Sobre la estructura analítica de operadores desplazamiento cuasinilpotentes

por LUCAS JODAR*

Recibido: 2 marzo 1983

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia Ureña

Abstract

In this paper are studied the analytic structure and spectral properties of the conmutant of a causinilpotent injective unilateral weighted shift operator defined on a Hilbert space.

Resumen

En éste artículo se estudian la estructura analítica y propiedades espectrales del conmutador de un operador desplazamiento unilateral ponderado injectivo cuasinilpotente definido sobre un espacio de Hilbert.

1. INTRODUCCION

Sea E un espacio de Hilbert con base ortonormal $\{e_n\}_{n \in N}$, sea $\{w_n\}_{n \in N}$ una sucesión de números complejos no nulos, y sea $T \in L(E)$ un operador desplazamiento unilateral ponderado e injectivo, definido por la relación $Te_n = w_n e_n$, $\forall\, n \in N$. Por el corolario 1, pág. 52 y las proposiciones 6 y 7, pág. 57-58 de [1], podemos considerar que $w_n > 0, \forall\, n \in N$ y que $T = M_z$ es un operador multiplicación por *z en el espacio de Hilbert ponderado* $H^2(\beta) = \{(f(n))_{n \in N}\,;\ \sum_{n \geqslant 0} |f(n)|^2\, \beta(n)^2 < \infty\}$, siendo $\beta(0) = 1$, $\beta(n) = w_0 w_1 \ldots w_{n-1}$, si $n \geqslant 1$. Sea $H^\infty(\beta)$ el conmutador de T y representaremos por $\|\ \|_\infty$ la norma del álgebra de Banach $H^\infty(\beta)$ (Ver pág. 61-63), [1]).

2. ESTRUCTURA ANALITICA

Empezamos con un lema válido para cualquier operador desplazamiento unilateral ponderado e injectivo.

* Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad de Valencia, formando parte de la Tesis Doctoral del autor, realizada bajo la dirección del Profesor Antonio Marquina.

Lema 1

Sea $T = M_z$ en $H^2(\beta)$ y sea $p(z) = z^n$, entonces se verifica $\|p\|_\infty = \|T^n\|$.

Demostración: Sea $f = \{f(n)\}_{n \in N} \in H^2$ (β) y sea M_p el operador multiplicación por $p(z)$ en $H^2(\beta)$. Si llamamos $h = M_p(f) = p\ f$, con $h(n)\ ) =$ $= \sum_{k=0}^{n} p(k) f(n-k)$, se tiene que

$$h(m) = \begin{cases} f(m-n), & \text{si } m \geqslant n \\ 0 & \text{si } m < n \end{cases}$$

para cada $m \in N$, y de aquí

$$\|M_p(f)\|^2 = \sum_{m \geqslant 0} |h(m)|^2 \beta(m) = \sum_{m \geqslant 0} |f(m-n)|^2 \beta(n-n)^2 \left[\frac{\beta(m)}{\beta(m-n)}\right]^2 =$$

$$= (\sup_{m \geqslant n} \left[\frac{\beta(m)}{\beta(m-n)}\right]^2)\ (\sum_{m \geqslant n} |f(m-n)|^2 \beta(m-n)^2)$$

Por [1], pág, corolario de la proposición 7, tenemos que

$$\sup_{m \geqslant n} \left[\frac{\beta(m)}{\beta(m-n)}\right]^2 = \sup_{k \geqslant 0} \left[\frac{\beta(n+k)}{\beta(k)}\right]^2 = \|T^n\|^2$$

y por ser $\|f\|^2 = \sum_{m \geqslant n} |f(m-n)|^2\ \beta(m-n)^2 = \|f\|^2$, se deduce que $\|M_p(f)\| \leqslant$ $\leqslant \|f\|\ \|T^n\|$ y que $\|M_p\| \leqslant \|T_n\|$. Veamos que $\|M_p\| \geqslant \|T^n\|$. Sea $x_j \in H^2(\beta)$ tal que

$$x_j(m) = \begin{cases} 0, m \neq j \\ 1/\beta(j), m = j \end{cases}$$

Es claro que $\|x_j\| = 1$, si $h = M_p(x_j)$, entonces se tiene que

$$h(m) = \sum_{k=0}^{m} p(k) x_j(m-k) = \begin{cases} 0 & , m < n \\ x_j(m-n), & m \geqslant n \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 & , m \neq n+j \\ 1/\beta(j), & m = n+j \end{cases}$$

$$\|h\| = \left\{\sum_{m \geqslant 0} \|h(m)|^2\ \beta(m)^2\right\}^{1/2} = \frac{\beta(n+j)}{\beta(j)}$$

En consecuencia

$$\|M_p\| \geqslant \sup_{j \in N} \|M_p(x_j)\| = \sup_{j \in N} \frac{\beta(n+j)}{\beta(j)} = \|T^n\| \cdot \text{Q.E.D.}$$

Definición 1

Sea w un número completo y sea λ_ω: $\mathfrak{T} \longrightarrow C$ tal que $\lambda_\omega(p) = p(\omega)$ $\forall\, p \in \mathfrak{T}$. Se dice que w es un punto de evaluación acotada sobre $H^\infty(\beta)$ si el funcional λ_w admite extensión a un funcional lineal multiplicativo contínuo sobre $H^\infty(\beta)$.

Sea $\mathfrak{K}(H^\infty)\beta))$ el espacio estructura de $H^\infty(c)$, entonces si $\lambda \in \mathfrak{K}(H^\infty(\beta))$, el número $\lambda(z)$ es un punto de evaluación acotada sobre $H^\infty(\beta)$ que pertenece al espectro de T, $\sigma(T)$. Recíprocamente si $w \in \sigma(T)$, denotaremos por F_w a la fibra de w, es decir, $F_w = \{\lambda \in \mathfrak{K}(H^\infty(\beta)), \lambda(z) = w\}$.

Teorema 1

Sea $T = M_z$ en $H^2(\beta)$ operador desplazamiento unilateral ponderado cuasinilpotente.

Entonces se verifica:

(I) Para cada $f = \sum\limits_{n \geqslant 0} f(n)z^n$ con radio de convergencia $\rho > 0$, se tiene que si $f \in H^2(\beta)$, entonces $f \in H^\infty(\beta)$ y si llamamos $s_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k)z^k$, se cumple que $f = \lim\limits_{n \to \infty} s_n(f)$ en $H^\infty(\beta)$.

(II) Existe una serie de potencias $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} f(n)z^n$ con radio de convergencia $\rho = 0$ y $f \notin H^\infty(\beta)$.

(III) El espacio estructura es $\mathfrak{K}(H^\infty(\beta)) = F_0$.

IV) Si F_0 es trivial, entonces $\forall f \in H^\infty(\beta)$ se tiene que $\sigma(f) = \{f(0)\}$.

Demostración. - Sea $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} f(n)z^n$ tal que $\lambda = \lim\limits_{n \to \infty} \sup |f(n)|^{1/n} < +\infty$, entonces el operador $A = \sum\limits_{n \geqslant 0} f(n)T^n$ es acotado porque

$$\sum_{n \geqslant 0} |f(n)|.\, \|T^n\| = \sum_{n \geqslant 0} |f(n)|\, \|T^n\| < +\infty \tag{1}$$

ya que

$$\lim_{n \to \infty} \sup \left(|f(n)|\, \|T^n\|\right)^{1/n} = \lim_{n \to \infty} |f(n)|^{1/n} \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n} = \lambda \cdot 0 = 0$$

Como $AT = TA$, por teorema 3, pág. 62 [1], existe $\bar{f} \in H^\infty(\beta)$ tal que $A = M_{\bar{f}}$ siendo $\bar{f} = A(e_0) = \sum\limits_{n \geqslant 0} f(n)T^n(e_0) = \sum\limits_{n \geqslant 0} f(n)\, M_z^n(1) = \sum\limits_{n \geqslant 0} f(n)z^n$, es decir, $\bar{f} = f$ y $f \in H^\infty(\beta)$

Veamos que $\lim\limits_{n \to \infty} s_n(f) = f$ en $H^\infty(\beta)$. Por (1), dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in N$

tal que si $m \geqslant n \geqslant n_0$ se verifica $\sum_{k=n} |f(k)| \, \|T^k\| < \epsilon$, y tomando límites cuando $m \longrightarrow \infty$ tenemos que $\sum_{k \geqslant n} |f(k)| \, \|T^k\| \leqslant \epsilon$ y de aquí $\sum_{k \geqslant n} f(k)^k \in L(H^2(\beta))$. Además $\forall$ $n \geqslant n_0$ se tiene

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{k \geqslant n+1} |f(k)| \, \|T^k\| \leqslant \epsilon$$

De aquí se concluye (I). Para ver (II), sea $f = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{\beta(n)}$, entonces se tiene $\lambda = \lim_{n \to \infty} \sup \left(\frac{1}{\beta(n)}\right)^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \sup [\beta(n)]^{-1/n} = \frac{1}{r_2(T)} = +\infty$, porque por [1], pág. 70, se tiene que $r_2(T) \leqslant r(T) = 0$. Así, $\rho = \lambda^{-1} = 0$. Se tiene también que $f \notin H^2(\beta)$ porque $\sum_{n \geqslant 0} |f(n)|^2 \beta(n)^2 = \sum_{n \geqslant 0} 1 = +\infty$.

(III) Veamos que $\mathcal{K}(H^\infty(\beta)) = F_0$. Sea $w \in C \sim \{0\}$, vamos a probar que w no puede ser un punto de evaluación acotada sobre $H^\infty(\beta)$; si w fuese punto de evaluación acotada sobre $H^\infty(\beta)$, entonces $\nu \in \mathcal{K}(H^\infty(\beta))$ que extiende contínuamente al funcional $\lambda_w : \mathcal{T} \longrightarrow C$, tal que $\lambda_w(p) = p(w)$. Sea r tal que $0 < r < |w|$ y sea $f = \sum_{n \geqslant 0} f(n) z^n$ una serie de potencias de radio de convergencia r Por el apartado (I), se tiene que $f \in H^\infty(\beta)$ y por las propiedades de radio de convergencia, la serie $\sum_{n \geqslant 0} f(n) w^n$ es divergente. Ahora bien, por (I) se tiene que $f = \lim_{n \to \infty} s_n(f)$ en $H^\infty(\beta)$ y por continuidad del funcional ν queda

$$\nu(f) = \lim_{n \to \infty} \nu(s_n(f)) = \lim_{n \to \infty} \lambda_w(s_n(f)) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f(k)\, w^k = \sum_{k \geqslant 0} f(n) w^n$$

lo cual es absurdo porque esta serie es divergente. En consecuencia w no es punto de evaluación acotada sobre $H^\infty(\beta)$,y para todo $\lambda \in \mathcal{K}(H^\infty)\beta))$, $\lambda(z) = 0$, es decir $\mathcal{K}(H^\infty(\beta)) = F_0$.

(IV) Si F_0 es trivial, entonces por (III), se tiene que $\mathcal{K}(H^\infty(\beta)) = F_0$ y por el teorema de representación de Gel'fand, pág. 223 de [5], se tiene que

$$\sigma(f) = \{u(f); u \in F_0\} = \{u(f); u \in \mathcal{K}(H\ (\beta))\} = \{u_0(f)\}$$

siendo $F_0 = \{u_0\}$. Seamos que necesariamente $u_0(f) = f(0)$, probando que $f(0) \in \sigma(f)$.

En efecto, $f - f(0) \in H^\infty(\beta)$ y no admite inverso en $H^\infty(\beta)$ porque si existiese $g \in H^\infty(\beta)$ tal que $g(f - f(0)) = (f - f(0))\, g = 1$, entonces el coeficiente correspondiente a $n = 0$ sería tal que $(f(0) - f(0))\, g(0) = 1$, y esto es absurdo, por lo tanto $\sigma(f) = \{f(0)\}$. Q.E.D.

Nota: Si para cada $f \in H^\infty(\beta)$ se verifica que $f = \lim_{n\to\infty} s_n(f) \in H^\infty(\beta)$, entonces por densidad de $\mathcal{T}$ en $(H^\infty(\beta), \|\ \|_\infty)$ se tiene que F_0 es trivial. En particular si T es estrícticamente cíclico, dicha condición se verifica por [1], propos. 31, pág. 94.

En el apartado (II) del teorema hemos visto que hay series de potencias de radio de convergencia nulo, que no pertenecen a $H^\infty(\beta)$; veamos que para cada operador desplazamiento unilateral ponderado cuasinilpotente T, hay $f \in H^2(\beta)$ tales que $f \in H^\infty(\beta)$ y el radio de convergencia de $\sum_{n\geq 0} f(n)z^n$ es nulo.

Proposición 1

Sea $T = M_z$ operador desplazamiento unilateral ponderado cuasinilpotente, definido en $H^2(\beta)$. Sea $0 > k < 1$, $f = \{f(n)\}_{n\in N}$ tal que $f(n) = \dfrac{k^n}{\|T^n\|}$ $\forall\, n \in N$. Entonces $f \in H^\infty(\beta)$ y el radio de convergencia de $\sum_{n\geq 0} f(n)z^n$ es 0.

Demostración: Se tiene $\lambda = \lim\sup_{n\to\infty} |f(n)|^{1/n} = \lim\sup_{n\to\infty} \left(\dfrac{k^n}{\|T^n\|}\right)^{1/n} = k \lim\sup_{n\to\infty} \|T^n\|^{-1/n} = +\infty$. Así, $\rho = \lambda^{-1} = 0$, y por tanto la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} f(n)z^n$ tiene radio de convergencia nulo. Es claro que $\in H^2(\beta)$ porque

$$\sum_{n\geq 0} |f(n)|^2 \beta(n)^2 = \sum_{n\geq 0} \frac{k^{2n}}{\|T^n\|^2} \beta(n)^2 \leq \sum_{n\geq 0} k^{2n} < +\infty$$

ya que $\beta(n) \leq \|T^n\| = \sup_{k\in N} \dfrac{\beta(k+m)}{\beta(k)}$.

Veamos que $f \in H^\infty(\beta)$; sea el operador $V = \sum_{n\geq 0} f(n)\, T^n = \sum_{n\geq 0} \dfrac{k^n\, T^n}{\|T^n\|}$, que es acotado porque $\sum_{n\geq 0} |f(n)|\, \|T^n\| \leq \sum_{n\geq 0} k^n$. Además $VT = TV$, por el teorema 3, pág. 62, [1], existe $g \in H^\infty(\beta)$ tal que $V = M_g$, con $g = V(e_0) = \sum_{n\geq 0} f(n)\, z^n = f$, luego $f = g$ y por tanto $f \in H^\infty(\beta)$. Q.E.D.

Definición 2.

Sea $T = M_z$ operador desplazamiento unilateral ponderado, representado sobrre $H^2(\beta)$.

Decimos que T es condicionalmente estrícticamente cíclico si verifica la condición

$$\lim\sup_{n\to\infty} \frac{\|T^n\|}{\beta(n)} < +\infty$$

Por $L^1(T)$ designamos el espacio de sucesiones $\{(f(n))_{n\in N};\ \sum_{n\geq 0} |f(n)|\, \|T^n\| < +\infty\}$

De la demostración de la proposición 1, para que $f \in H^\infty(\beta)$ sólamente hemos necesitado que $f \in L^1(T)$; por el teorema 1, las únicas $f \in H^2(\beta)$ que no sabemos si están en $H^\infty(\beta)$, son las $f \in H^2(\beta)$ tales que $\lim\sup_{n\to\infty} |f(n)|^{1n} =$ $= +\infty$, es decir con radio de convergencia 0 y verifiquen

$$\lim\sup_{n\to\infty} [|f(n)|\ \|T^n\|^{1/n} \geqslant 1$$

ya que si no se verifica esta condición, entonces $f \in L^1(T)$.

Proposición 2.

Sea $T = M_z$ en $H^2(\beta)$ un operador desplazamiento unilateral ponderado, condicionalmente estríctamente cíclico. Entonces se verifica:

(I) Si $H^1(\beta) = (f(n))_{n\in N}; \Sigma|f(f)|\beta n) < +\infty\}$ entonces $L^1(T) = H^1(\beta)$

(II) $H^1(\beta) \subset H^\infty(\beta)$ y para cada $f \in H^1(\beta)$, $f = \lim_{n\to\infty} s(f)$ en $H^\infty(\beta)$.

Demostración: Para cada $n \in N$ tenemos que $\|T^n\| = \sup \dfrac{\beta(n+k)}{\beta(k)} \geqslant$ $\geqslant \beta(n)$, y así $\beta(n) \leqslant \|T^n\|$, de donde se deduce que si $f \in L^1(T)$ entonces también $f \in H^1)(\beta)$ y por tanto $L^1(T) \subset H^1(\beta)$. Por ser T condicionalmente estríctamente cíciclico y por (2), existe $M > 0$ tal que para n suficientemente grande se verifica $\|T^n\| \leqslant M\ \beta(n\ )$, V $n \geqslant n_0$ y en consecuencia

$$\sum_{n\geqslant n_0} |f(n)|\,\|T^n\| \leqslant M \sum_{n\geqslant n_0} |f(n)|\ \beta(n) < +\infty$$

luego $f \in L^1(T)$. Esto demuestra la parte (I) de la demostración.

(II) Por el apartado (I) tenemos que $H^1(\beta) = L^1(T)$ y si $f \in L^1(T)$, al ser convergente la serie $\sum_{n\geqslant 0} |f(n)|\ \|T^n\|$, la serie de operadores $\sum_{n\geqslant 0} f(n)T^n$ es convergente en $H^\infty(\beta)$, y de aquí $f = \lim_{n\to\infty} s_n(f)$ en $H^\infty(\beta)$.

Corolario

Sea $T = M_z$ en $H^2(\beta)$ operador desplazamiento unilateral ponderado cuasinilpotente condicionalmente estríctamente cíclico. Entonces si $f \in H^2(\beta)$ es una serie de potencias de radio de convergencia nulo y verifica

$$\lim\sup_{n\to\infty} [|f(n)|\ \beta(n)]^{1/n} = s < 1$$

se tiene que $f \in H^\infty(\beta)$.

Demostración: Por la proposición 2, se tiene que $L^1(T) = H_1(\beta) \subset H^\infty(\beta)$. Si f verifica las hipótesis del corolario, por el criterio de la raíz se tiene que f pertenece a $H^1(\beta)$ y por tanto $f \in H^\infty(\beta)$. Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALLEN, SHIELDS L.: Weighted shift operators and analytic function theory. *Mathematical Surveys Volume* 13 (1974).

[2] STERLING K. BERBERIAN.: Lectures on functional analysis and operator theory. *Springer G. T. M.*, New York (1974).