Variedades cociente de variedades con borde anguloso. Teorema de existencia

Por Juan Margalef Roig
y Enrique Outerelo Dominguez

Recibido: 2 Noviembre 1983

Presentado por el Académico numerario D. José Etayo Miqueo

Resumen

En [1],pág. LG. 3. 27, J. SERRE da una demostración de un teorema de Godement, en donde se establece una condición necesaria y suficiente para la existencia de variedades cociente, en términos de la relación de equivalencia y para el caso de variedades diferenciables de dimensión finita y sin borde.

Asimismo en [2] se enuncia sin demostración el mismo resultado para el caso de variedades de dimensión infinita y sin borde.

En el presente trabajo se generaliza este teorema al caso de dimensión infinita y varieades diferenciable que pueden tener borde anguloso.

En lo sucesivo por variedad diferenciable se entenderá variedad de clase $p (p \in N \cup \{+\infty\})$, modelada sobre abiertos de cuadrantes de espacios de Banach reales ([3]) y [4]).

Definición 1.— Sean X, X' variedades diferenciables, f una aplicación de clase p de X en X' y x un punto de X. Se dice que f es una sumersión en x, si existe V entorno abierto de $f(x)$ en X' y existe s aplicación de clase p de V en X tal que $sf(x) = x$ y $fs(x') = x'$ para todo x' de V.

Se dice que f es sumersión, si f es sumersión en todo punto de X. Es claro que toda sumersión es una aplicación abierta.

Proposición 2.— Sean f una sumersión suprayectiva y de clase p de X sobre X', X'' una variedad diferenciable de clase p y g una aplicación de X' en X''. Entonces g es de clase p si y solo si gf es de clase p. $\square$

Es inmediato también que la composición de sumersiones es una sumersión.

Proposición 3.— Si f es una sumersión de clase p en x, $T_x f$ es lineal contínua y suprayectiva y su núcleo admite suplementario topológico en $T_x X$. Ahora bien si $x \in$ int. (X), estas condiciones sobre $T_x f$ son suficientes para garantizar que f sea una sumersión en x. $\square$

Proposición 4.– Sea f una aplicación de clase p de X en X' y $x \in B_k X$ ($B_k(X)$ designa al conjunto de puntos de índice k de la variedad X). Supongamos que $x' = f(x) \in \operatorname{int} X'$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es sumersión en x.

b) Existe $(U, \varphi, (ExGxR^k, \Lambda.p_3))$ carta de X centrada en x, existe (B, γ, E) carta de X' centrada en x' tales que $f(U) \subset B$ y $\gamma f \varphi^{-1} : \varphi(U) \to E$ es la proyección primera. (p_3 es la proyección de $ExGxR^k$ sobre R^k y $\Lambda = \{p'_1, \dots, p'_k\}$, donde p'_i es la proyección i–ésima de R^k sobre R. Por tanto

$(ExGxR^k)^+_{\Lambda.p_3} = ExGx(R^k)^+_\Lambda$).

Demostración

a) $\Rightarrow$ *b*) Sea $c_1 = (U_1, \varphi_1, (E_1, \Lambda_1))$ carta de X centrada en x y $c' = (V', \varphi', E')$ carta de X' centrada en x' tales que $f(U_1) \subset V'$.

Sea $g = \varphi' f \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \to E'$.

Como $\operatorname{card}(\Lambda_1) = k$, existen $v_1, \dots, v_k \in E_1$, linealmente independientes tales que $E = E^\circ_{1\Lambda_1} \oplus_T L\{v_1, \dots, v_k\}$. De hecho $v_1, \dots, v_k \in E^+_{1\Lambda_1}$. Por otro lado $T_x f T_x j(T_x B_k X) = T_{x'} X'$ y $\ker(T_x f T_x j)$ admite suplementario topológico en $T_x B_k X$ y por tanto $Dg(0)(E^\circ_{1\Lambda_1}) = E'$, $\ker(Dg(0)|_{E^\circ_{1\Lambda_1}}) = G$ admite suplementario topológico, E, en $E^\circ_{1\Lambda_1}$ y $Dg(0)|_E$ es homeomorfismo lineal de E sobre E'.

Así

$$\theta : ExGxR^k \to E^\circ_{1\Lambda_1} x R^k \to E_1$$

$$(v, u, x_1, \dots, x_k) \to (v + u, x_1, \dots, x_k) \to v + u + x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$$

es un homeomorfismo lineal.

Puesto que $\theta^{-1}\varphi_1(U_1)$ es un abierto de $ExGx(R^k)^+_{(p_1, \dots, p_k)} = (ExGxR^k)^+_{\Lambda_1 \theta}$ que contiene al cero, se verifica que existe A_1 entorno abierto de cero en E, existe A_2 entorno abierto de cero en G y existe A_3 entorno abierto de cero en $(R^k)^+_{(p_1, \dots, p_k)}$ tales que $A = A_1 x A_2 x A_3 \subset \theta^{-1}\varphi_1(U_1)$.

Sea la aplicación de clase p, $h = g\theta|_A : A \to E'$. Entonces $D_1 h(0, 0, 0) \in \mathcal{L}(E, E')$ es un homeomorfismo lineal ya que $D_1 h(0,0,0) = Dg(0)|_E$. Sea la aplicación $\psi : A \to ExGx(R^k)^+_{(p_1, \dots, p_k)}$ definida por

$$\psi(y_1, y_2, y_3) = (D_1 h(0, 0, 0)^{-1} h(y_1, y_2, y_3), y_2, y_3).$$

Es claro que ψ es de clase p, $\psi(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $D\psi(0, 0, 0)$ es un homeomorfismo lineal y

$$\psi(\partial A) \subset \partial(ExGx(R^k)^+_{(p_1, \dots, p_k)}) = ExGx\partial(R^k)^+_{(p_1, \dots, p_k)}$$

Aplicando el teorema de la función inversa, [5], a ψ, se tiene que existe U^* entorno abierto de (0,0,0) en A y existe V^* entorno abierto de (0,0,0) en $ExGx(R^k)^+_{(p_1, \ldots, p_k)}$ tales que $\psi|_{U^*}$ es un difeomorfismo de clase p de U^* sobre V^*. Así $\alpha = \varphi_1^{-1}|_{\theta(U^*)}\theta \,.\, (\psi|_{U^*})^{-1}$ es un difeomorfismo de clase p y las cartas $(\varphi_1^{-1}\theta(U^*), \alpha^{-1}, (ExGxR^k, \Lambda_1\theta))$ y $(U', (Dg(0)|_E)^{-1}\varphi', E)$ cumplen las condiciones del enunciado.

b) $\Rightarrow$ *a*) Es inmediato. □

Proposición 5.– Sea $f : X \to X'$ aplicación de clase p, Y' una subvariedad de X' tal que $Y' \subset \operatorname{int} X'$. Supongamos que para todo $x \in f^{-1}(Y')$, f es sumersión en x. Entonces se tiene:

a) $f^{-1}(Y')$ es una subvariedad de X.

b) Para todo $x \in f^{-1}(Y')$, el índice de x en $f^{-1}(Y')$ es la suma del índice de x en X y el índice de $f(x)$ en Y'. Por tanto $\partial(f^{-1}(Y')) = f^{-1}(\partial Y') \cup (f^{-1}(Y') \cap \partial X')$.

c) Para todo $x \in f^{-1}(Y')$, $T_x f^{-1}(Y') = (T_x f)^{-1}(T_{f(x)} Y')$.

Es consecuencia de la proposición anterior. □

Definición 6.– Sea X una variedad diferenciable de clase p y S una relación de equivalencia en X. Se dice que S es regular, si existe una estructura diferenciable de clase p en el conjunto cociente X/S tal que la proyección natural q de X sobre X/S sea una sumersión de clase p.

Se comprueba sin dificultad, utilizando la proposición 2, que si existe una tal estructura, ésta es única y se le llama estructura cociente y a la variedad correspondiente se le llama variedad cociente.

Si $T_x f$ es suprayectiva, se deduce que $f(x)$ tiene índice cero. Entonces se tiene que si $\partial X = \phi$ y S es regular en X, $\partial(X/S) = \phi$

En [2] se enuncia sin demostración el siguiente teorema:

Teorema 7.– Sea X una variedad diferenciable de clase p y S una relación de equivalencia en X.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) S es regular.
b) S es una subvariedad sin borde de XxX y $p_1|_S : S \to X$ es una sumersión de clase p.
c) S es una subvariedad sin borde de XxX y para todo $(x, y) \in S$ existe un entorno abierto, U, de x en X y existe una aplicación de clase p, f, de U en X tal que $f(x) = y$ y para todo $z \in U$, $(z, f(z)) \in S$.

Este teorema es un caso particular del siguiente:

Teorema 8.– Sea X una variedad diferenciable de clase p y S una relación de equivalencia en X.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) S es regular y $\partial(X/S) = \phi$.

b) S es una subvariedad bien situada de XxX, es decir $\partial(S) = \partial(XxX) \cap S$, $p_1|_S : S \to X$ es una sumersión de clase p y $S(\text{int } X) = X$.

c) S es una subvariedad bien situada de XxX; para todo $(x, y) \in S$ existe un entorno abierto, U, de x en X y existe $f : U \to X$ de clase p tal que $f(x) = y$, y $(z, f(z)) \in S$ para todo $z \in U$; y $S(\text{int } X) = X$.

Demostración

b) $\Rightarrow$ *c*). Sea $(x, y) \in S$. Como $p_1|_S$ es sumersión en (x, y), existe W, entorno abierto de x en X y existe $s : W \to S$ de clase p tal que $s(x) = (x, y)$ y para todo $z \in W$, $(p_1|_S)\, s(z) = z$. Se considera la aplicación de clase p, $f : W \to X$, definida por $f(z) = p_2 s(z)$. Es claro que $f(x) = y$, y que para todo $z \in W$, $(z, f(z)) = s(z) \in S$.

c) $\Rightarrow$ *b*). Sea $(x, y) \in S$. Por hipótesis existe U entorno abierto de x en X y existe $f : U \to X$ de clase p tal que $f(x) = y$, $(z, f(z)) \in S$ para todo $z \in U$.

Entonces $s : U \to S$ definida por $s(z) = (z, f(z))$, es de clase p, $s(x) = (x, y)$ y $(p_1|_S)\, s(z) = z$ para todo z de U. Así $p_1|_S$ es una sumersión en (x, y).

a) $\Rightarrow$ *c*). Por hipótesis $q : X \to X/S$ es sumersión de clase p por tanto qxq es también sumersión.

Como $\partial(X/S) = \phi$, la diagonal $\tilde{\Delta}$ es una subvariedad de clase p de $X/Sx X/S$ y por la proposición 5 se tiene que $(qxq)^{-1}(\tilde{\Delta}) = S$ es subvariedad de clase p de XxX tal que $\partial(S) = S \cap \partial(XxX)$ y por tanto S esta bien situada en XxX.

Lema 1. Sea X una variedad diferenciable de clase p y S una relación de equivalencia regular en X. Entonces $S(\text{int } X) = X$ si y solo si $\partial(X/S) = \phi$.

Demostración del Lema 1. Es inmediato que si $S(\text{int } X) = X$, entonces $\partial(X/S) = \phi$. Supongamos que $\partial(X/S) = \phi$ y sea $x \in \partial X$. Entonces $x \in B_k(X)$ para algún $k \geqslant 1$. Como $q : X \to X/S$ es una sumersión, por la proposición 4 existe $(U, \varphi, (ExGxR^k, \Lambda p_3))$ carta de X centrada en x, existe (B, γ, E) carta de X/S centrada en $q(x)$ tales que $q(U) \subset B$ y $\gamma q \varphi^{-1} : \varphi(U) \to E$ es la proyección primera.

Puesto que $\varphi(U)$ es abierto en $ExGx(R^k)^+_\Lambda$, existe $a \in \text{int}(R^k)^+_\Lambda$ tal que $(0, 0, a) \in \varphi(U)$. Es claro que $y = \varphi^{-1}(0, 0, a) \in \text{int } X$ y $\gamma q(y) = 0 = \gamma q(x)$. Es decir $q(x) = q(y)$ y por tanto xSy. □

Por el lema anterior se tiene que $S(\text{int } X) = X$.

Sea $(x,y) \in S$. Puesto que q es sumersión en y, existe V entorno abierto de $q(y)$ en X/S y existe $s: V \to X$ de clase p tal que $y = sq(y)$ y $qs(z) = z$ para todo $z \in V$. Entonces $q^{-1}(V) = U$ es un entorno abierto de x en X y $f = sq|_U$ es una aplicación de clase p de U en X. Además $y = f(x)$ y $(t, f(t)) \in S$ para todo $t \in U$.

$b) \Rightarrow a)$

Esta implicación resultará de una sucesión de lemas.

Lema 2. Sea X una variedad de clase p y S una relación de equivalencia *en* X. Supongamos que S es una subvariedad de XxX y que $p_1|_S : S \to X$ es sumersión de clase p. Entonces $p_2|_S : S \to X$ es sumersión de clase p. □

Lema 3. Sea X una variedad de clase p y S una relación de equivalencia en X tal que $p_2|_S : S \to X$ es abierta. Entonces $q : X \to X/S$ es continua y abierta, considerando en X/S la topología cociente.
Basta observar que $q^{-1}q(U) = S(U) = (p_2|_S)((UxX)) \cap S)$. □

Lema 4. Sea X una variedad de clase p y S una relación de equivalencia en X. Supongamos que S es una subvariedad de XxX y que $p_1|_S : S \to X$ es sumersión de clase p. Sea U un abierto de X tal que $q^{-1}q(U) = X$ y $S_U = (UxU) \cap S$. Entonces S_U es regular en U si y sólo si S es regular en X. (q:$X \to X/S$).

Demostración del Lema 4. Supongamos que S_U es regular en U. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q_U"'] & X \arrow[d, "q"] \\ U/S_U \arrow[r, "\hat{f}"] & X/S \end{tikzcd}$$

donde $\hat{f}q_U(x) = q(x)$. Entonces $\hat{f}$ es biyectiva y existe una única estructura diferenciable de clase p en X/S tal que $\hat{f}$ es un difeomorfimo de clase p. Todo se reduce a probar que q es sumersión de clase p, al considerar dicha estructura. Para lo cual consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(UxX)\cap S \arrow[r, "p_2|_{(UxX)\cap S}"] \arrow[d, "P_1|_{(UxX)\cap S}"] & X \arrow[d, "\hat{f}^{-1}q"] \\
U \arrow[r, "q_U"] & U/S_U
\end{tikzcd}$$

Como $p_2|_{(UxX)\cap S}$ es sumersión suprayectiva de clase p y $\hat{f}^{-1}qp_2|_{(UxX)\cap S}$ es sumersión de clase p, $\hat{f}^{-1}q$ es sumersión de clase p y por tanto q también lo es. Luego S es regular en X.

Supongamos ahora que S es regular en X. Teniendo en cuenta el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q|_U"] & X \arrow[d, "q"] \\
U/S_U \arrow[r, "\hat{f}"] & X/S
\end{tikzcd}$$

existe una estructura diferenciable de clase p en U/S_U tal que $\hat{f}$ es un difeomorfismo de clase p. Además como i es sumersión de clase p, se tiene que $q|_U$ es sumersión de clase p y S_U es regular en U.□

Lema 5. Sea X una variedad de clase p y S una relación de equivalencia en X tal que $p_2|_S:S \longrightarrow X$ es abierta. Supongamos que $X = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ donde U_i es abierto saturado de X, es decir $q^{-1}q(U_i) = U_i$ para todo $i \in I$ y supongamos que S_{U_i} es regular en U_i para todo $i \in I$.

Entonces S es regular en X $(q:X \longrightarrow X/S)$.

Demostración del Lema 5. Con la notación S_{U_i} queremos indicar la relación $(U_i x U_i) \cap S$. Por el lema 3 para todo $i \in I$, $q(U_i)$ es abierto en X/S con la topología cociente T_c.

Para todo $i \in I$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[d, "q_{U_i}"] & X \arrow[d, "q"] \\
U_i/S_{U_i} \arrow[r] & X/S
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha_i q_{U_i}(x) = q(x)$.

Es claro que α_i es una biyección de U_i/S_{U_i} sobre $q(U_i)$ para todo i de I: así existe una única estructura diferenciable de clase p,$[A_i]$, sobre $q(U_i)$ tal que α_i es un difeomorfismo de clase p.

Deducimos que $q:U_i \longrightarrow (q(U_i), [A_i])$ es una sumersión y por tanto una aplicación continua y abierta. Así $T_{[A_i]} = T_c|_{q(U_i)}$.

Por otra parte $q(U_i \cap U_j) = q(U_i) \cap q\ (U_j)$ es abierto en $(q(U_i), [A_i])$ y en $(q(U_j), [A_j])$ para todo $i, j \in I$. Así

$$q:U_i \cap U_j \longrightarrow (q(U_i \cap U_j), [A_i]|_{q(U_i \cap U_j)})$$

$$q:U_i \cap U_j \longrightarrow (q(U_i \cap U_j), [A_j]|_{q(U_i \cap U_j)})$$

son sumersiones suprayectivas de clase p y por tanto las dos estructuturas coinciden. Luego existe una única estructura de variedad c^p $[A]$ en X/S tal que para todo $i \in I$, $q(U_i)$ es abierto de $T_{[A]}$ y $[A]|_{q(U_i)} = [A_i]$.

Además $q:X \longrightarrow (X/S, [A])$ es sumersión de clase p y por tanto S es regular en X. □

Lema 6. Sea X una variedad de clase p y S una relación de equivalencia en X tal que S es subvariedad de XxX y $p_1|_S:S \longrightarrow X$ es sumersión de clase p. Supongamos que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, donde U_i es abierto de X, y que S_{U_i} es regular en U_i. Entonces S es regular en X.

Demostración del Lema 6. Por el lema 2, $p_2|_S$ es abierta y por el lema 3, $q:X \longrightarrow X/S$ es continua y abierta, considerando en X/S la topología cociente T_c.

Así $V_i = q^{-1}q(U_i)$ es abierto saturado de X para todo $i \in I$ y además $X = \bigcup_{i \in I} V_i$. Por otra parte $(V_i\ xV_i) \cap S$ es una subvariedad de $V_i x V_i$ y $p_1|_{(V_i\, x V_i) \cap S}: (V_i x V_i) \cap S \longrightarrow V_i$ es una sumersión de clase p luego por el lema 4 aplicado a V_i, S_{V_i} es regular en V_i. Por último por el lema 5, S es regular en X. □

Lema 7. Sea X una variedad de clase p y S una relación de equivalencia en X tal que S es una subvariedad de XxX. Designamos por j la inclusión de S en XxX. Entonces para todo x de X se verifica que $N_x = \{v \in T_xX/(v,0) \in (T_{(x,x)}p_1, T_{(x,x)}p_2)T_{(x,x)}j(T_{(x,x)}S)\}$ es un subespacio lineal de T_xX que admite un suplementario topológico, K_x, en T_xX.

Demostración del Lema 7. Como $\Delta \subset S$, si k: $\Delta \longrightarrow S$, se verifica que

$$T_{(x,x)}k(T_{(x,x)}\ \Delta) \subset T_{(x,x)}S;$$

$$H = (T_{(x,x)}p_1, T_{(x,x)}p_2)T_{(x,x)}j(T_{(x,x)}S) \subset T_xX \times T_xX.$$

Además

$$(T_{(x,x)}p_1\,,\,T_{(x,x)}p_2)\,T_{(x,x)}j\,T_{(x,x)}k(T_{(x,x)}\,\Delta) =$$

$$= (T_{(x,x)}p_1\,,\,T_{(x,x)}p_2)T_{(x,x)}i(T_{(x,x)}\,\Delta)$$

es la diagonal D de T_xXxT_xX, donde i: $\Delta \longrightarrow XxX$. Puesto que D y $T_xXx\{0\}$ son subespacios lineales cerrados de T_xXxT_xX tales que

$$D \cap (T_xXx\{0\}) = \{(0,0)\} \text{ y } D + T_xXx\{0\} = T_xXxT_xX,$$

se tiene que

$$D \oplus_T (T_xXx\{0\}) = T_xXxT_xX.$$

Sea θ el homeomorfismo lineal:

$$\theta\colon Dx(T_xXx\{0\}) \longrightarrow T_xXxT_xX$$

$$((u,u),(v,0)) \longrightarrow (u+v,u)$$

N_x es también un subespacio lineal cerrado de T_xX que cumple

$$D \cap (N_x x\{0\}) = (0,0) \text{ y } D + (N_x\ x\{0\}) = H.$$

Por tanto D y $N_x\ x\{0\}$ son suplementarios topológicos y

$$\theta_1\colon H \longrightarrow Dx(N_x\ x\{0\})$$

$$(u,v) \longrightarrow ((v,v),(u-v,0))$$

es el homeomorfismo lineal canónico.

Como H admite suplementario topológico en T_xXxT_xX, existe una aplicación lineal continua q de T_xXxT_xX en T_xXxT_xX tal que $qq = q$ y $H = im\ q$. Se considera la aplicación lineal continua y suprayectiva

$$\alpha = \theta_1 q\theta\colon Dx(\mathrm{T}_xX\ \ x\{0\}) \longrightarrow Dx(N_x\ x\{0\}) \subset Dx(T_xXx\{0\}).$$

Es claro $\alpha\alpha = \alpha$ y que $\alpha((v,v),(0,0)) = ((v,v),(0,0))$.

Sea el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Dx(T_xX\,x\{0\}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "q_1"'] & Dx(N_x\ x\{0\}) \arrow[d, "q_2"] \\
\dfrac{Dx(\mathrm{T}_xX\,x\{0\})}{Dx\{(0,0)\}} \arrow[r, "\overline{\alpha}"] & \dfrac{Dx(N_x x\{0\})}{Dx\{(0,0)\}}
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{\alpha}$ es la aplicación lineal continua y suprayectiva definida por

$$\bar{\alpha}(t + Dx\ \{(0,0)\}) = \alpha(t) + Dx\ \{(0,0)\}.$$

Considerando los siguientes homeomorfismos lineales

$$\begin{array}{ccc} \{(0,0)\}x(T_xX\ \ x\{0\}) & \xrightarrow{\quad\lambda\quad} & \dfrac{Dx(T_xX\,x\{0\})}{Dx\ \{(0,0)\}} \\ ((0,0),(v,0)) & \longrightarrow & [(0,0),(v,0)] \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{Dx(N_x\ x\{0\})}{Dx\,\{(0,0)\}} & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & \{(0,0)\}x(N_x\ x\{0\}) \\ [((v,v),(u,0))] & \longrightarrow & ((0,0),(u,0)) \end{array}$$

se tiene la aplicación lineal contínua y suprayectiva:

$$\pi = \psi\bar{\alpha}\lambda : \{(0,0)\}x(\mathrm{T}_xX\,x\{0\}) \longrightarrow \{(0,0)\}x\ (\mathrm{N}_x\ x\{0\}).$$

Entonces $\pi\pi = \pi$ y por tanto N_x admite suplementario topológico en T_xX.□

Lema 8 Sea X una variedad de clase p sin borde y S una relación de equivalencia en X tal que S es una subvariedad de clase p sin borde de XxX y $p_1|_S$: $S \longrightarrow X$ es sumersión. Entonces para que todo x de X, existe un abierto U con $x \in U$, existe W subvariedad sin borde de U con $x \in W$ y existe una aplicación de clase p, r, de U en W tal que para todo $y \in U$, $(y, r(\mathrm{y})) \in S$ y $r(y)$ es el único elemento de W tal que $(y, r(y)) \in S$.

Demostración del Lema 8. Con las notaciones del lema 7, si K_x es un suplementario topológico de N_x en T_xX, tomando una carta $c = (V, \varphi, E)$ de X centrada en x, se verifica que $W' = \varphi^{-1}((\theta_c^x)^{-1}(K_x) \cap \varphi(V))$ es una subvariedad sin borde de clase p de X con $x \in W'$ y $T_xj(T_xW') = K_x$ $(j{:}W' \longrightarrow X)$.

Sea el conjunto $\Sigma = (W'\ xX) \cap S$. Como $p_1|_S{:}S \longrightarrow X$ es sumersión, por la proposición 5, $(p_1|_S)^{-1}(W') = \Sigma$ es subvariedad de clase p de S que no tiene borde y tal que

$$T_{(x,x)}(\gamma)T_{(x,x)}(\Sigma) = T_{(x,x)}(p_1|_S)^{-1}(K_x)$$

donde $\gamma{:}\Sigma \longrightarrow S$. Veamos que $p_2|\Sigma$ es un difeomorfismo local de clase p en (x, x). En efecto:

a) $T_{(x,x)}(p_2|\Sigma)$ es suprayectiva. Sea $v \in T_xX$. Por el lema 2, $p_2|_S$ es una sumersión, de donde existe $h \in T_{(x,x)}S$ tal que $T_{(x,x)}(p_2|_S)(h) = v$. Por otra parte

$$(T_{(x,x)}\, p_1,\, T_{(x,x)}p_2)T_{(x,x)}k(h) = (s, t)$$

donde $k\colon S \longrightarrow XxX$ y $t = v$. Además $s = u_1 + u_2$ donde $u_1 \in N_x$ y $u_2 \in K_x$. Por tanto

$$(u_1, 0) \in (T_{(x,x)}p_1, T_{(x,x)}p_2)\, T_{(x,x)}k(T_{(x,x)}S) = H,\ (s, v) \in H \text{ y } (u_2, v) \in H.$$

De donde

$$(u_2, v) = (T_{(x,x)}p_1, T_{(x,x)}p_2)T_{(x,x)}k(l)$$

donde

$$l \in T_{(x,x)}S \quad \text{y} \quad T_{(x,x)}(p_1|_S)(l) = T_x p_1 \cdot (T_{(x,x)}p_1, T_{(x,x)}p_2)^{-1}(u_2, v) = u_2.$$

Así

$$l \in T_{(x,x)}\, \gamma(T_{(x,x)}\Sigma) \text{ y } l = T_{(x,x)}\, \gamma(\alpha)$$

donde $\alpha \in T_{(x,x)}\Sigma$. Por último

$$T_{(x,x)}(p_2|\Sigma)(\alpha) = v.$$

b) $T_{(x,x)}(p_2|\Sigma)$ es inyectiva:

$T_{(x,x)}(p_2|\Sigma)(\beta) = 0$ implica que

$$\overline{p}_2(T_{(x,x)}p_1, T_{(x,x)}p_2)T_{(x,x)}k\, T_{(x,x)}\, \gamma(\beta) = 0$$

y

$$T_{(x,x)}(p_1|\Sigma)(\beta) = \overline{p}_1(T_{(x,x)}p_1, T_{(x,x)}p_2)T_{(x,x)}k\, T_{(x,x)}\, \gamma(\beta).$$

Por tanto si

$$(u, v) = (T_{(x,x)}p_1, T_{(x,x)}p_2)T_{(x,x)}k\, T_{(x,x)}\, \gamma(\beta)$$

se tiene que

$$v = 0,\ u = T_{(x,x)}(p_1|\Sigma)(\beta),\ u \in K_x \text{ y } u \in N_x.$$

Así

$$u = 0 \text{ y } \beta = 0.$$

Por tanto existen U_1, U_2 abiertos de X conteniendo a x tales que $p_2|_{\Sigma\, \cap (U_1 x U_1)}\colon \Sigma \cap (U_1 x U_1) \longrightarrow U_2$ es un difeomorfismo de clase p. Sea f el difeomorfismo inverso. Es claro que f es de la forma $f(x) = (\rho(x), x)$ para todo x de U_2, donde $\rho = p'_1 if$, $i\colon \Sigma \cap (U_1 x U_1) \to W'xX$, $p'_1\colon W'xX \to W'$. Con lo cual ρ es una aplicación de clase p de U_2 en W'. Se comprueba fácilmente que $U_2 \subset U_1$ y que $\rho(x) = x$ para todo $x \in U_2 \cap W'$. Sean $U = \rho^{-1}(W' \cap U_2)$ abierto de X, $W = U \cap W'$ subvariedad de U y $r = \rho|_U$. Además $x \in U$, $\partial W = \phi$, $r(U) \subset W$.

Para todo $y \in U$, $r(y) \in W$ y $f(y) = (r(y), y) \in \Sigma \cap (U_1 \, x U_1) \subset S$. Por último si $y \in U$, $z \in W$ y se cumple que $(z, y) \in S$, entonces

$$(z, y) \in \Sigma \cap (U_1 x U_1), p_2(z, y) = p_2 \ (r(y), y)$$

y por tanto $r(y) = z$.□

Lema 9. En la hipótesis del lema 8, si $x \in X$ y (U, W, r) verifican las condiciones de dicho lema, entonces existe U' abierto en X con $x \in W \subset U' \subset U$ tal que $S_{U'}$ es regular.

Demostración del Lema 9. Si $i: W \longrightarrow U$, se verifica que $ri(y) = r(y) = y$ para todo $y \in W$. Así r es sumersión en todo y de W. Luego

$$U' = \{y \in U / r \text{ es sumersión en } y\}$$

es un abierto de U que contiene a W y $r|_{U'}: U' \to W$ es una sumersión de clase p.

Se considera el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "r|_{U'}"] \arrow[d, "q_{U'}"'] & W \arrow[dl, "q_{U'}|_W"] \\ U'/S_{U'} & \end{tikzcd}$$

Es claro que $q|_{U'}|_W$ es biyectiva y por tanto existe una única estructura de clase p en $U'/S_{U'}$ tal que $q|_{U'}|_W$ es un difeomorfismo de clase p. Así $q|_{U'}$ es sumersión de clase p y $S_{U'}$ es regular en U'.□

Como $S(\text{int } X) = X$, por el lema 4 es suficiente probar que $S_{\text{int } X}$ es regular en int X.

Es claro que $S \cap (\text{int } X x \text{int } X)$ es una subvariedad sin borde de int $X x$int X, ya que S es una subvariedad bien situada de XxX. Además $p_1|_{S \cap (\text{int} X x \text{int } X)}: S \cap (\text{int } X x \text{int } X) \longrightarrow \text{int } X$ es una sumersión de clase p.

Así por los lemas 6 y 9, $S_{\text{int } X}$ es regular.□

Ejemplos

1) Sea $X = [-1, 1] \, x \, [-1, 1] x R$ y S la relación de equivalencia en X definida por $(x, y, z) \, S \, (x', y', z') \Longleftrightarrow x^2 + y^2 - 2z = x'^2 + y'^2 - 2z'$.

Entonces S es una relación de equivalencia regular en la variedad con borde anguloso X y X/S es difeomórfica en clase ∞ a R.

2) Sea X la subvariedad de S^2 dada por $\{(x, y, z) \in S^2/z \geqslant 0\}$ y sea R la relación binaria en X dada por $xRy \Longleftrightarrow x = y$ ó $x = -y$. Entonces R es una relación de equivalencia en X y X/R es homeomorfa al plano proyectivo P^2. Además P^2 con su estructura diferenciable usual no es cociente de X respecto a la relación R ya que $\partial P^2 = \phi$ y $R(\text{int } X) = \text{int } X \neq X$.

BIBLIOGRAFIA

[1] SERRE, J. P.: Lie Algebras and Lie Groups. Benjamin, 1965.

[2] BOURBAKI, N.. Variétes differentielles et analytiques (Fas. de résultats) Hermann, 1971.

[3] LANG, S. Differential Manifolds. Addison –Wesley, 1972.

[4] MARGALEF, J., OUTERELO, E. Topologia Diferencial. C.S.I.C. 1987.

[5] MARGALEF, J., OUTERELO, E. Un teorema de extensión de Whithey en dimensión infinita y clase *p*. *Revista Matemática Hispano–Americana.* T. XLII, Pág. 159-178 (1982).

Consejo Superior de
Investigaciones Científicas
(Inst. Jorge Juan) Madrid

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas