, pues ello viene obligado por la propiedad definitoria-. En consecuencia, $\Phi(\mu) \in \Gamma_b$ sí y sólo si $\mu \in bv$, lo que significa que la restricción de Φ a bv es un isomorfismo entre este espacio y Γ_b. La composición de éste con el de $\mathcal{L}(lp(E), F)$ sobre bv definido en el teorema 9 es un isomorfismo de $\mathcal{L}(lp(E), F)$ sobre Γ_b cuya expresión se obtiene como en la demostración del teorema 10. Cuando f tiene período α se cumple que

$$\gamma(f) = \sum_{j=0}^{\alpha-1} \gamma(f(j)v_{\alpha j}) = \sum_{j=0}^{\alpha-1} \gamma_j^\alpha \cdot f(j)$$

Sea ahora $f \in lp(E)$ arbitraria. El teorema 1 nos dice que $f = \lim\limits_{\alpha} F_\alpha$, siendo F_α la sucesión de período α tal que $F_\alpha(j) = f(j)$ para $0 \leqslant j \leqslant \alpha - 1$. Puesto que γ es continua se tiene:

$$\gamma(f) = \lim_{\alpha} \gamma(F_\alpha) = \lim_{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \gamma_j^\alpha \cdot F_\alpha(j) =$$

$$= \lim_{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \gamma_j^\alpha \cdot f(j)$$

Llegamos así a la expresión del isomorfismo recíproco, lo que concluye la demostración.

La definición de una aplicación lineal de $p(E)$ en F equivale, según los teoremas 8 y 10, a la definición de la correspondiente medida de *ma* o de la correspondiente matriz de Γ, que aparecen como dificultosas debido a la relación de compatibilidad *a*); por ejemplo, una vez construídas las cinco primeras filas de una matriz de Γ, deben tenerse en cuenta en la construcción de la sexta sus relaciones con la segunda y tercera, lo que hace que dicha construcción parezca farragosa. Incluso puede plantearse la duda de que pueda hacerse; esto es, en términos generales, plantearse la cuestión de si existe una matriz de Γ que tiene por filas 1, 2, ..., n, unas determinadas que cumplen entre sí las relaciones de compatibilidad. Veremos más tarde que la respuesta es afirmativa.

Un método para reducir la complicación del problema de definir una matriz de Γ consiste en construir las filas 1, 2, 6, ..., n!, ... de la matriz, lo que puede hacerse prescindiendo de las demás y teniendo sólo en cuenta las relaciones entre ellas, que además pueden reducirse a las de cada una con la siguiente. Posteriormente pueden construírse las restantes filas a partir de éstas, que las determinan completamente a través de las relaciones de compatibilidad.

Antes de enunciar el teorema siguiente, que precisa y justifica el método, definimos Ω como el espacio vectorial de las matrices $(\sigma^\nu{}_j)_{\nu \in Z^+,\ j \in N}$ de elementos de $l(E, F)$ sujetas a las condiciones siguientes:

a') $\sigma_j^{\nu} = \sum_{s=0}^{\nu} \sigma_{j+s\nu!}^{\nu+1}$ para $0 \leqslant j \leqslant \nu! - 1$

b') $\sigma_j^{\nu} = 0$ para $j \geqslant \nu!$

Cuando E y F son espacios vectoriales topológicos llamamos Ω_b al subespacio de Ω formado por las matrices (σ_j^{ν}) de Ω que verifican la condición siguiente: para cada entorno U de 0 en F existe un entorno V de 0 en E tal que $\sum_{j=0}^{\nu!-1} \sigma_j^{\nu} \cdot V \subset U$ para todo $\nu \in Z^+$. Es claro que esta condición implica que cada σ_j^{ν} es continua, de modo que cada matriz de Ω_b está formada por elementos de $\mathcal{L}(E, F)$.

Como veremos enseguida, cada matriz de Ω se obtiene de una matriz de Γ –y sólo de una– eliminando las filas cuyo número de orden no es un factorial. La misma relación existe entre las matrices de Ω_b y las de Γ_b.

Teorema 12.– *$l(p(E), F)$ es isomorfo a Ω. La relación entre los elementos γ y (σ_j^{ν}) que se corresponden en el isomorfismo está expresada por*

$$\gamma(f) = \sum_{j=0}^{\nu!-1} \sigma_j^{\nu} \cdot f(j) \text{ para } f \text{ de período } \nu!$$

$$\sigma_j^{\nu}(a) = \gamma(av_{\nu!,j}) \text{ para } \nu \in Z^+, j \in N, 0 \leqslant j \leqslant \nu! - 1, a \in E$$

Demostración: Probaremos que la aplicación ψ: $\Gamma \to \Omega$ dada por $\psi((\gamma_j^{\nu})) = (\gamma_j^{\nu!})$ para toda $(\gamma_j^{\nu}) \in \Gamma$ es un isomorfismo. Nuestro teorema resulta entonces inmediatamente del teorema 10 por composición de isomorfismos. Vale la pena resaltar aquí que γ está bien definida en el enunciado, pues toda sucesión periódica tiene un periodo de la forma $\nu!$.

Es muy sencillo verificar que $(\sigma_j^{\nu}) = (\gamma_j^{\nu!})$ pertenece efectivamente a Ω, pues la condición a') es la relación de compatibilidad a) particularizada para las filas $\nu!$ y $(\nu + 1)! = (\nu + 1) \cdot \nu!$. Es asimismo sencillo ver que ψ es lineal. Para ver que es sobreyectiva hemos de probar que si (σ_j^{ν}) verifica a') y b') existe $(\gamma_j^{\nu}) \in \Gamma$ tal que $\gamma_j^{\nu!} = \sigma_j^{\nu}$ para cualesquiera $\nu \in Z^+, j \in N$ con $0 \leqslant j \leqslant \nu! - 1$. En los razonamientos que siguen usaremos la notación $\nu R(m\nu)$ para expresar que los elementos de la fila ν y los de la fila $m\nu$ de la matriz (γ_j^{ν}) de elementos de $l(E, F)$ cumplen las relaciones de compatibilidad. Puesto que

$$\{s + tm\colon 0 \leqslant s \leqslant m - 1,\ 0 \leqslant t \leqslant n - 1\} = \{0, 1, \ldots, nm - 1\},$$

para cualesquiera m, n, $\nu \in Z^{+}$, $j \in N$, con $0 \leqslant j \leqslant \nu - 1$, se verifica la siguiente identidad:

$$\sum_{s=0}^{m-1} \sum_{t=0}^{n-1} \gamma_{j+s\nu+tm\nu}^{nm\nu} = \sum_{r=0}^{nm-1} \gamma_{j+r\nu}^{nm\nu}$$

De ella se deduce mediante breves cálculos que

$$\nu R(m\nu),\ (m\nu)R(nm\nu) \Rightarrow \nu R(nm\nu) \qquad (*)$$

$$\nu R(nm\nu),\ (m\nu)R(nm\nu) \Rightarrow \nu R(m\nu) \qquad (**)$$

Ahora definimos $\gamma_j^{\nu!} = \sigma_j^{\nu}$ para todo $\nu \in Z^{+}$ y $j \in N$. Si τ no es un factorial definimos los γ_j^{τ} de forma que $\tau\ R\ \tau!$, es decir, a través de la relación de compatibilidad a) con los $\gamma_j^{\tau!}$ y haciendo $\gamma_j^{\tau} = 0$ para $j \geqslant \tau$. Sean τ_1, $\tau_2 \in Z^{+}$ y $\tau_2 = \dot{\tau}_1$. Cuando τ_1, τ_2 son factoriales, de la relación $\nu!\ R\ (\nu + 1)!$ se deduce por inducción y por la transitividad expresada en (*) que $\tau_1\ R\ \tau_2$. En el caso general es claro que $\tau_1\ R\ \tau_1!$ y $\tau_2\ R\ \tau_2!$. Además $\tau_1!\ R\ \tau_2!$ por ser $\tau_1 < \tau_2$; luego $\tau_1\ R\ \tau_2!$ en virtud de (*). Aplicando (**) a ésta y a $\tau_2\ R\ \tau_2!$ se obtiene $\tau_1\ R\ \tau_2$. Por tanto $(\gamma_j^{\nu}) \in \Gamma$. Es obvio que $\psi((\gamma_j^{\nu})) = (\sigma_j^{\nu})$ y que (γ_j^{ν}) es el único original de (σ_j^{ν}) en la aplicación ψ, lo que concluye la demostración.

Analizando la relación entre los teoremas 8 y 9 y entre los 10 y 11 es lógico conjeturar que, cuando E y F son espacios vectoriales topológicos y F es completo, $\mathcal{L}(lp(E), F)$ está representado por Ω_b, tal y como confirma el siguiente enunciado.

Teorema 13.– *Sea F completo. $\mathcal{L}(lp(E), F)$ es isomorfo a Ω_b. La relación entre los elementos γ y (σ_j^{ν}) que se corresponden en el isomorfismo está expresada por*

$$\gamma(f) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{j=0}^{\nu!-1} \sigma_j^{\nu} \cdot f(j) \text{ para toda } f \in lp\,(E)$$

$\sigma_j^{\nu}(a) = \gamma(av_{\nu!,j})$ para $\nu \in Z^{+}, j \in N, 0 \leqslant j \leqslant \nu! - 1, a \in E$

Demostración: Probaremos que la restricción a Γ_b del isomorfismo ψ definido en la demostración del teorema anterior es un isomorfismo de Γ_b sobre Ω_b. Sea $(\gamma_j^{\nu}) \in \Gamma$. Decir que $\psi\ ((\gamma_j^{\nu})) \in \Omega_b$ equivale a decir que, dado un entorno U de 0 en F existe un entorno V de 0 en E tal que

$$\sum_{j=0}^{\nu!-1} \gamma_j^{\nu!} \cdot V \subset U$$

para todo $\nu \in Z^+$. Obviamente esta condición se cumple siempre que $(\gamma_j^\nu) \in \Gamma_b$. Recíprocamente, supongamos que la condición se cumple y que $\alpha \in Z^+$. De la relación de compatibilidad *a*) se deduce que

$$\gamma_k^\alpha \cdot V \subset \sum_{s=0}^{r-1} \gamma_{k+s\alpha}^{r\alpha} \cdot V$$

para todo $r \in Z^+$, $k \in N$, $0 \leqslant k \leqslant \alpha - 1$. Haciendo $r = (\alpha - 1)!$, de modo que $r\alpha = \alpha!$, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{\alpha-1} \gamma_k^\alpha \cdot V \subset \sum_{j=0}^{r\alpha-1} \gamma_j^{r\alpha} \cdot V \subset U$$

ya que

$$\{k + s\alpha\colon 0 \leqslant s \leqslant r-1, 0 \leqslant k \leqslant \alpha - 1\} = \{0, 1, ..., r\alpha - 1\}.$$

Por tanto, $\psi((\gamma_j^\nu)) \in \Omega_b$ si y sólo si $(\gamma_j^\nu) \in \Gamma_b$, lo que prueba que la restricción de ψ a Γ_b es un isomorfismo de este espacio sobre Ω_b. Componiéndolo con el definido en el teorema 11 entre $\mathcal{L}(lp(E), F)$ y Γ_b obtenemos el isomorfismo buscado de $\mathcal{L}(lp(E), F)$ sobre Ω_b. La expresión de éste que se da en el enunciado se deduce como en el teorema 12. En cuanto a la expresión del isomorfismo recíproco, resulta también de la dada en el teorema 12, teniendo en cuenta que, de acuerdo con las consideraciones hechas al final del apartado 1,

$$\lim_\alpha \sum_{j=0}^{\alpha-1} \gamma_j^\alpha \cdot f(j) = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{j=0}^{\nu!-1} \gamma_j^{\nu!} \cdot f(j)$$

siempre que el primer límite exista.

El teorema 12 resuelve el problema de construir elementos de $l(p(E), F)$ —o, equivalentemente, elementos de *ma*–, supuesto que se tiene definido al menos un elemento de $l(E, F)$. Sin embargo, no resuelve problemas más complicados, como el que hemos enunciado anteriormente: Construir, si ello es posible, una matriz $(\gamma_j^\nu) \in \Gamma$ —o una medida $\mu \in ma$–, dadas γ_j^ν —o $\mu(E_{\nu j})$-para $\nu = 1, 2, ..., n$ y $j = 0, 1, ..., \nu - 1$. En otros términos, se trata de definir una aplicación lineal γ de $p(E)$ en F conociendo las imágenes de $av_{\nu j}$, $\nu = 1, 2, ..., n$, $j = 0, 1, ..., \nu - 1$, $a \in E$; es decir, conociendo las imágenes de las sucesiones de período menor o igual que ν, y por tanto de todas sus combinaciones lineales. La resolución directa de este problema es farragosa debido a la maraña de relaciones que se deben respetar en la construcción de γ_j^m, una vez conocidas las filas anteriores de la matriz, cuando m tiene varios divisores primos. Es sencillo, en cambio, resolverlo desde un enfoque diferente, que además tiene por sí mismo un gran interés.

En lo que sigue suponemos $K = C$, salvo indicación expresa en sentido contrario, y llamamos P al conjunto de números racionales del intervalo $[0, 1)$. Para cada $\alpha \in P$ sea e_α la sucesión de $p(C)$ definida por

$$e_\alpha(n) = e^{-2\pi i\alpha n} \text{ para todo } n \in Z$$

Si $\alpha = j/\nu$, en lugar de e_α escribiremos con frecuencia $e_{j/\nu}$, notación que tiene la ventaja de destacar que $e_{rj/r\nu} = e_{j/\nu}$ para cualquier $r \in Z^+$.

El siguiente resultado se encuentra demostrado en el capítulo III de (Moral, 1981), excepto la última fórmula, que resulta de sustituir la expresión de $v_{\nu k}$ en la igualdad

$$f = \sum_{k=0}^{\nu-1} f(k) v_{\nu k}.$$

Teorema 14.—$\mathfrak{U} = \{e_\alpha : \alpha \in P\}$ *es una base algebraica de* $p(C)$. *Para cualesquiera* $\nu \in Z^+$, j, $k \in N$, $0 \leqslant j$, $k \leqslant \nu - 1$, *se verifica:*

$$e_{j/\nu} = \sum_{k=0}^{\nu-1} e_{j/\nu}(k) v_{j/\nu}, \quad v_{\nu k} = \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{\nu-1} e_{j/\nu}(-k) e_{j/\nu}$$

y, si f tiene período ν,

$$f = \sum_{j=0}^{\nu-1} \left\{ \frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} e_{j/\nu}(-k) f(k) \right\} e_{j/\nu}$$

Llamemos G al espacio vectorial de las aplicaciones de P en $l(E, F)$. Cada elemento de G puede considerarse como una familia $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in P}$ de aplicaciones lineales γ_α de E en F.

Teorema 15.— $l(p(E), F)$ *es isomorfo a* G. *La relación entre los elementos* γ *y* $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in P}$ *que se corresponden en el isomorfismo está expresada por*

$$\gamma(f) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} e_{j/\nu}(-k)\gamma_{j/\nu} \cdot f(k) \; para\, f\, de\, período\, \nu$$

$$\gamma_\alpha(a) = \gamma(a e_\alpha) \; para \;\; \alpha \in P, \; a \in E$$

Demostración: Para cada $\gamma \in l(p(E), F)$ sea $\Lambda(\gamma) = (\gamma_\alpha)_{\alpha \in P}$, donde para cada $\alpha \in P$ $\gamma_\alpha(a) = \gamma(ae_\alpha)$ para todo $a \in E$. Es claro que cada γ_α es lineal y que Λ es una aplicación lineal de $l(p(E), F)$ en G. Si $\Lambda(\gamma) = 0$ y f tiene período ν

$$\gamma(f) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} e_{j/\nu}(-k)\gamma(f(k)e_{j/\nu}) = 0$$

en virtud de la última parte del teorema anterior y de que $\gamma(f(k)e_{j/\nu}) =$ $= \gamma_{j/\nu}(f(k)) = 0$ para $j, k \in N$, $0 \leqslant j, k \leqslant \nu - 1$. Por tanto, Λ es inyectiva. Para ver que es sobreyectiva, dada $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in P}$ definamos γ por la primera de las fórmulas del enunciado; en virtud de la linealidad de las γ_α esto equivale a definir

$$\gamma(f) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{\nu} \gamma_{j/\nu} \left(\sum_{k=0}^{\nu-1} e_{j/\nu} (-k) f(k) \right)$$

para f de período ν. Para probar que γ está bien definida basta demostrar que, si $\nu \in Z^+$ es un período de f y $r \in Z^+$, el segundo miembro de la expresión anterior es igual a

$$\sum_{h=0}^{r\nu-1} \frac{1}{r\nu} \gamma_{h/r\nu} \left\{ \sum_{m=0}^{r\nu-1} e_{h/r\nu} (-m) f(m) \right\} \qquad (*)$$

y tener en cuenta que dos períodos de f tienen siempre un múltiplo común que también es período de f —o también, que el conjunto de períodos es el ideal de Z engendrado por el mínimo de ellos—. El término entre llaves de (*) es igual a

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}\sum_{s=0}^{r-1} e_{h/r\nu}(-k-s\nu)f(k+s\nu) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu-1} e_{h/r\nu}(-k)\left[\sum_{s=0}^{r-1} e_{h/r}(-s)\right]f(k)$$

y el término entre corchetes vale r si $h = jr$, $0 \leqslant j \leqslant \nu - 1$, y 0 en caso contrario; luego (*) resulta ser igual a

$$\sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{r\nu} \gamma_{jr/r\nu}(\sum_{k=0}^{\nu-1} e_{jr/r\nu}(-k)rf(k)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{\nu}\gamma_{j/\nu}(\sum_{k=0}^{\nu-1} e_{j/\nu}(-k)f(k))$$

Además $\gamma \in l(p(E), F)$, como puede deducirse de que dos sucesiones de $p(E)$ tienen siempre un período común. Finalmente, para cualesquiera $h/\nu = \alpha \in P$ y $a \in E$,

$$\gamma(ae_{h/\nu}) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} e_{j/\nu}(-k)\gamma_{j/\nu}(e_{h/\nu}(k)a) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{\nu}\left[\sum_{k=0}^{\nu-1} e_{k/\nu}(-j+h)\right]\gamma_{j/\nu}(a)$$

El término entre corchetes vale ν si $j = h$ y 0 si $j \neq h$, por lo que $\gamma(ae_\alpha) = = \gamma(ae_{h/\nu}) = \gamma_{h/\nu}(a) = \gamma_\alpha(a)$ para todo $a \in E$ y $\alpha \in P$. Es decir, $\Lambda(\gamma) = = (\gamma_\alpha)_{\alpha\in P}$, lo que prueba que Λ es sobreyectiva y concluye la demostración.

Las dos primeras igualdades del teorema 14 siguen siendo válidas si se reemplazan $e_{j/\nu}$ y $v_{\nu k}$ por $ae_{j/\nu}$ y $av_{\nu k}$, respectivamente, siendo $a \in E$. De ello se deduce que si $\gamma \in l(p(E), F)$,

$$\gamma(ae_{j/\nu}) = \sum_{k=0}^{\nu-1} e_{j/\nu}(k)\gamma(av_{\nu k})$$

$$\gamma(av_{\nu k}) = \frac{1}{\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1} e_{j/\nu}(-k)\gamma(ae_{j/\nu})$$

Si (γ_j^ν) y $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in P}$ son, respectivamente, los elementos de Γ y G que corresponden a γ en los isomorfismos definidos en los teoremas 10 y 15, es $\gamma_{j/\nu}(a) = \gamma(ae_{j/\nu})$ y $\gamma_k^\nu(a) = \gamma(av_{\nu k})$ para todo $a \in E$. Por tanto, se cumple que

$$\gamma_{j/\nu} = \sum_{k=0}^{\nu-1} e_{j/\nu}(k)\gamma_k^\nu$$

$$\gamma_k^\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1} e_{j/\nu}(-k)\gamma_{j/\nu}$$

para cualesquiera $\nu \in Z^+$, $0 \leqslant j,\ k \leqslant \nu - 1$. Es claro que estas igualdades definen un isomorfismo entre Γ y G –lo que por otra parte se puede probar directamente sin dificultad– . Obtenemos así el siguiente procedimiento para construir una matriz $(\gamma_k^\nu) \in \Gamma$ cuyas n primeras filas –sujetas a las condiciones de compatibilidad entre ellas– sean dadas: calculamos con la primera fórmula las $\gamma_{j/\nu}$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant \nu - 1$, y añadimos después arbitrariamente las demás componentes de $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in P}$. A través de la segunda fórmula se calculan después todas las γ_k^ν; se comprende fácilmente que $\gamma_0^1, \gamma_0^2, \gamma_1^2, \ldots, \gamma_0^n, \ldots, \gamma_{n-1}^n$ coincidirán con los valores de partida. Tenemos así resuelto con sencillez el problema que hemos planteado y comentado anteriormente.

Por supuesto, el teorema 15 permite también construir, conociendo al menos un elemento de $l(E, F)$, un gran número de elementos de $l(p(E), F)$, pues cada aplicación $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in P}$ de P en $l(E, F)$ define uno a través de la primera de las fórmulas del enunciado.

En el isomorfismo definido entre Γ y G el espacio Γ_b es isomorfo, según las fórmulas anteriores, al subespacio G_b de G formado por los $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in P}$ que verifican la siguiente condición: para cada entorno U de 0 en F existe un entorno V de 0 en E tal que, para todo $\nu \in Z^+$,

$$\sum_{k=0}^{\nu-1}\left[\frac{1}{\nu}\sum_{j=0}^{\nu-1} e_{j/\nu}(-k)\gamma_{j/\nu}\right]\cdot V \subset U$$

Usando el teorema 11 y componiendo isomorfismos podemos, pues, establecer –cuando F es completo– un isomorfismo entre $\mathcal{L}(lp(E), F)$ y G_b, cuya relación con el definido en el teorema 15 es la misma que existe entre los de los teoremas 10 y 11.

Teorema 16.– *Sea F completo. $\mathcal{L}$ $(lp(E), F)$ es isomorfo a G_b. La relación entre los elementos γ y $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in P}$ que se corresponden en el isomorfismo está expresada por*

$$\gamma(f) = \lim_{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} e_{j/\alpha}(-k)\gamma_{j/\alpha} \cdot f(k)$$

para toda $f \in lp(E)$, y

$$\gamma_{j/\alpha}(a) = \sum_{k=0}^{\alpha-1} e_{j/\alpha}(k)\gamma(av_{\alpha k})$$

para $\alpha \in Z^{+}$, $0 \leqslant j \leqslant \alpha - 1$, $a \in E$.

5. *Operadores de* $lp(E)$ *en* $lp(F)$ *que conmutan con la traslación.* Sean E, F espacios vectoriales sobre $K(C$ o $R)$, y $\lambda(E)$, $\chi(F)$ subespacios vectoriales de $\omega(E)$, $\omega(F)$ respectivamente, invariantes por traslaciones en el sentido estricto que se ha definido en el apartado 1. Llamamos $Ti(\lambda(E), \chi(F))$ al espacio vectorial formado por los operadores lineales L de $\lambda(E)$ en $\chi(F)$ que conmutan con la traslación, es decir, tales que $TL = LT$ –y por tanto $LT^n = T^n L$ para todo entero n–. Es de notar que usamos la misma letra T para designar el operador traslación sobre distintos espacios.

Para cada $L \in Ti(\lambda(E), \omega(F))$ sea $\gamma_L \in l(\lambda(E), F)$ la aplicación dada por $\gamma_L(f) = (Lf)(0)$ para toda $f \in \lambda(E)$. Para todo $n \in Z$ se tiene:

$$(Lf)(n) = (T^{-n}Lf)(0) = (LT^{-n}f)(0) = \gamma_L(T^{-n}f)$$

De aquí se deduce que la aplicación lineal $\psi\colon L \to \gamma_L$ es inyectiva. Además, para cada $\gamma \in l(\lambda(E)\ .\ F)$ el operador lineal L tal que $(Lf)(n) = \gamma(T^{-n}f)$ para toda $f \in \lambda(E)$ y todo $n \in Z$ conmuta con las traslaciones y verifica $\psi(L) = \gamma$. Hemos obtenido así el siguiente resultado:

Teorema 17.– *Sea* $\lambda(E)$ *un subespacio vectorial de* $\omega(E)$ *invariante por traslaciones.* $Ti(\lambda(E), \omega(F))$ *es isomorfo a* $l(\lambda(E), F)$. *La relación entre los elementos* L *y* γ_L *que se corresponden en el isomorfismo está expresada por*

$$\gamma_L(f) = (Lf)(0), (Lf)(n) = \gamma_L(T^{-n}f)$$

para cualesquiera $f \in \lambda(E)$ *y* $n \in Z$.

Cuando $\lambda(E)$ y $\chi(F)$ son espacios vectoriales topológicos, llamamos $TI(\lambda(E), \chi(F))$ al espacio vectorial formado por aquellos operadores de $Ti(\lambda(E), \chi(F))$ que son continuos. Supongamos que T es un homeomorfismo de $\lambda(E)$ sobre $\lambda(E)$ y sea π_n, para cada $n \in Z$, la proyección n–ésima de $\omega(F)$ sobre F, dada por $\pi_n(f) = f(n)$ para toda $f \in \omega(F)$. Puesto que la topología de $\omega(F)$ es la inicial para la colección $\{\pi_n : n \in Z\}$ y $\pi_n L = \gamma_L T^{-n}$, una condición necesaria y suficiente para que L sea contínuo es que $\gamma_L\ T^{-n}$ sea un operador contínuo de $\lambda(E)$ en F para todo $n \in Z$, lo que se verifica si y sólo si γ_L es continua, es decir, si y sólo si $\gamma_L \in \mathcal{L}(\lambda(E), F)$. Hemos obtenido así la primera parte del resultado que sigue; *a*), *b*) y *c*) pueden verse demostradas en (Moral 1982).

Teorema 18. *Sean $\lambda(E)$, F espacios vectoriales topológicos, el primero de ellos subespacio vectorial de $\omega(E)$ y tal que T es un isomorfismo topológico de $\lambda(E)$ sobre $\lambda(E)$. Entonces $TI(\lambda(E), \omega(F))$ es isomorfo a $\mathcal{L}(\lambda(E), F)$ y se cumple que:*

a) *Si $\{T^n\colon n \in Z\}$ es una familia equicontinua de aplicaciones de $\lambda(E)$ sobre $\lambda(E)$, entonces $Lf \in l^\infty(F)$ para todo $L \in TI(\lambda(E), \omega(F))$ y toda $f \in \lambda(E)$;*

b) *Si $\lambda(E)$ y F son F–espacios y T una isometría de $\lambda(E)$ sobre $\lambda(E)$, entonces $TI(\lambda(E), \omega(F)) = TI(\lambda(E), l^\infty(F))$;*

c) *Si además $\lambda(E)$ y F son espacios de Banach, entonces $TI(\lambda(E), l^\infty(F))$ es congruente con $\mathcal{L}(\lambda(E), F)$, dotando a $l^\infty(F)$ de la norma del supremo.*

Obsérvese que, para el caso en que E es un espacio vectorial topológico, no se hace ninguna hipótesis sobre la relación de la topología de $\lambda(E)$ con la de $\omega(E)$. Por otra parte, puede demostrarse que un espacio vectorial topológico F es un F–espacio o un espacio de Banach si y sólo si $l^\infty(F)$ es un F–espacio o un espacio de Banach, respectivamente. En efecto, si $\bar{d}$ es una métrica compatible con la topología de $l^\infty(F)$ y v es la sucesión constante unidad, la métrica d definida por

$$\forall a, b \in F \qquad d(a, b) = \bar{d}(av, bv)$$

es compatible con la topología original de F, pues el entorno $a + U$ de $a \in F$ contiene la bola $B_d(a, \rho)$ si el entorno $av + W_U$ de $av \in l^\infty(f)$ contiene la bola $B_{\bar{d}}(av, \rho)$; y recíprocamente $B_d(a, \rho)$ contiene a $a + U$ si $B_d(av, \rho)$ contiene a $av + W_U$. Si $\bar{d}$ procede de una norma, d también procede de una norma.

Recíprocamente, si F es un F–espacio y d una métrica invariante y acotada sobre F, la métrica d definida por

$$\forall f, g \in l^\infty(F) \quad \bar{d}(f, g) = \sup_{k \in Z} d(f(k), g(k))$$

induce sobre $l^\infty(F)$ la topología original de este espacio. Cuando F es normado basta definir

$$\forall f \in l^\infty(F) \qquad \|f\|_\infty = \sup_{k \in Z} \|f(k)\|$$

para tener una norma sobre $l^\infty(F)$. El argumento es análogo al expuesto anteriormente: $B_{\overline{d}}(f, \rho)$ contiene a $f + W_U$ si $B_d\,(0, \rho/2)$ contiene a U, y $f + W_U$ contiene a $B_{\overline{d}}(f, \rho)$ si U contiene a $B_d\,(0, \rho)$. La equivalencia entre la completitud de F y la de $l^\infty(F)$ ya ha sido comentada al principio de [3].

Es claro que $p(E)$ es invariante por traslaciones, por lo que el teorema 17 es aplicable con $\lambda(E) = p(E)$. Además, si $L \in Ti(p(E), \omega(F))$ y f tiene período ν se cumple que $T^\nu(Lf) = L(T^\nu f) = Lf$; es decir, $Lf \in p(F)$. Por tanto, $Ti(p(E), \omega(F)) = Ti(p(E), p(F))$. Por otra parte, si llamamos $\tilde{f}$ a la sucesión simétrica de f, cuya n–ésima coordenada es $\tilde{f}(n) = f(-n)$, es claro que $f \to \tilde{f}$ es un isomorfismo de $p(E)$ sobre sí mismo, por lo que las fórmulas del teorema 17 pueden sustituírse en este caso por $\gamma_L(f) = (L\tilde{f})\,(0)$, $(Lf)\,(n) = \gamma_L\,(T^n\tilde{f})$. Componiendo el isomorfismo definido por estas fórmulas con los de los teoremas 8, 10, 12 y 15, se tiene:

Teorema 19.– *$Ti(p(E), p(F))$ es isomorfo a cada uno de los espacios ma, Γ y Ω. Cuando $K = C$, $Ti(p(E), p(F))$ es isomorfo además a G. La relación entre los elementos L, μ, (γ_j^ν), (σ_j^ν) y (γ_α) que se corresponden en los isomorfismos está expresada, para toda $f \in p(E)$ de período ν y todo $n \in Z$, por*

$$(Lf)(n) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \mu(E_{\nu k}) \cdot f(n-k) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \gamma_k^\nu \cdot f(n-k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu!-1} \sigma_k^\nu \cdot f(n-k) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} e_{j/\nu}\,(-k)\,\gamma_{j/\nu} \cdot f(n-k)$$

y también, para todo $a \in E$ y cualesquiera $\nu, k, j \in Z^+$ tales que $0 \leqslant k \leqslant \nu-1$, $0 \leqslant j \leqslant \nu!-1$, por

$$\mu(E_{\nu k}) \cdot a = \gamma_k^\nu\,(a) = (L(a\tilde{v}_{\nu k}))(0)$$

$$\sigma_j^\nu\,(a) = (L(a\tilde{v}_{\nu!,\,j}))(0),\ \gamma_{k/\nu}(a) = (L(a\tilde{e}_{k/\nu}))(0)$$

Se puede aplicar la parte inicial del teorema 18 a $\lambda(E) = lp(E)$, ya que T es un isomorfismo topológico de $l^\infty(E)$ sobre $l^\infty(E)$ y Tf, $T^{-1}f$ pertenecen obviamente a $lp(E)$ si $f \in lp(E)$. También se puede aplicar la parte *a*), puesto que la familia de aplicaciones $\{T^n : n \in Z\}$ es equicontínua sobre $lp(E)$, pero su conclusión puede mejorarse, e incluso obtener un resultado más fuerte que el de *b*) sin la exigencia de que $lp(E)$ o F sean F–espacios. En efecto, sean $L \in TI(lp(E), \omega(F))$, $f \in lp(E)$ y U un entorno de 0 en F. Puesto que γ_L es contínua, existe un entorno V de 0 en E tal que $(Lg)(0) \in U$ si $g \in lp(E) \cap$ $\cap\, W_V$. Sea $\tau \in Z^+$ tal que $T^{-k}f - T^{-j}f \in W_V$ si $k - j = \dot{\tau}$. Entonces:

$$(Lf)(k) - (Lf)(j) = (L(T^{-k}f - T^{-j}f))(0) \in U$$

lo que prueba que $Lf \in lp(F)$. Por otra parte $T^{-n}g \in lp(E) \cap W_V$ para cualquier n siempre que $g \in lp(E) \cap W_V$, y entonces $(Lg)(n) = (L\, T^{-n}g)(0) \in U$ para todo $n \in Z$, es decir, $Lg \in W_U$. Por tanto, L es contínuo de $lp(E)$ a $lp(F)$, y hemos obtenido que $TI(lp(E), \omega(F)) = TI(lp(E), lp(F))$.

De lo anterior y de que $f \to \widetilde{f}$ es un isomorfismo topológico de $lp(E)$ sobre $lp(E)$ se deduce que un isomorfismo entre $TI(lp(E), lp(F))$ y $\mathcal{L}(lp(E), F)$ viene dado por las fórmulas $\gamma_L\ (f) = (L\widetilde{f})(0)$, $(Lf)(n) = \gamma_L\,(T^n\widetilde{f})$. Componiéndolo con los de los teoremas 9, 11, 13 y 16 se obtiene el resultado que sigue.

Teorema 20.– *Sea F completo. $TI(lp(E), lp(F))$ es isomorfo a cada uno de los espacios bv, Γ_b y Ω_b. Cuando $K = C$, $TI(lp(E), lp(F))$ es isomorfo además a G_b. La relación entre los elementos L, μ, (γ_j^ν), (σ_j^ν) y (γ_α) que se corresponden en los isomorfismos está expresada, para toda $f \in lp(E)$ y todo $n \in Z$, por*

$$(Lf)(n) = \int T^n\widetilde{f}\,d\mu = \lim_{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} \gamma_k^\alpha \cdot f(n-k) =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \sum_{j=0}^{\nu!-1} \sigma_j^\nu \cdot f(n-j) = \lim_{\alpha\to\infty} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{1}{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha-1} e_{j/\alpha}(-k)\,\gamma_{j/\alpha} \cdot f(n-k)$$

y también por el segundo grupo de fórmulas del teorema 19.

Para cada $f \in lp(E)$ la convergencia de la red $S_\Pi\,(T^nf)$ a $\int T^nf\,d\mu$ es uniforme en $n \in Z$, independientemente de cuál sea la elección de los $r_i \in A_i$ para cada partición $\Pi = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$. Esto puede demostrarse generalizando a espacios vectoriales topológicos E y F arbitrarios el razonamiento de la proposición (16), cap. III, de (Moral 1981) para $E = F = K$, que prueba que $F_\Pi\,(n) = S_\Pi\,(T^nf)$ es de Cauchy uniformemente en $n \in Z$, es decir, que $\{F_\Pi\} \subset l^\infty(F)$ es de Cauchy en este espacio, y por tanto converge en él a la sucesión G cuya coordenada n–ésima es $G(n) = \int T^nf\,d\mu$.

Otra demostración se obtiene repitiendo la del teorema 5 de este trabajo para $R = R(S)$, sustituyendo f y g por T^nf y T^ng respectivamente y observando que

$$S_\Pi\,(T^ng) = \int T^ng\,d\mu$$

para todo $n \in Z$ si g tiene período ν y $\Pi \geqslant \{E_{\nu j}\}_{0 \leqslant j \leqslant \nu-1}$.

Finalmente, una tercera vía para probar nuestra afirmación es la siguiente: Fijado $U \in B_F(0)$, sea $V \in B_E(0)$ tal que $\int g\,d\mu \in U$ si $g \in W_V \cap lp(E)$, y $\tau \in Z^+$ tal que

$$k_1 - k_2 = \dot{\tau} \;\Rightarrow\; \forall n \in Z \quad (T^n f)(k_1) - (T^n f)(k_2) \in V$$

Sea $\Pi_0 = \{E_{\tau e}\}_{0 \leqslant e \leqslant \tau - 1}$, $\Pi = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ una partición más fina que Π_0 y $r_i \in A_i$ para $1 \leqslant i \leqslant p$. Para cada $m \in Z$ existe un único A_i tal que $m \in A_i$; el correspondiente r_i y m pertenecen al mismo $E_{\tau e}$, y por tanto $m - r_i = \dot{\tau}$. Luego, para todo $n \in Z$,

$$\left[T^n f - \sum_{i=1}^{p} (T^n f)(r_i)\chi_{A_i}\right](m) = (T^n f)(m) - (T^n f)(r_i) \in V$$

Por consiguiente, la sucesión entre corchetes pertenece a $W_V \cap lp(E)$; puesto que $\int (T^n f)(r_i)\chi_{A_i} d\mu = \mu(A_i) \cdot (T^n f)(r_i)$, esto implica que

$$\int T^n f\,d\mu - \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) \cdot (T^n f)(r_i) \in U$$

para todo $n \in Z$ siempre que $\Pi \geqslant \Pi_0$, lo que concluye la demostración.

De acuerdo con los razonamientos del comienzo del apartado 4, la colección $\{\Pi_\alpha : \alpha \in Z^+\}$ de particiones de Z, donde $\Pi_\alpha = \{E_{\alpha j} : 0 \leqslant j \leqslant \alpha - 1\}$, es cofinal en la colección ordenada $(P, \leqslant)$ de las particiones de Z por conjuntos de $R(S)$. Además, $\Pi_\alpha \leqslant \Pi_\beta$ si y sólo si $\beta = \dot{\alpha}$, lo que significa que $(\{\Pi_\alpha\}, \leqslant)$ y $D = (Z^+, \leqslant)$ son orden–isomorfos. La subcolección $\{\Pi_{\nu !} : \nu \in Z^+\}$ es cofinal en la anterior y orden–isomorfa a Z^+ dotado de su orden habitual: $\Pi_{\nu !} \leqslant \Pi_{\tau !}$ si y sólo si $\nu \leqslant \tau$. Por tanto, si una red $\{x_\Pi : \Pi \in P\}$ de un espacio vectorial topológico X converge a $x \in X$ se cumple que

$$x = \lim_{\alpha} x_{\Pi(\alpha)} = \lim_{\nu \to \infty} x_{\Pi(\nu !)}$$

Antes de aplicar lo anterior a $X = l^\infty(F)$ fijamos la siguiente notación: para cada $\zeta \in \mathcal{L}(E, F)$ y cada entero k llamamos $\zeta \circ T^k$ a la aplicación lineal de $lp(E)$ en $lp(F)$ que verifica $\Pi_n(\zeta \circ T^k) = \zeta \Pi_n T^k = \zeta \Pi_{n-k}$ para todo $n \in Z$ (usamos el símbolo Π_n tanto para la proyección n–ésima de $\omega(E)$ sobre E como para la de $\omega(F)$ sobre F). En otros términos, para toda $f \in lp(E)$ y todo $n \in Z$ es $(\zeta \circ T^k f)(n) = \zeta \circ f(n-k)$.

Fijada $f \in lp(E)$ sea $x_\Pi(n) = S_\Pi\ (T^n f)$; para $\Pi_\alpha = \Pi(\alpha)$ elegimos $r_j' = j \in E_{\alpha j}$. Obtenemos entonces:

$$\chi_\Pi (n) = \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) \cdot (T^n \widetilde{f})(r_i) = \sum_{i=1}^{p} (\mu(A_i) \circ T^{r_i} f)(n)$$

si $\Pi = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ y $r_i \in A_i$ para $1 \leqslant i \leqslant p$. Por tanto, si definimos la convolución de $f \in lp(E)$ con $\mu \in bv$ como $f * \mu = \lim_{\Pi} \chi_\Pi$, de modo que $(f * \mu)(n) = \int T^n \widetilde{f} d\mu$ para todo $n \in Z$, se cumple que

$$f * \mu = \lim_{\Pi} \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) \circ T^{r_i} f = \lim_{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \mu(E_{\alpha j}) \circ T^j f$$

en $l^\infty(F)$. Del teorema 20 resulta ahora el siguiente, con el que concluímos el presente trabajo:

Teorema 21. *Sea F completo y sea L un operador de $lp(E)$ en $l^\infty(F)$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $L \in TI(lp(E), lp(F))$.

b) Existe $\mu \in bv$ tal que $Lf = f * \mu$ para toda $f \in lp(E)$.

c) Existe $(\gamma_j^\nu) \in \Gamma_b$ tal que $L = \lim_{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \gamma_j^\alpha \circ T^j$ en la topología fuerte de operadores de $\mathcal{L}(lp(E), l^\infty(F))$.

d) Existe $(\sigma_j^\nu) \in \Omega_b$ tal que $L = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{j=0}^{\nu!-1} \sigma_j^\nu \circ T^j$ en la topología fuerte de operadores de $\mathcal{L}(lp(E), l^\infty F))$.

Obsérvese que en *c*) y *d*) L está expresado en función del operador traslación T. En particular, cuando $E = F = K$ cada operador lineal y continuo L de $lp(K)$ en $lp(K)$ que conmuta con la traslación puede expresarse (Moral 1981) como

$$L = \lim_{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \gamma_j^\alpha (1)\, T^j = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{j=0}^{\nu!-1} \sigma_j^\nu (1)\, T^j$$

ya que $\zeta \circ T^k = \zeta(1) T^k$ para todo $\zeta \in \mathcal{L}(E, F)$. Si únicamente es $E = K$, podemos escribir, con la notación que hemos venido usando:

$$Lf = \lim_{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \gamma_j^\alpha (1) T^j f = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{j=0}^{\nu!-1} \sigma_j^\nu (1) T^j f$$

para toda $f \in lp(K)$.

Para concluir, el autor desea expresar su reconocimiento al profesor Valdivia Ureña, director del trabajo (Moral 1982) a lo largo de cuya realización, con su estímulo e indicaciones, se han obtenido la mayoría de los resultados aquí expuestos.

BIBLIOGRAFIA

[1] MORAL MEDINA, J. M.: Conceptos fundamentales en el filtrado de señales discretas (tesis doctoral) (Barcelona, Universidad Politécnica) (1981).

[2] MORAL MEDINA, J. M.: Espacios de sucesiones periódicas con valores vectoriales y operadores que conmutan con la traslación (tesina) (Valencia, Facultad de Matemáticas) (1982).

[3] MORAL MEDINA, J. M.: Operadores sobre espacios de sucesiones infraperiódicas con valores vectoriales (I), esta revista (1985).

[4] NUÑEZ GIMENEZ, M.: Sucesiones y funciones periódicas con valores vectoriales (tesis doctoral) (Valladolid, Facultad de Matemáticas) (1980).

José Manuel Moral Medina
Escuela Técnica Superior de
Ingenieros Agrónomos. Madrid.