Dominancia estocástica para familias dominadas

Por M. L. MARTINEZ

Recibido: 2 noviembre 1983

Presentado por el Académico Numerario D. Sixto Rios

Abstract.

All possible stochastic dominance relations are characterized in terms of classes of utility functions by means of a set of rationality axioms. This paper is concerned with stochastic dominance relations on a particular subset of the set of all distributions on the real line, namely, subsets of probability measures dominated by a Lebesgue–Stieltjes measure. As particular cases expected utility theorems are obtained. The main technique in deriving these results is duality and a generalization of integration by parts.

Resumen

En este artículo se caracterizan todas las posibles relaciones de dominancia estocástica en términos de clases de funciones de utilidad mediante una serie de axiomas de racionalidad. El estudio se realiza para familias de distribuciones de probabilidad dominadas por una medida de Lebesgue–Stieltjes, y se obtienen, como casos particulares, los teoremas de utilidad esperada para dichas familias. La técnica utilizada para la obtención de estos resultados es la teoría de la dualidad y una generalización de la integración por partes.

1. INTRODUCCION

El problema que se aborda en este artículo es el problema natural de ordenar distribuciones de probabilidad sobre un cierto espacio de consecuencias o resultados seguros y del cual surge la teoría de la utilidad para tratar los problemas de decisión en ambiente de riesgo.

En nuestro estudio consideramos cómo espacio de consecuencias la recta real y nos restringimos al problema de ordenar distribuciones de probabilidad de una familia de distribuciones dominada por una medida μ de Lebesgue–Stieltjes y que representaremos por $P(\mu)$.

Cómo base del estudio se toma una serie de axiomas de racionalidad que se postulan en la familia $P(\mu)$ y que son análogos a los sugeridos por Girón (1979) que considera el caso no dimensional infinito, y de la que omitimos el axioma de adición de estrategias debido a que trabajamos con todo el espacio $P(\mu)$ o, para ser más precisos, con un subespacio que contiene a $P(\mu)$.

La razón de basarnos en estos axiomas y no en los dados por Fishburn (1970), que realiza el estudio para una familia P más general que la nuestra, se encuentra en el hecho de que algunos de dichos axiomas son poco naturales, como por ejemplo el $S.5$ que exige que la clase P sea cerrada respecto a probabilidades condicionadas. Sin embargo los axiomas que aquí se consideran además de ser más plausibles y naturales y aunque el estudio se realiza en una clase más restringida, su extensión a casos más generales, para la obtención de resultados análogos, es más sistemática y natural.

En este trabajo se realiza un estudio de la problemática de la dominancia estocástica en general, la cual indica que tan sólo se posee una información parcial acerca de la función de utilidad o sobre la ordenación de las distribuciones de probabilidad.

La caracterización de las estructuras de dominancia se hace mediante la aplicación de la teoría de la dualidad del Análisis Funcional, es decir, haciendo uso del concepto de cono polar. Esto supone la extensión del preorden y de los axiomas a nuevas funciones – no necesariamente densidades de probabilidad – tal cómo lo realiza Prieto (1979) en el caso discreto nume rable con un primer elemento.

La acotación y la medibilidad respecto de la complección de $\mathfrak{B}$ respecto de μ, de las funciones de utilidad se obtiene cómo consecuencia trivial de que el espacio dual de $L_1(\mu)$, del cual es un subconjunto $P(\mu)$, es precisamente el espacio $L_\infty(\mu)$.

El resultado básico y más importante del artículo está dado por el teorema 3. 11 que asegura la existencia de una aplicación biunívoca entre una cierta clase de conos de funciones de $L_1(\mu)$, que representan los preórdenes que verifican los axiomas antes indicados, y una cierta clase de conos de funciones del espacio dual $L_\infty(\mu)$, más precisamente, conos de funciones de utilidad. Resultado que proporciona como casos particulares todos los teoremas de utilidad esperada y los teoremas de dominancia estocástica, salvo la caracterización de las aristas extremales de dichos conos.

Como consecuencia inmediata de este resultado queda resuelto el problema planteado por Prieto (1979) y que quedaba cómo problema abierto. La clave para la resolución del problema mucho más general que el planteado por este autor está en considerar la *topología débil** en el espacio $L_\infty(\mu)$.

En este artículo tan sólo se caracteriza la dominancia estocástica de primer orden mediante el cono de todas las funciones de utilidad.

Para obtener la caracterización del polar estricto del cono de dominancia es necesario hacer uso de otra contribución importante del artículo, que se encuentra en el teorema 3. 12 y que proporciona una generalización de la integración por partes para los tipos de funciones que aparecen en nuestro estudio. Este resultado también se utiliza en los teoremas de dominancia estricta.

2. ELEMENTOS BASICOS Y AXIOMATICA.

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de premios básicos o consecuencias y $\mathfrak{B}$ la σ–álgebra de los conjuntos de Borel, y sea μ una medida de Lebesgue–Stieltjes sobre $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Por $P(\mu)$ representamos el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad absolutamente continuas respecto de μ o, para ser más precisos, el conjunto de todas las densidades de probabilidad, es decir, $P(\mu)$ es una familia de distribuciones dominada por una medida de Lebesgue–Stieltjes.

$$P(\mu) = [p, p\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})\colon \int p d\mu = 1 \text{ c. s.}(\mu)].$$

De acuerdo con esta definición, todo elemento de $P(\mu)$ es un elemento del espacio $L_1(\mu)$.

Definición 2.1.–Dados p y q pertenecientes a $P(\mu)$ se dice que *p domina estocásticamente* a q, y lo representaremos por $p \gtrsim^e q$, sí y sólo si

$$\int_{(-\infty, x]} p(y)\, d\mu(y) \leqslant \int_{(-\infty, x]} q(y)\, d\mu(y) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Esta relación establece sobre $P(\mu)$ un orden parcial natural llamado "*dominancia estocástica de primer orden*" y evidentemente cualquier preorden razonable que se establezca en dicha familia debe ser consistente con este orden.

A partir de la relación $\gtrsim^e$ se define la relación de dominancia estricta

$$p >^e q \text{ sí y sólo si } p \neq q \text{ y } p \gtrsim^e q.$$

Es evidente que el espacio $P(\mu)$ es un espacio de mixtura.

El criterio de utilidad esperada, análogo al de Bayes en el caso de decisiones en ambiente de incertidumbre, queda caracterizado, como veremos más adelante, por las definiciones y axiomas siguientes.

Definición 2.2.– Un problema de decisión en ambiente de riesgo es un subconjunto convexo no vacío de $P(\mu)$.

Nosotros a lo largo de nuestro estudio consideraremos como problema el conjunto total $P(\mu)$ que, evidentemente, es convexo.

Definición 2. 3.– Un criterio de decisión aplicado al problema $P(\mu)$ es una relación binaria definida en $P(\mu)$, que representaremos por $\gtrsim$ y que se lee: "...más preferido o indiferente a ...".

A partir de la relación $\gtrsim$ se puede definir la relación de preorden estricto de la siguiente forma: $p > q$ sí y sólo si $p \gtrsim q$ y no $q \gtrsim p$, y la relación de indiferencia: $p \sim q$ sí y sólo si $p \gtrsim q$ y $q \gtrsim p$.

Axiomática

A–1 (Orden). La relación $\gtrsim$ es reflexiva y transitiva.

A–2 (Dominancia estocástica débil). Si p y $q \in P(\mu)$ y si $p \gtrsim^e q$, entonces $p \gtrsim q$, y suponemos que existen al menos dos elementos de $P(\mu)$ que no son indiferentes.

A–2′(Dominancia admisible). Si p y $q \in P(\mu)$ y si $p >^e q$, entonces $p > q$.

A–3 (Sustitución). Si $\lambda \in (0, 1]$ y p, q y $r \in P(\mu)$, entonces $p \gtrsim q$ sí y sólo si $\lambda p + (1-\lambda) r \gtrsim \lambda q + (1-\lambda) r$.

A–4 (Continuidad) Si p_n, p, q y $r \in P(\mu)$ son tales que $[p_n] \rightarrow p$ y $q \gtrsim p_n \gtrsim r$ para todo n, entonces $q \gtrsim p \gtrsim r$.

La convergencia anterior se entiende en el sentido de la norma de $L_1(\mu)$, del cual, como ya hemos dicho, $P(\mu)$ es un subconjunto.

La racionalidad del axioma 1, en particular la transitividad, ha sido ampliamente tratada en la literatura.

Los axiomas A-2 y A-2′ son simplemente axiomas de consistencia entre el preorden $\gtrsim$ y el orden parcial natural del espacio $P(\mu)$, $\gtrsim^e$.La diferencia entre ambos axiomas estriba en que, cómo veremos después, si tan sólo se exige A-2 entonces no se puede asegurar que la función de utilidad sea estrictamente creciente, sin embargo con A-2′ esta afirmación si es cierta.

La razón de añadir en A-2 el que al menos existan en $P(\mu)$ dos elemen tos no indiferentes es para evitar el caso trivial de que todos los elementos sean indiferentes y obtener, en consecuencia, como función de utilidad una función constante.

Es conveniente señalar además que, dependiendo de cual sea la medida μ que se considere, el axioma de dominancia, en cualquiera de sus versiones A-2 o A-2′, será redundante, es decir, será posible deducirlo del resto de los axiomas; así ocurre en el caso de que μ sea atómica con un número finito de átomos e incluso con un número infinito numerable (véase Prieto (1979)).

El axioma A-3 es el conocido axioma de sustitución y que coincide con el dado por von Neumann y Morgenstern.

Por último, el axioma 4 nos dice que si una densidad de probabilidad se puede aproximar por una sucesión de densidades preferidas a una dada, el orden de preferencia no se altera en el límite. Este axioma contiene como caso particular al usual de Herstein–Milnor.

3. CARACTERIZACION DE DOMINANCIAS ESTOCASTICAS.

Para dar una caracterización de la dominancia estocástica, cuyo significado fue dado en la introducción, utilizaremos cómo herramienta básica la teoría de la dualidad. Esto supone la extensión del preorden definido en $P(\mu)$ a un hiperplano de $L_1(\mu)$ que contiene a $P(\mu)$ y puesto que es más cómodo trabajar con conos con vértice en el origen, trasladamos nuestro problema a éste.

Consideramos entonces el subespacio

$$H_0 = [f \in L_1(\mu): \int f d\mu = 0].$$

Nuestro objetivo es extender el preorden definido en $P(\mu)$ al subespacio H_0 de forma que se sigan verificando los axiomas dados en el apartado 2.

Si consideramos $p \in P(\mu)$, la aplicación ψ: $p + H_0 \rightarrow H_0$ definida de la forma $\psi(f) = f - p$, es un homeomorfismo. Representamos entonces por P_0 al conjunto $P_0 = \psi(P(\mu)) = [f \in H_0 : f + p \geqslant 0 \; c.\, s(\mu)]$, que no es más que la traslación de $P(\mu)$ al origen.

Definición 3.1 Dados $f, g \in P_0$, cuyos antecedentes por ψ en $P(\mu)$ son r y q, se dice que f es más preferido o indiferente que g, y lo representamos por $f \gtrsim g$, sí y sólo si $r \gtrsim q$.

El proceso a seguir para realizar la extensión de este preorden a H_0 es el siguiente: En primer lugar, consideramos un subconjunto A de H_0 definido de la siguiente forma

$$A = [f - g; f, g \in P_0, f \gtrsim g].$$

Se demuestra fácilmente que A es un subconjunto convexo de H_0 y que para cualesquiera $f, g \in P_0, f - g \in A$ sí y sólo si $f \gtrsim g$.

A partir de este conjunto A se define un nuevo conjunto de la forma

$$C = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A,$$

siendo C un cono convexo con vértice en el origen.

Definición 3.2. Dados $f, g \in H_0$, decimos que f es más preferido o indiferente que g, y lo representamos por $f \gtrsim' g$, sí y sólo si $f - g \in C$.

Lema 3.1 La relación $\gtrsim'$ es un preorden en H_0 y además es una extensión de $\gtrsim$.

Para que este preorden definido en H_0 verifique los axiomas, es necesario extender la relación de dominancia estocástica definida en $P(\mu)$, aunque sólo tenga sentido en él, a todo el subespacio H_0. Tendremos entonces que, dados $f, g \in H_0$,

$$f \gtrsim^e g \text{ si y sólo si} \int_{(-\infty, x]} f(y)\, d\mu(y) \leqslant \int_{(-\infty, x]} g(y)\, d\mu(y) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Definimos ahora lo que se entiende por cono de dominancia.

Definición 3.3. Se llama *cono de dominancia,* y lo representamos por D_1, al conjunto de funciones de H_0 dominadas estocásticamente por 0, es decir

$$D_1 = [f \in L_1(\mu) \colon \int f d\mu = 0, \; \int_{(-\infty, x]} f(y)\, d\mu(y) \geqslant 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}]$$

que evidentemente es un cono convexo con vértice en el origen.

El cono D_1 determina el orden $\gtrsim^e$ en el sentido siguiente

$$f \gtrsim^e g \text{ sí y sólo si } g - f \in D_1.$$

Teorema 3.1. El preorden $\succsim'$ definido en H_0 verifica los axiomas A-1 A-2, A-3 y A-4.

Las demostraciones de estos resultados pueden verse en Martínez (1981).

Veamos ahora algunas propiedades que posee el cono de dominancia D_1 además de la de ser convexo con vértice en el origen.

Lema 3.2 D_1 es un cerrado en la topología relativa de H_0.

Demostración. Se obtiene utilizando el lema 2 del apéndice de Lehmann (1959).

Definición 3.4. Un cono convexo K de $L_1(\mu)$ se dice que es puntiagudo si $K \cap (-K) = 0$.

Lema 3.3. El cono D_1 es puntiagudo.

Demostración.– Se obtiene utilizando el teorema 1.6.11 de Ash (1972).

Debido a la estructura especial del espacio de mixtura con que trabajamos, las funciones de utilidad las vamos a suponer definidas en $\mathbb{R}$ y su extension a $P(\mu)$ se realiza mediante el concepto de utilidad esperada, y a continuación se extiende al subespacio H_0.

Definición 3.5. Diremos que u: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ es una función de utilidad si siendo $x < y$ entonces $u(x) < u(y)$.

En realidad trabajaremos no con funciones, sino con clases de equivalencia respecto de la medida μ. Esto equivale a considerar lo que llamaremos funciones estrictamente μ–crecientes.

Definición 3.6. Diremos que u: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ es una función estrictamente μ–creciente si u es estrictamente creciente *c. s.* (μ), es decir, si

$$\mu\,[x\colon x < y,\ u(x) \geqslant u(y)] = 0.$$

Representamos por U^+ el conjunto siguiente

$$U^+ = [u \in L_\infty(\mu);\ u \text{ es estrictamente } \mu\text{–creciente}].$$

A veces es conveniente extender el concepto de función de utilidad a funciones que tan sólo sean crecientes. Representamos, entonces, por U el conjunto

$$U = [u \in L_\infty(\mu);\ u \text{ es } \mu\text{–creciente}].$$

La relación que existe entre estos dos conjuntos es la siguiente: $U = \overline{U^+}$.

Lema 3.4. U es un cono convexo, cerrado en la topología fuerte de $L_\infty(\mu)$, con vértice en el origen y no puntiagudo.

Definición 3.7 Dado un subconjunto $A \subset U$ se llama *saturación* de A y lo representamos por $s(A)$, al conjunto $s(A) = [\alpha u + \beta I_{IR}, \alpha \geqslant 0, \beta \in \mathbb{R}, u \in A]$.

Consideramos ahora las funciones indicadoras de conjunto siguientes:

$$u_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < r \\ 1 & \text{si } x \geqslant r \end{cases} \qquad v_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant s \\ 1 & \text{si } x > s \end{cases}$$

evidentemente, tanto u_r cómo v_s pertenecen al cono U y si consideramos la envolvente lineal convexa de estas funciones, $co\ (u_r, v_s)$, también está contenida en U, pero además

Teorema 3.2. $s(\overline{co}\ (u_r, v_s)) = U$ en la topología de la norma de $L_\infty(\mu)$.

Para establecer la relación que existe entre los conos D_1 y U, es necesario el siguiente concepto.

Definición 3.8. Si K es un cono convexo con vértice en el origen, de $L_1(\mu)$, se llama cono dual o *polar* de K, y lo representamos por K^*, al conjunto

$$K^* = p(K) = [x^* \in L_\infty(\mu) \colon x^*(f) \leqslant 0 \text{ para todo } f \in K].$$

Teorema 3.3. U es el polar de D_1, es decir, $D_1{}^* = U$.

Demostración.

a) $D_1^* \subset U$. Sea $x_0^* \in D_1^*$ y supongamos que $x_0^* \notin U$, entonces los conos $[\lambda x_0^*, \lambda \geqslant 0]$ y U son conos convexos, cerrados, con vértice en el origen y tales que $[\lambda x_0^*] \cap U = [0]$ y $[\lambda x_0^*]$ es localmente compacto. Aplicando el teorema 2.5 de Klee (1955), existirá un funcional $f \in L_1(\mu)$ tal que $f(x_0^*) > 0$, $f(c) = 0$ para toda $u(x) = c$ y $f(u) < 0$ para toda $u \in U - [\text{ctes}]$. Entonces se tiene que $c\int f d\mu = 0$, luego $f \in H_0$. Consideremos la función

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \leqslant x \\ 0 & \text{si } t > x \end{cases}$$

entonces $\int fu d\mu = -\int_{(-\infty, x]} f d\mu \leqslant 0$, luego $\int_{(-\infty, x]} f d\mu \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y por tanto $f \in D_1$. Pero si $f \in D_1$, como $x_0^* \in D_1^*$ se ha de verificar que $f(x_0^*) \leqslant 0$, en contra de lo supuesto. Luego $x_0^* \in U$.

b) $U \subset D_1^*$. Sea $u \in U$, hemos de domostrar que $u \in D_1^*$, es decir, que para todo $f \in D_1, \int fu d\mu \leqslant 0$.

Ahora bien, si $u \in U$, por el teorema 3.2, $u = \alpha v + \beta$ siendo $v \in \overline{co}\ (u_r, v_s)$ y por tanto existirá una sucesión $[v_n]$ de funciones de la forma

$v_n = \sum_{i=1}^{k(n)} \lambda_i u_{ri}$ siendo $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$, $u_{ri} \in (u_r, v_s)$, tal que $[v_n] \to v$,

entonces, $\int fu\, d\mu = \int (\alpha v + \beta) f\, d\mu = \alpha \int fv\, d\mu$ pero $\int fv\, d\mu =$

$= \lim_{n \to \infty} \int v_n f\, d\mu$ y $\int v_n f\, d\mu = \sum_i \lambda_i \int f u_{ri}\, d\mu = \sum_i \lambda_i \int_I f\, d\mu \leqslant 0$, donde I

puede ser $(r_i, +\infty)$ ó $[r_i, +\infty)$ y por pertenecer f a D_1, $\int_{I^c} f\, d\mu \geqslant 0$ para todo

$r_i \in \mathbb{R}$ y como $\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = 0$ se tiene que $\int_I f\, d\mu \leqslant 0$ entonces $\int uf\, d\mu =$

$= \alpha \lim_{n \to \infty} \int u_n f\, d\mu \leqslant 0$. c. q. d.

Consideramos ahora el conjunto $\mathfrak{D}$ de todos los conos de H_0 que son convexos, con vértice en el origen, cerrados y que contienen al cono de dominancia D_1. Evidentemente $\mathfrak{D}$ es no vacío ya que, al menos, el cono D_1 pertenece a él.

Esta clase $\mathfrak{D}$ caracteriza a los preórdenes definidos en H_0 que verifican los axiomas A-1, A-2, A-3, y A-4, en el sentido que damos en el siguiente teorema.

Teorema 3.4. Existe una correspondencia biunívoca entre las relaciones $\gtrsim$ definidas en H_0 que verifican los axiomas A-1, A-2, A-3, y A-4 y los conos de H_0 que pertenecen a la clase $\mathfrak{D}$, definida de la siguiente forma: Para toda $\gtrsim$ que verifica los axiomas anteriores,

$$f \gtrsim g \text{ sí y sólo si } g - f \in D \text{ con } D \in \mathfrak{D} .$$

Damos a continuación una caracterización de estos preórdenes mediante conos del espacio dual. Nuestro objetivo será poder establecer una aplicación biunívoca entre la clase $\mathfrak{D}$ y una clase $\mathfrak{D}^*$ de ciertos conos de funciones de utilidad.

Sea $D^* \subset U$, este conjunto genera en H_0 una relación de preorden parcial definida de la siguiente forma.

Definición 3.9. Sean $f, g \in H_0$ y $D^* \subset U$, decimos que f es más preferido o indiferente que g, y lo representamos por $f \gtrsim_{D^*} g$, sí y sólo si $\int fu\, d \geqslant \int gu\, d\mu$ para toda $u \in D^*$.

Es fácil comprobar que la estructura de preorden sobre H_0 así definida es compatible con la estructura de espacio vectorial, así cómo el siguiente resultado.

Teorema 3.5. El conjunto D de elementos de H_0 tales que son menos preferidos o indiferentes a 0, según el preorden $\gtrsim_{D^*}$, es decir

$$D = [f \in H_0 : 0 \gtrsim_{D^*} f] = [f \in H_0 : \int fu\, d\mu \leqslant 0 \text{ para toda } u \in D^*], \qquad (3.1)$$

es un cono convexo con vértice en el origen.

Recíprocamente, si D es un cono convexo con vértice en el origen, la relación

$$f \gtrsim_D g \text{ sí y sólo si } g - f \in D,$$

es una relación de preorden en H_0 y es la única que es compatible con la estructura de espacio vectorial para la que D sea el conjunto de los elementos menos preferidos o indiferentes que 0.

Así pues, a cada $D^* \subset U$ le corresponde un único cono convexo con vértice en el origen, D, tal que: si $f \gtrsim_{D^*} g$, entonces $g - f \in D$. (Véase Bourbaki (1966)).

Otras propiedades interesantes de los conos D son:

Teorema 3.6. D es cerrado respecto de la topología usual de $L_1(\mu)$.

Teorema 3.7. Si $f \in D_1$ y $u \in U$, siempre se verifica que $\int fu \, d\mu \leqslant 0$, y por tanto $0 \gtrsim_{D^*} f$ cualquiera que sea $D^* \subset U$.

Demostración.– Consecuencia del teorema 3.3.

Por lo tanto el cono D definido por (3.1) es un elemento de la clase $\mathfrak{D}$ y según lo visto, podemos establecer una aplicación $\varphi: D^* \to D$, donde D está dado por (3.1), tal que $f \gtrsim_{D^*} g$ sí y sólo si $g - f \in D$.

Para nuestro propósito interesará que esta aplicación sea biunívoca pero, como exponemos a continuación, no es inyectiva. Para solventar este problema bastará con exigir que D sea un cono convexo, cerrado en la *topología débil** y saturado.

El siguiente resultado pone de manifiesto que las operaciones de convexificación, clausura (respecto de la topología débil*) y saturación generan el mismo preorden.

Teorema 3.8. Si $D^* \subset U$, entonces $\varphi(D^*) = \varphi(co\ (D^*)) = \varphi(\overline{D}^*) = \varphi(s\ (D^*)) = D$, siendo D el dado por (3.1).

Puesto que estas tres operaciones se pueden realizar en distinto orden sobre un conjunto D^*, nos interesará aquella que proporcione el mayor conjunto.

Teorema 3.9. Si $D^* \subset U$, entonces

$$a)\ co\ (s\ (D^*)) = s\ (co\ (D^*)$$

$$b)\ s\ (\overline{D}^*) \subset \overline{s\ (D^*)}$$

$$c)\ co\ (\overline{D}^*) \subset \overline{co}\ (D^*).$$

Corolario 3.1. Si $D^* \subset U$ se verifica que

$$\begin{array}{ccccc} s(co\ (\overline{D}^*)) & \subset & s(\overline{co}\ (D^*)) & \subset & \overline{s(co\ (D^*))} \\ \| & & & & \| \\ co(s\ (\overline{D}^*)) & \subset & co(\overline{s\ (D^*)}) & \subset & \overline{co}(s\ (D^*)). \end{array}$$

Cómo consecuencia inmediata de estos resultados y del teorema 3.8 se tiene

Corolario 3.2. D^*, $\overline{co}(s\ (D^*))$ y $\overline{s(co\ (D^*))}$ generan el mismo preorden en H_0, es decir,

$$\varphi(D^*) = \varphi(\overline{co}\ (s\ (D^*))) = \varphi(\overline{s\ (co\ (D^*))}).$$

A la vista de este resultado, parece lógico que debemos restringirnos a la clase de los subconjuntos de U que son conos convexos, con vértice en el origen, cerrados en la topología débil* y saturados. Dicha clase la representaremos por $\mathfrak{D}^*$.

La idea básica de nuestro estudio es poder establecer esta aplicación biunívoca mediante la teoría de la dualidad. Este estudio se podría simplificar si el espacio $L_1(\mu)$ fuese reflexivo pero, como es bien sabido, salvo en el caso de que la medida μ sea atómica con un número finito de átomos, no es reflexivo. Esta dificultad se supera considerando la topología débil* y utilizando el siguiente concepto.

Definición 3. 10. Si D^* es un cono convexo con vértice en el origen de $L_\infty(\mu)$, se llama *polar restringido de* D^*, al conjunto

$$pr\ (D^*) = D = [f \in L_1(\mu) : x^*(f) \leqslant 0 \text{ para todo } x^* \in D^*].$$

Es fácil comprobar que $pr(D^*)$ es un cono convexo con vértice en el origen y cerrado de $L_1(\mu)$. Además, si $D^* \subset U$, entonces $D_1 \subset pr(D^*)$, es decir que $pr(D^*)$ pertenece a la clase $\mathfrak{D}$.

Análogamente, remitiéndonos a la definición 3.8, si D es un cono covexo con vértice en el origen de $L_1(\mu)$ y tal que pertenece a la clase $\mathfrak{D}$, se tiene que $p\ (D)$ pertenece a la clase $\mathfrak{D}^*$.

Teorema 3.10. Si D es un cono de H_0 pertenece a la clase $\mathfrak{D}$, se verifica que $pr(p\ (D)) = D$. Análogamente, si D^* es cono de U perteneciente a la clase $\mathfrak{D}^*$, se verifica que $p(pr(D^*)) = D^*$.

Demostración.— Las inclusiones en un sentido son triviales y para demostrarlas en el otro, basta utilizar el teorema 2.5, de Klee (1955) de forma análoga que en el teorema 3.3.

Como consecuencia de todo lo expuesto tenemos el siguiente resultado fundamental.

Teorema 3.11. La aplicación φ: $\mathfrak{D}^* \to \mathfrak{D}$ es biunívoca y tal que

$$\varphi(D^*) = pr(D^*) \text{ y } \varphi^{-1}(D) = p(D).$$

Como casos particulares de este resultado se obtienen todos los teoremas de utilidad esperada y los teoremas de dominancia estocástica, pero no proporciona la caracterización de las aristas de los conos correspondientes.

Entre estos se encuentran los resultados, ya conocidos, para los casos extremos de la dominancia estocástica, a saber:

a) Ignorancia total acerca de la función de utilidad, es decir, cuando $D^* = U$. Entonces se tiene que $D = D_1$ (teorema 3.3).

b) Conocimiento total de la función de utilidad, es decir, cuando $D^* = \alpha u + \beta$. Entonces se tiene que D es un semiespacio, el cual determina un preorden completo.

Hasta aquí hemos caracterizado las dominancias estocásticas no estrictas. A continuación vamos a ver que las dominancias estrictas se caracteri zan mediante los polares estrictos (definición 3.12) de los conos $D \in \mathfrak{D}$ ·

Definición 3.11. Si K es un cono convexo y con vértice en el origen, se denomina *espacio de linealidad* de K, y lo representamos por $L(K)$, a la máxi ma variedad lineal contenida en K.

Se demuestra, (véase Bourbaki (1966)), que $L(K) = K \cap (-K)$.

Definición 3.12. Si K es un cono convexo con vértice en el origen de $L_1(\mu)$, se llama *polar esticto* de K, y lo representamos por K^{*+}, al conjunto

$$K^{*+} = [x^* \in L_\infty(\mu)\colon x^*(f) < 0 \text{ para todo } f \in K - L(K)].$$

Evidentemente, K^{*+}, si existe, es un subconjunto convexo de $K^* = p(K)$.

En el caso particular de que $K = D_1$,

$$D_1^{*+} = [u \in U\colon u(f) < 0 \text{ para todo } f \in D_1 - [0]].$$

El polar estricto del cono D_1 queda caracterizado mediante U^+. Para la demostración necesitamos un nuevo resultado, una generalización de la integración por partes para las funciones que manejamos, que damos a continuación.

La notación que utilizamos a partir de ahora es la siguiente: Dada $f \in D_1$, representaremos, por analogía con la función de distribución, por

$$F(x) = \int_{(-\infty, x]} f(y)\, d\mu(y), \quad F(x-0) = \int_{(-\infty, x)} f(y)\, d\mu(y) \tag{3.2}$$

donde $F(x - 0) = F(x)) - \mu_f([x])$. Evidentemente, F es una función continua por la derecha, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 0$ pero no es necesariamente creciente.

Por $M(x)$ representamos la función de distribución Lebesgue–Stieltjes de la medida μ.

Para cada $u \in U$ representaremos por $\bar{u}$ la función de utilidad obtenida a partir de u haciendola continua por la derecha. De modo que si en los puntos x_i, *donde la función u no es contínua por la derecha,* llamamos $u_i = u(x_i + 0) - u(x_i)$, entonces

$$\bar{u}(x) = u(x) + \sum_i u_i I_{(x_i)}(x). \tag{3.3}$$

Al conjunto de los puntos x_i anteriores lo representaremos por $D^*(u)$.

Teorema 3.12. *(Generalización de la integración por partes).* Si u es una función de utilidad cualquiera y $\bar{u}$ es la definida en (3.3.) y si $f \in D_1$ y F es la función definida por (3.2.),

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, dF(x) = -\int_{\mathbb{R}} F(x-0)\, d\bar{u}(x) - \sum_i u_i \mu_f([x_i])$$

donde

$$\mu_f([x_i]) = F(x_i) - F(x_i - 0).$$

Demostración.— Véase Martínez (1981).

La fórmula anterior se simplifica en el caso de que los conjuntos $D^*(u)$ y $D(M)$, puntos donde la función $M(x)$ es discontinua, sean disjuntos, pues entonces $\mu_f([x_i]) = 0$.

Para dar una expresión más conveniente para nuestro estudio de este último resultado, definimos una función, que representaremos por $F_u(x)$, de la forma

$$F_u(x) = \begin{cases} F(x-0) = F(x) & \text{si } x \notin D(M) \\ \dfrac{u(x+0) - u(x)}{u(x+0) - u(x-0)} F(x) + \dfrac{u(x) - u(x-0)}{u(x+0) - u(x-0)} F(x-0) & \text{si } x \in D(M) \end{cases}$$

haciendo la salvedad de que si la función u es continua en $D(M)$, se toma $0/0$ cómo un valor constante cualquiera.

Teorema 3.13. Si $u \in U^+$ y $f \in D_1$ y las funciones F, $\bar{u}$ y F_u son las definidas anteriormente, siempre se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\, d\, F(x) = -\int_{\mathbb{R}} F_u(x)\, d\bar{u}(x).$$

Teorema 3.14. U^+ es el polar estricto de D_1, es decir, $D_1^{*+} = U^+$.

Demostración:

a) $U^+ \subset D_1^{*+}$. Si $u \in U^+$ y $f \in D_1 - [0]$, sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, dF(x) \leqslant 0,$$

además, puesto que $f \in D_1 - [0]$, se tiene que $F(x) \geqslant 0$, existiendo al menos un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F(x_0) > 0$, lo que implica que $F_u(x) \geqslant 0$ y por el teorema 3.13, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\, dF(x) = - \int_{\mathbb{R}} F_u(x)\, d\bar{u}(x) \leqslant 0,$$

pero si fuese $\int_{\mathbb{R}} u(x)\, dF(x) = 0$, entonces $\int_{\mathbb{R}} F_u(x)\, d\bar{u}(x) = 0$, y teniendo en cuenta el teorema 1.6.6.b) de Ash (1972), esto implicaría que $F_u(x) \equiv 0$ c.s.$(\bar{u})$, y por ser $\bar{u}$ estrictamente μ–creciente, $F_u(x) \equiv 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $F(x) \equiv 0$ para todo x, lo cual contradice la hipótesis de que $f \in D_1 - [0]$.

Luego si $u \in U^+$ y $f \in D_1 - [0]$ $\int_{\mathbb{R}} uf\, d\mu < 0$, es decir que $u \in D_1^{*+}$.

b) $D_1^{*+} \subset U^+$. Sea $x^* \in D_1^{*+}$ y supongamos que $x^* \notin U^+$. Puesto que $x^* \in U$, existirá al menos un intervalo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, siendo $\mu(I) > 0$, en el cual la función x^* es constante, es decir, $x^*(x) = k$ para todo $x \in I$.

Consideremos la función

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin I \\ 1 & \text{si } x \in (a, c] \\ -\dfrac{\mu(a, c)}{\mu(c, b)} & \text{si } x \in (c, b) \end{cases}$$

siendo c un punto perteneciente a I tal que $\mu(c) = 0$. Evidentemente $f_0 \not\equiv 0$, $F_0(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y además $\int_{\mathbb{R}} f_0\, d\mu = \int_I f_0\, d\mu = 0$, por tanto $f_0 \in D_1 - [0]$. Se tiene entonces que $\int_{\mathbb{R}} x^* f_0\, d\mu = k \int_I f_0\, d\mu = 0$, lo cual contradice la hipótesis de que $x^* \in D_1^{*+}$, luego $x^* \in U^+$.

Sea $D \in \mathfrak{D}$, el espacio de linealidad $L(D)$ representa todos los puntos de H_0 que son indiferentes a 0 respecto del preorden dado en la definición 3.9 (véase Bourbaki (1966)). Entonces la relación de preorden estricto generada por el cono D estará definida en la forma

$$f >_D g \quad \text{sí y sólo si} \quad g - f \in D - L(D).$$

Nuestro objetivo ahora es demostrar que este preorden estricto coincide con el preorden estricto que se define a partir del polar estricto del cono D, $D^{*+} \subset U$, es decir, con

$$f >_{D^{*+}} g \quad \text{sí y sólo si} \quad \int fu\, d\mu > \int gu\, d\mu \quad \text{para todo } u \in D^{*+}.$$

La primera cuestión importante es la de la existencia del polar estricto de cualquier cono $D \in \mathfrak{D}$.

Teorema 3.15. Si $D \in \mathfrak{D}$, entonces $D^{*+} \neq \phi$.

Demostración.– Se obtiene aplicando el teorema 2.7 de Klee (1955).

Teorema 3.16. Si $D \in \mathfrak{D}$ y D^{*+} es su polar estricto

$$f >_D g \text{ sí y sólo si } \int fu \, d\mu > \int gu \, d\mu \text{ para todo } u \in D^{*+}.$$

Demostración.– Si $f >_D g$ entonces $g - f \in D - L(D)$ y por tanto para toda $u \in D^{*+}$, $\int (g - f) \, u \, d\mu < 0$ de donde se obtiene el resultado deseado.

Si $\int fu \, d\mu > \int gu \, d\mu$ para toda $u \in D^{*+}$, puesto que D^{*+} está contenido en $p(D)$, podemos asegurar que $f \gtrsim_D g$. Ahora bien, si fuese $f \sim_D g$ esto indicaría que $f - g \in L(D)$ pero entonces para toda u de D^{*+} se tendría que $\int (f - g) \, u \, d\mu = 0$, lo cual contradice la hipótesis.

BIBLIOGRAFIA

[1] ASH, R. B.: "Real analysis and Probability". *Academic Press.* (1972).

[2] BOURBAKI, N.: "Espaces vectoriels topologiques". Fascicule XV, Chap. 1 et 2. Hermann. París (1966)

[3] FISHBURN, P.: "Utility Theory for Decision Making". J. Wiley. (1970)

[4] GIRON, F. J.: Probabilidad y utilidad: conceptos duales de la teoría de la decisión". Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Tomo LXXIII, cuad. 2°. 225–230. (1979).

[5] KLEE, V. L.: "Separation properties of convex cones". *Proc. Amer. Soc.* 6, 313–318. (1955).

[6] LEHMANN, E.: "Testing Statistical Hypotheses". Wiley. (1959).

[7] MARTINEZ, M. L.: Contribuciones a la teoría de la dominancia estocástica". Tesis Doctoral. Universidad de Málaga. (1981)

[8] PRIETO, E.: "Algunas caracterizaciones de la utilidad y de preórdenes parciales". Tesis Doctoral. Universidad Complutense. Madrid. (1979).

Universidad de Málaga