Funciones asociadas a un conjunto del plano complejo

Por Baltasar Rodriguez Salinas

Recibido: 7 de marzo de 1.986

Abstract

In this paper we shall study certain functions $\sigma_a(r)$, $\varphi_a(u)$ and $\psi_a(v)$, associated to a connected subset of the complex plane, which are interesting for getting bounds of the derivatives of a polynomial and also for the solution of the problem of equivalence of classes of functions with an asymptotic expansion, announced in [7].

En este trabajo vamos a estudiar ciertas funciones asociadas a un cojunto conexo del plano complejo que tienen interés para las acotaciones de polinomios y en la solución del problema de equivalencia de clases de funciones con desarrollo asintótico [7].

Sea C un conjunto conexo y acotado del plano complejo completado Z y que conste al menos de dos puntos. Entonces, si B es la componente de $Z - C$ que contiene el punto $z = \infty$ y $A = Z - B$, ambos conjuntos A y B son conexos y por el teorema de Riemann existe una aplicación conforme $z \to w(z)$ de B sobre $\{w: |w| < 1\}$ que se puede escribir en la forma

$$w(z) = z \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{z^\nu} \quad (c_0 > 0) \tag{0.1}$$

en un entorno de $z = \infty$.

A partir de esta función $w(z)$ definimos las funciones reales $w^*(z)$ y $\sigma_a(r)$ poniendo

$$w^*(z) = 1 \qquad \text{para } z \in A \tag{0.2.1}$$

y

$$w^*(z) = |w(z)| \qquad \text{para } z \in B, \tag{0.2.2}$$

y

$$\sigma_a(r) = \sup_\theta \log w^*(a + re^{i\theta}) \quad (\geqslant 0) \tag{0.3}$$

para $0 \leqslant r \leqslant +\infty$.

1. *Proposición.* w*(z) *y* σ_a(r) *son funciones contínuas (finitas o infinitas) en* Z *y* $[0, +\infty]$, *respectivamente.*

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la ayuda n° 0338/84 de la CAICYT.

Demostración. Como $w^*(z) = 1$ para $z \in A$ y, evidentemente, $w^*(z)$ es continua en B, para probar la continuidad de $w^*(z)$ basta tener presente que para $z_0 \in A \cap \overline{B}$ se tiene

$$\lim_{z \to z_0} w^*(z) = w^*(z_0) \, (= 1).$$

Entonces, (0.3) se puede escribir en la forma

$$\sigma_a(r) = \max_\theta \log w^*(a + re^{i\theta}) \, (\geqslant 0) \tag{1.1}$$

para $0 \leqslant r \leqslant +\infty$, se deduce la continuidad de $\sigma_a(r)$ observando que $w^*(z)$ es uniformemente continua en cada círculo $\{z\colon |z - a| \leqslant R\}$ y que

$$\lim_{r \to +\infty} \sigma_a(r) = \sigma_a(+\infty) \; (= +\infty).$$

2. *Proposición.* 1. $\sigma_a(\mathrm{r})$ *es una función convexa de* $\log \mathrm{r}$. 2. $\sigma_a(\mathrm{r})$ *es una función constante en* $[0, \rho_a]$ *y creciente en* $[\rho_a, +\infty]$, *siendo*

$$\rho_a = \rho(\mathrm{a}, \mathrm{B}) = \inf \{ |\mathrm{z} - \mathrm{a}| : \mathrm{z} \in \mathrm{B} \} \tag{2.1}$$

3. $\sigma_a(\mathrm{r}) - \log \mathrm{r}$ *es una función decreciente en* $[0, +\infty)$ *y*

$$\lim_{r \to +\infty} [\sigma_a(\mathrm{r}) - \log \mathrm{r}] = \log \mathrm{c}_0 \quad (\mathrm{c}_0 = \lim_{z \to \infty} \mathrm{w}(\mathrm{z})/\mathrm{z}).$$

Demostración. 1. Será suficiente probar que para $0 < r_1 < r < r_2 < +\infty$ se verifica

$$\sigma_a(r) \leqslant \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \sigma_a(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \sigma_a(r_2). \tag{2.3}$$

Desde luego esto es cierto si la circunferencia $\{z\colon |z - a| = r\}$ está conteda en A por ser $\sigma_a(r) = 0$ y $\sigma_a(r_k) = 0$ para $k = 1,2$.

Supongamos que $\{z\colon |z - a| = r\}$ no está contenida en A, entonces aplicando el teorema del máximo a la fución armónica

$$u(z) = \log |w(a + re^{i\theta})| - \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \sigma_a(r_1)$$

$$- \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \sigma_a(r_2) \;\; (z = a + re^{i\theta})$$

en el abierto

$$G = \{ z\colon r_1 < |z - a| < r_2, \; z \in B \},$$

resulta $u(z) \leqslant 0$ para $z \in G$ y, por consiguiente, (2.3) en virtud de(1.1), puesto que si z_0 es un punto de la frontera de G se tiene, evidentemente,

$$\lim_{z \to z_0} u(z) \leqslant 0$$

en ambos casos $z_0 = a + r_0 e^{i\theta_0} \in A$ y $z_0 = a + r_k e^{i\theta_0} \in \overline{B}$ $(k = 1,2)$.

2. La primera afirmación se deduce inmediatamente teniendo presente que $\sigma_a(r) = 0$ para $0 \leqslant r \leqslant \rho_a$ si $\rho_a > 0$.

Si $a \in B$ por el teorema del módulo máximo tendremos

$$|w(a)| < \max_\theta |w(a + re^{i\theta})|$$

para $0 < r \leqslant \rho(a, A)$ y, por consiguiente,

$$\sigma_a(0) < \sigma_a(r)$$

para $0 < r \leqslant \rho\ (a, A)$, de donde resulta, teniendo presente que $\sigma_a(r)$ es una función convexa de $\log r$, que $\sigma_a(r)$ es creciente en $[0, +\ \infty\ ] = [\rho_a, +\infty]$.

Si $a \in A$, por ser B un conjunto conexo, cada circunferencia $\{z: |z - a| = r\}$ de radio $r > \rho_a$ no está contenido en A. Por tanto,

$$\sigma_a(r) > \sigma_a(\rho_a) = 0$$

para $r > \rho_a$ y se deduce de igual modo que antes que $\sigma_a(r)$ es creciente en $[\rho_a, +\infty]$.

3. Evidentemente,

$$\lim_{r \to \infty} [\sigma_a(r) - \log r] = \lim_{z \to \infty} \log \left| \frac{w(z)}{z - a} \right| = \log c_0 .$$

Por tanto, como $\log c_0 < +\infty$ y $\sigma_a(r) - \log r$ es una función convexa de $\log r$, resulta que $\sigma_a(r) - \log r$ es decreciente en $(0, +\infty)$.

3. *Observación.* Si la corona $\{ z: r_1 < |z - a| < r_2\}$ está contenida en B, la desigualdad (2.3) se sigue del teorema de Hadamard de los tres círculos.

4. *Corolario. La función* $\sigma(\mathrm{r}) = \sigma_a(\mathrm{r})$ *tiene derivada a la izquierda* $\sigma^-(\mathrm{r})$ y a la derecha $\sigma^+(\mathrm{r})$ *en cada punto de* $(0, +\infty)$ *y se verifican además:*

1. $\mathrm{r}\,\sigma^-(\mathrm{r})$ *y* $\mathrm{r}\,\sigma^+(\mathrm{r})$ *son funciones no decrecientes en* $[0, +\infty)$, *y crecientes en* $[\rho_a, +\infty)$ *salvo en el caso de que* $\mathrm{B} = \{\mathrm{z}: |\mathrm{z} - \mathrm{a}| > \rho_a\}$.

2. $0 < \mathrm{r}\,\sigma^-(\mathrm{r}) \leqslant \mathrm{r}\,\sigma^+(\mathrm{r}) \leqslant 1$ *para* $\mathrm{r} \in (\rho_a, +\infty)$.

3. $\lim_{r \to 0} \mathrm{r}\,\sigma^-(\mathrm{r}) = 0$ *y* $\lim_{r \to \infty} \mathrm{r}\,\sigma^-(\mathrm{r}) = 1$.

4. $\sigma^-(\mathrm{r}) = \sigma^+(\mathrm{r})$ $(= \sigma'(\mathrm{r}))$ *salvo a lo sumo en un conjunto numerable de valores de* r.

5. *Proposición. Si*

$$\log w^*(z_0) = \sigma_a(r_0)\ (= \sigma(r_0)) \tag{5.1}$$

para $|z_0 - z| = r_0 > \rho_a$, *resulta* $z_0 \in B$ *y*

$$r_0\sigma^-(r_0) \leqslant (z_0 - a)\,\frac{w'(z)}{w(z_0)} \leqslant r_0\ \sigma^+(r_0). \tag{5.2}$$

Además, si $\sigma^-(r_0) \neq \sigma^+(r_0)$, *existen al menos dos puntos* z_0^- *y* z_0^+ *sobre la circunferencia* $\{z\colon |z - a| = r_0\}$ *que satisfacen*

$$\log |w(z_0^-)| = \sigma(r_0)\ \ y\ \ r_0\sigma^-(r_0) = (z_0^- - a)\,\frac{w'(z_0^-)}{w(z_0^-)} \tag{5.3.1}$$

y

$$\log|w(z_0^+)| = \sigma(r_0)\ \ y\ \ r_0\sigma^+(r_0) = (z_0^+ - a)\,\frac{w'(z_0^+)}{w(z_0^+)} \tag{5.3.2}$$

Demostración. Efectivamente, $z_0 \in B$ por ser $r_0 > \rho_a$. Por tanto, como $z = a + re^{i\theta_0} \in B$ si $\theta_0 = \arg(z_0 - a)$ y $|r - r_0|$ es suficientemente pequeño, tendremos

$$\frac{\log|w(z)| - \log|w(z_0)|}{r - r_0} \leqslant \frac{\sigma(r) - \sigma(r_0)}{r - r_0}$$

para $r > r_0$,

$$\frac{\log|w(z)| - \log w(z_0)|}{r - r_0} \geqslant \frac{\sigma(r) - \sigma(r_0)}{r - r_0}$$

para $r < r_0$. De esto se deduce por el corolario 4, que

$$\sigma^-(r_0) \leqslant \frac{\partial}{\partial r_0} \log|w(a + r_0 e^{\theta_0})| \leqslant \sigma^+(r_0),$$

es decir,

$$r_0\sigma^-(r_0) \leqslant Re\left\{(z_0 - a)\,\frac{w'(z_0)}{w(z_0)}\right\} \leqslant r_0\sigma^+(r_0).$$

De aquí resulta (5.2) si probamos que $(z_0 - a)w'(z_0)/w(z_0)$ es real. En efecto, siendo $|w(z_0)|$ el máximo de $|w(z)|$ sobre $\{ z\colon |z - a| = r, z \in B \}$, resulta

$$Re\left\{ i(z_0 - a)\,\frac{w'(z_0)}{w(z_0)}\right\} = \frac{\partial}{\partial\theta}\log|w(a + r_0e^{i\theta})| = 0$$

para $\theta = \theta_0$.

Finalmente, por el corolario 4.4 se puede encontrar una sucesión (r_n) creciente y convergente a r_0 tal que existe la derivada $\sigma'(r_n)$ para $n = 1,2...$ Entonces, por (1.1) y el resultado precedente existe una sucesión (z_n) de puntos de B que verifican $|z_n - a| = r_n$,

$$\log |w(z_n)| = \sigma(r_n) \text{ y } (z_n - a)\frac{w'(z_n)}{w(z_n)} = r_n\sigma'(r_n).$$

Siendo $\{z\colon |z - a| = r_0\}$ un conjunto compacto, la sucesión (z_n) tiene al menos un punto de acumulación z_0^- y, por consiguiente, se puede extraer de (z_n) una subsucesión convergente a z_0^-. Por no complicar la notación supondremos que esta subsucesión es la misma (z_n). Evidentemente,

$$|z_0^- - a| = \lim_{n\to\infty} |z_n - a| = \lim_{n\to\infty} r_n = r_0$$

y $z_0^- \in B$, ya que si $z_0^- \in A$ tendríamos

$$\sigma(r_0) = \lim_{n\to\infty} \sigma(r_n) = \lim_{n\to\infty} \log |w(z_n)| = 0$$

contra la hipótesis de que $r_0 > \rho_a$. Por tanto,

$$r_0\sigma^-(r_0) = \lim_{n\to\infty} r_n\sigma'(r_n) = \lim_{n\to\infty} (z_n - a)\frac{w'(z_n)}{w(z_n)} = (z_0 - a)\frac{w'(z_0)}{w(z_0)}$$

con lo que queda probado (5.3.1). De forma análoga se prueba la existencia de un z_0^+ que satisface (5.3.2).

6. *Observación.* Si $|w(z_0)|$ es un máximo local de $|w(z)|$ sobre $\{z\colon |z - a = r_0, z \in B\}$ y $|z_0 - a| = r_0 > \rho_a$, se verifica

$$Re\left\{(z - a)\frac{d}{dz}\left[(z - a)\frac{w'(z)}{w(z)}\right]\right\} \geqslant 0 \tag{6.1}$$

para $z = z_0$.

7. *Corolario.* 1. *Si solamente existe un punto* z_0 *que satisface*

$$\sigma_a(r_0) = \log w^*(z_0) \ \textit{y} \ |z_0 - a| = r_0 > 0, \tag{7.1}$$

se tiene $z_0 \in B$ *y*

$$r_0\sigma_0'(r_0) = (z_0 - a)\frac{w'(z_0)}{w(z_0)} \tag{7.2}$$

2. *Si* $r_0 > 0$ *y solamente existe un punto* z_0 *de* $\{z\colon |z - a| = r_0, z \in B\}$ *que satisface*

$$\mathrm{Re}\left\{i(z_0 - a)\frac{w'(z_0)}{w(z_0)}\right\} = 0 \tag{7.3.1}$$

y

$$\mathrm{Re}\left\{(z - a)\frac{d}{dz}\left[(z - a)\frac{w'(z)}{w(z)}\right]\right\} \geqslant 0 \tag{7.3.2}$$

para $z = z_0$, *se verifica*

$$\sigma_a(r_0) = \log |w(z_0)| \ \textit{y} \ r_0\sigma_a'(r_0) = (z_0 - a)\frac{w'(z_0)}{w(z_0)} \tag{7.4}$$

8. *Proposición. Si* a $\in$ B, *sobre cada circunferencia* $\{z: |z - a| = r_0\}$ *de radio suficientemente pequeño, existe un solo punto* z_0 *para el que se verifica* (7.3.1) *y* (7.3.2).

Demostración. Siendo $w(z)$ una aplicación conforme (univalente) de B sobre $\{w:|w| > 1\}$ se tiene $w'(a) \neq 0$. Por tanto, si ponemos

$$f(r, \theta) = Re\left\{ ie^{i\theta} \frac{w'(a + re^{i\theta})}{w(a+re^{i\theta})} \right\}$$

y

$$\theta_k = \arg \frac{w(a)}{w'(a)} + k\pi \quad (k = 0 \ \pm 1, \pm 2,...),$$

la ecuación $f(0, \theta) = 0$ se verifica sólo para $\theta = \theta_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2,...)$.

Como por otra parte $f(r, \theta)$ es una función contínua en un entorno de $(0, \theta_k)$ y

$$f_\theta(0, \theta_k) = -Re\left\{ e^{i\theta} \frac{w'(a)}{w(a)} \right\} = -e^{i\theta_k} \frac{w'(a)}{w(a)} \neq 0$$

existe una función contínua $\theta = \theta_k(r)$ con $\theta_k(0) = \theta_k$ que satisface $f(r, \theta) = 0$ para r suficientemente pequeño : $r < \delta_k$, y $k = 0, \pm 1, \pm 2,...$ Evidentemente,

$$\theta_{2k}(r) = \theta_0(r) + 2k\pi$$

y

$$\theta_{2k+1}(r) = \theta_1(r) + 2k\pi$$

Además, si $f(r, \theta) = 0$ y r es suficientemente pequeño, resulta

$$\theta \equiv \theta_0(r) \pmod{2\pi}$$

o

$$\theta \equiv \theta_1(r) \pmod{2\pi}$$

Para concluir basta tener en cuenta que

$$rf_\theta(r, \theta) = -Re\left\{ (z - a)\frac{d}{dz}\left[(z-a) \frac{w'(z)}{w(z)}\right]\right\}$$

para $z = a + re^{i\theta}$ y que

$$(-1)^{k+1} f_\theta(r, \theta_k(r)) > 0$$

para r suficientemente pequeño.

Pasamos a estudiar ahora la función real $\varphi_a(u)$ definida por

$$\varphi_a(u) = \inf_{r > 0} \frac{e^{u\sigma_a(r)}}{r} \tag{0.4.1}$$

o

$$\log \varphi_a(u) = \inf_{r > 0} \{u\sigma_a(r) - \log r\}$$

para u real.

9. *Observación*

$$\varphi_a(u) = 0 \qquad \text{para } u < 1, \tag{9.1}$$

$$\varphi_a(1) = c_0 \qquad (c_0 = \lim_{z \to \infty} w(z)/z) \tag{9.2}$$

$$\log \varphi_a(u) = \min_{r > 0} \{ u\, \sigma_a(r) - \log r \} \tag{9.3}$$

para $u > 1$.

Se ve fácilmente que el mínimo de $u\sigma_a(r) - \log r$ para $u > 1$ se alcanza en el punto determinado por

$$r\sigma^-(r) \leqslant \frac{1}{u} \leqslant r\sigma^+(r) \quad (\sigma(r) = \sigma_a(r)).$$

Por consiguiente, si ponemos

$$u_a = \frac{1}{\rho_a \sigma^+(\rho_a)} \quad \text{para} \quad \rho_a \sigma^+(\rho_a) \neq 0$$

y

$$u_a = +\infty \qquad \text{para} \quad \rho_a \sigma^+(\rho_a) = 0,$$

$r(u)$ es una función contínua no creciente en $(1, +\infty)$ con

$$r(u) > \rho_a \quad \text{para} \quad 1 < u < u_a$$

y

$$r(u) = \rho_a \quad \text{para} \quad u \geqslant u_a$$

10. *Proposición*. $\log \varphi_a$ *es una función cóncava en* $[1, +\infty)$ *que satisface*

$$\frac{\varphi_a'(\mathrm{u})}{\varphi_a(\mathrm{u})} = \sigma_a(\mathrm{r})$$

para $\mathrm{r} = \mathrm{r}(\mathrm{u})$ *y* $\mathrm{u} > 1$. *Además,* $\varphi_a(\mathrm{u})$ *es creciente en* $[1, \mathrm{u}_a)$ *y* $\varphi_a(\mathrm{u}) = 1/\rho_a$ *en* $[\mathrm{u}_a + \infty)$.

Demostración. Siendo

$$\log \varphi_a(u_k) \leqslant u_k \sigma(r) - \log r \quad (\sigma(r) = \sigma_a(r))$$

para $r = r(u)$ y $u > 1$, cualquiera que sea u_k, tendremos

$$\frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} \log \varphi_a(\mathrm{u}_1) + \frac{u - u}{u_2 - u_1} \log \varphi_a(u_2)$$
$$\leqslant u\sigma(r) - \log r = \varphi_a(u)$$

para $u_1 < u < u_2$ y $u_1 \geqslant 1$ y, por consiguiente, $\log \varphi_a(u)$ es una función cóncava en $[1, +\infty)$.

Por otra parte, como

$$\sigma_a(r_2) \leqslant \frac{\log \varphi_a(u_2) - \log \varphi_a(u_1)}{u_2 - u_1} \leqslant \sigma_a(r_1)$$

para $r_k = r(u_k)$ y $1 \leqslant u_1 < u_2$, si tomamos $u_1 < u < u_2$ y hacemos $u_2 - u_1 \longrightarrow 0$, en virtud de la continuidad de $r(u)$, resulta (10.1).

Para probar que $\varphi_a(u)$ es creciente en $[1, u_a)$ basta tener presente que por (10.1) se verifica.

$$\varphi_a'(u) = \sigma_a(r)\varphi_a(u) > 0$$

para $r = r(u)$ y $1 < u < u_a$ por ser $r(u) > \rho_a$ en $(1, u_a)$.
Finalmente,

$$\varphi_a(u) = \frac{e^{u\,\sigma_a(\rho_a)}}{\rho_a} = \frac{1}{\rho_a}$$

para $u > u_a$ $(\neq +\infty)$.

11. *Corolario. Si.*

$$\log \varphi_a(\mathrm{u}) = \mathrm{u}\sigma_a(\mathrm{r}) - \log \mathrm{r} \tag{11.1}$$

para $\mathrm{r} = \mathrm{r(u)}$ *y* $\mathrm{u} > 1$, *y sobre la circunferencia* $|\mathrm{z} - \mathrm{a}| = \mathrm{r} > \rho_a$ *existe solamente un punto de* $\mathrm{z} \in \mathrm{B}$ *que satisface*

$$\sigma_a(\mathrm{r}) = \log |\mathrm{w(z)}|.$$

resulta

$$(\mathrm{z} - \mathrm{a})\frac{\mathrm{w}'(\mathrm{z})}{\mathrm{w(z)}} = \frac{1}{u}.$$

Demostración. Se deduce del corolario 7.1 y de (9.4).

12. *Proposición. Si* B *es simétrico respecto del eje real* $\mathrm{Im}\ \mathrm{z} = 0$, *y si* $\mathrm{Im}\ \mathrm{a} > 0$ *y* $\mathrm{r}_0 > \rho_a$, *el máximo de* $\mathrm{w}^*(\mathrm{z})$ *sobre la circunferencia* $\{\mathrm{z}\colon |\mathrm{z} - \mathrm{a}| = \mathrm{r}_0\}$ *es alcanzado exclusivamente en la intersección de ella y el semiplano* $\{\mathrm{z}\colon \mathrm{Im}\ \mathrm{z} \geqslant 0\}$. *Por consiguiente, existe al menos un punto* z_0 *perteneciente a* $\{\mathrm{z}\colon |\mathrm{z} - \mathrm{a}| = \mathrm{r}_0, \mathrm{Im}\ \mathrm{z} \geqslant 0\}$ *que satisface*

$$0 < (\mathrm{z} - \mathrm{a})\frac{\mathrm{w}'(\mathrm{z})}{\mathrm{w(z)}} < 1 \quad (\mathrm{z} \in \mathrm{B}) \tag{12.1}$$

y

$$\mathrm{Re}\left\{(\mathrm{z} - \mathrm{a})\frac{d}{\mathrm{dz}}\left[(\mathrm{z} - \mathrm{a})\ \frac{\mathrm{w}'(\mathrm{z})}{\mathrm{w(z)}}\right]\right\} \tag{12.2}$$

Supuesto que no existe ningún otro punto z *que verifique estas condiciones se tiene*

$$\sigma_a(\mathrm{r}_0) = \log |\mathrm{w}(\mathrm{z}_0)|$$

y

$$\frac{1}{\mathrm{u}_0} = (\mathrm{z}_0 - \mathrm{a})\ \frac{\mathrm{w}'(\mathrm{z}_0)}{\mathrm{w}(\mathrm{z}_0)} \tag{12.3}$$

para $\mathrm{r}_0 = \mathrm{r}(\mathrm{u}_0)$.

Demostración. En primer lugar vamos a probar las primera afirmación. Siendo ésta, evidentemente, trivial si

$$\{z : |z - a| = r_0,\ Im\, z < 0,\ z \in B\} = \phi,$$

supondremos que este conjunto no es vacío. Entonces, como $w^*(z) = 1$ sobre $A = Z - B$, $w(\bar{z}) = \overline{w(z)}$ para $z \in B$ ($\bar{z} = x - iy$), y el conjunto

$$\{z: |z - \bar{a}| = r_0,\ Im\, z > 0,\ z \in B\}$$

$$=\{z: |\bar{z} - a| = r_0,\ Im\, z < 0,\ z \in B\}$$

está contenido en

$$\{z: |z - a| < r_0,\ Im\, z > 0,\ z \in B\}$$

por el teorema del módulo máximo, resulta

$$w^*(z) < \text{máx}\{|w(z)| : |z - a| = r_0,\ Im\, z \geqslant 0,\ z \in B\}$$

y

$$w^*(z) < \text{máx}\{|w(z)| : |z - a| \leqslant r_0,\ Im\, z = 0, z \in B\}$$

para $|z - a| = r_0$ e $Im\, z < 0$.

De esto se deduce la primera parte teniendo en cuenta que $w^*(x) = |w(x)|$ es decreciente en $(-\infty\ , \lambda)$ y creciente en $[\mu, +\infty\ )$ si $[\lambda, \mu] = \{z: Im\, z = 0, z \in A\}$ y que por tanto

$$\text{máx}\{w^*(z) : |z - a| = r_0,\ Im\, z = 0\}$$

$$= \text{máx}\{w^*(\alpha - \sqrt{r_0^2 - \beta^2}),\ w^*(\alpha + \sqrt{r_0^2 - \beta^2})\}\ (a = \alpha + i\beta)$$

$$= \text{máx}\{|w(z)|: |z - a| = r_0,\ Im\, z = \geqslant 0,\ z \in B\}$$

Finalmente la última afirmación resulta teniendo presente la proposición 5, el corolario 4.2, la observación 6 y el corolario 11.

De manera semejante a como hemos definido $\sigma_a(r)$ se puede definir la función real $\psi_a(\mathrm{v})$ considerando en lugar de $w^*(z)$ la función inversa $z(w)$ de $w(z)$ y poniendo

$$\psi_a(\mathrm{v}) = \rho_a \tag{0.5.1}$$

para $\mathrm{v} = \mathrm{v}_a = \log w^*(a)$ y

$$\psi_a(\mathrm{v}) = \inf_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |z(e^{\mathrm{v}+i\theta}) - a| = \min_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |z(e^{\mathrm{v}+i\theta}) - a|$$

para $\mathrm{v} > \mathrm{v}_a = \log w^*(a)$.

13. *Proposición.* ψ_a (v) *es la función inversa de la restricción de* $\sigma_a(\mathrm{r})$ *en el intervalo* $[\rho_a, +\infty)$, *es decir,*

$$\sigma_a(\psi_a(\mathrm{v})) = \mathrm{v} \ \textit{para} \ \mathrm{v} \geqslant \mathrm{v}_a \tag{13.1}$$

y

$$\psi_a(\sigma_a(\mathrm{r})) = \mathrm{r} \ \textit{para} \ r \geqslant \rho_a. \tag{13.2}$$

Demostración. Desde luego estas fórmulas son obvias para $\mathrm{v} = \mathrm{v}_a$ y $r = \rho_a$. Supongamos $\mathrm{v} > \mathrm{v}_a$, entonces

$$\{ z : z = z(e^{\mathrm{v}+i\theta}), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \}$$

es una curva de Jordan que contiene en su interior a la circunferencia

$$\{z : |z - a| = \psi_a(\mathrm{v})\}$$

Por tanto,

$$\{w(z) : |z - a| = \psi_a(\mathrm{v}), \ z \in B\}$$

$$\subset \{w : |w| = e^{\mathrm{v}}\}$$

y $\sigma_a(r) \leqslant \mathrm{v}$ para $r = \psi_a(\mathrm{v})$. Como además

$$\{z : z = z(e^{\mathrm{v}+i\theta}), \ 0 \leqslant \mathrm{v} \leqslant 2\pi\} \ \mathrm{y} \ \{z : |z - a| = \psi_a(\mathrm{v})\}$$

tienen, evidentemente, al menos un punto común, podemos afirmar que $\sigma_a(r) = \mathrm{v}$ para $r = \psi_a(\mathrm{v})$ o sea (13.1). De forma análoga se prueba (13.2).

14. *Corolario.*

$$\sigma_a^-(\mathrm{r})\psi_a^-(\mathrm{v}) = \ y \ \sigma_a^+(\mathrm{r})\psi_a^+(\mathrm{v}) = 1 \tag{14.1.}$$

para $\mathrm{r} = \psi_a(\mathrm{v})$ *y* $\mathrm{v} > \mathrm{v}_a$, *y también para* $\mathrm{v} = \sigma_a(\mathrm{r})$ *y* $\mathrm{r} > \rho_a$.

15. *Corolario.* 1. $\log \psi_a(\mathrm{v})$ *es una función creciente y cóncava en* $[\mathrm{v}_a + \infty)$.

2. $\mathrm{v} - \log \psi_a(\mathrm{v})$ *es una función decreciente con*

$$\lim_{\nu \to +\infty} (\mathrm{v} - \log \psi_a(\mathrm{v})) = \log \mathrm{c}_0 \quad (\mathrm{c}_0 = \lim \mathrm{w}(\mathrm{z})/\mathrm{z}).$$

16 *Corolario.* 1. $\psi_a^-(\mathrm{v})/\psi_a(\mathrm{v})$ *y* $\psi_a^+(\mathrm{v})/\psi_a(\mathrm{v})$ *son funciones no crecientes en* $[\mathrm{v}_a, +\infty)$.

$$2. \quad 1 \leqslant \frac{\psi_a^+(\mathrm{v})}{\psi_a(\mathrm{v})} \leqslant \frac{\psi_a^-(\mathrm{v})}{\psi_a(\mathrm{v})} \leqslant \frac{\psi_a^+(\mathrm{v}_a)}{\psi_a(\mathrm{v}_a)} = \mathrm{u}_a$$

$$3. \ \lim_{\mathrm{v} \to +\infty} \frac{\psi_a^-(\mathrm{v})}{\psi_a(\mathrm{v})} = 1 \ y \ \lim_{\mathrm{v} \to \mathrm{v}_a} \frac{\psi_a^+(\mathrm{v})}{\psi_a(\mathrm{v})} = \mathrm{u}_a.$$

4. $\psi_a^-(\mathrm{v}) = \psi_a^+(\mathrm{v})$ *salvo a lo sumo en un conjunto numerable de valores de* v.

17. *Proposición.*

$$\log \varphi_a(\mathrm{u}) = \min_{v} \{\mathrm{uv} - \log \psi_a(\mathrm{v})\} \tag{17.1}$$

para $\mathrm{u} > 1$, *y*

$$\log \psi_a(\mathrm{v}) = \min_{u} \{\mathrm{uv} - \log \varphi_a(\mathrm{u})\} \tag{17.2}$$

para $\mathrm{v} > \mathrm{v}_a$.

Además

$$\log \varphi_a(\mathrm{u}) + \log \psi_a(\mathrm{v}) = \mathrm{uv} \tag{17.3}$$

para

$$\mathrm{v} = \frac{\varphi_a'(\mathrm{u})}{\varphi_a(\mathrm{u})} \quad y \quad \mathrm{u} > 1, \tag{17.4}$$

y también para

$$\frac{\psi_a^+(\mathrm{v})}{\psi_a(\mathrm{v})} \leqslant \mathrm{u} \leqslant \frac{\psi_a^-(\mathrm{v})}{\psi_a(\mathrm{v})} \quad y\ \mathrm{v} > \mathrm{v}_a. \tag{17.5}$$

Demostración. La fórmula (17.1) se deduce de (9.3) y de la proposición 13 teniendo presente que $\sigma_a(\mathrm{r}) = 0$ en el intervalo $[0, \rho_a)$.

Sea (17.5) y

$$g(y) = uy - \log \psi_a(y)$$

para $y \geqslant \mathrm{v}_a$, entonces por ser $g(y)$ una función convexa y $\mathrm{v}_a < \mathrm{v}$ tendremos

$$g^+(\mathrm{v}_a) < g^-(\mathrm{v}) = u - \frac{\psi_a^-(\mathrm{v})}{\psi_a(\mathrm{v})} \leqslant 0$$

de donde resulta que el mínimo de $g(y)$ se alcanza en un punto $y = \mathrm{v}_0 > \mathrm{v}_a$ que satisface

$$g^-(\mathrm{v}_0) \leqslant 0 \quad \mathrm{y} \quad g^+(\mathrm{v}_0) \geqslant 0,$$

o sea

$$\frac{\psi_a^+(\mathrm{v}_0)}{\psi_a(\mathrm{v}_0)} \leqslant u \leqslant \frac{\psi_a^-(\mathrm{v}_0)}{\psi_a(\mathrm{v}_0)} .$$

De esto se deduce, siendo $\log \psi_a(y)$ una función cóncava, no localmente lineal en ningún punto de $[\mathrm{v}_a. + \infty)$, que $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0$ y, por tanto, que se verifica (17.3) para (17.5).

Para probar (17.2) basta tener presente que en virtud de (17.1) se tiene

$$\log \psi_a(v) \leqslant \inf_u \{uv - \log \varphi_a(u)\}$$

y que se satisface (17.3) para (17.5).

Finalmente, si

$$v = \frac{\varphi_a'(u)}{\varphi_a(u)} \quad \text{y } u > 1,$$

se ve fácilmente que el mínimo $\log \psi_a(v)$ de

$$f(x) = xv - \log \varphi_a(x)$$

en el intervalo $[1, +\infty)$ se alcanza en un punto $x = u_0 > 1$ tal que

$$\frac{\varphi_a'(u_0)}{\varphi_a(u_0)} = v.$$

Por tanto, siendo $\log \varphi_a(x)$ una función cóncava, se deduce que

$$\frac{\varphi_a'(x)}{\varphi_a(x)} = v$$

en el intervalo cerrado de extremos u y u_0 y, por consiguiente, que

$$xv - \log \varphi_a(x) = u_0 v - \log \varphi_a(u_0) = \log \psi_a(v)$$

para $u_0 \leqslant x \leqslant u$ o $u \leqslant x \leqslant u_0$ y, en particular, que se verifica (17.3) para (17.4).

18. *Observación.* En virtud de (17.1) y (17.2) diremos que $\log \varphi_a(u)$ y $\log \psi_a(v)$ son un par de funciones cóncavas conjugadas.

Estos resultados se pueden extender con modificaciones obvias al caso de que C sea no acotado, cuando C sea un conjunto conexo del plano complejo completado Z que conste al menos de dos puntos y existe una sola componente B de $Z - \overline{C}$ tal que $\infty \in \overline{B}$. Entonces por el teorema de Riemann existe una aplicación conforme $z \longrightarrow s(z)$ de B sobre $\{s\colon Re\, s > 0\}$ con

$$\lim_{s \to \infty} \sup |s(z)| = \infty \qquad (0.1)'$$

A partir de esta función $s(z)$ se definen las funciones $s^*(z)$ y $\sigma_a(r)$ poniendo

$$s^*(z) = 0 \qquad \text{para } z \in A = Z - B \tag{0.2.1'}$$

y

$$s^*(z) = Re\, s(z) \quad \text{para } z \in B. \tag{0.2.2'}$$

y

$$\sigma_a(\mathrm{r}) = \sup_{\theta} \; s^*(a + re^{i\theta})\ (\geqslant 0). \tag{0.3}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] CARTAN, H. *Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leur dérivés succesives.* París, Act. Sc, et Ind. n° 867, 1940.

[2] GORNY, A.: *Contribution à l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle.* Acta Math., 71 (1939), 317.

[3] MANDELBROJT, S.: *Séries adhérentes. Regularisation des suites. Applications.* París, Gauthier-Villars, 1952.

[4] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Una desigualdad entre las cotas de las derivadas de una función analítica en un ángulo.* Rev. Las Ciencias de Madrid, año XXIII (1958), 533.

[5] RODRIGUEZ-SALINAS, B.: *Disuguaglianze tra limiti e coefficienti dello sviluppo asintotico di una funzione in un angolo.* Annali de Mat. Pura ed Appl., 48 (1959), 147-159.

[6] RODRIGUEZ-SALINAS, B. : *Equivalenza di classi di funzioni con sviluppo asintotico in un angolo. Funzioni caratteristiche.* Boll. Unione Mat. Italiana, 14 (1959), 525-531.

[7] RODRIGUEZ-SALINAS, B. : *Solución del problema de equivalencia de clases de funciones con desarrollo asintótico.* Rev. Acad. Ciencias de Zaragoza, Ser. 2, 16 (1961), 47-51.