Los espacios de Hilbert–Lobatschewsky
La masa de un gas relativista
Las ondas relativistas de materia

Por DARIO MARAVALL CASESNOVES

Recibido: 20 de febrero de 1986

Abstract

The properties of the relativistic law of the generalized composite velocities in n–dimensional euclidean spaces and the Hilbert space are investigated, as well as a new associated differential calculus. The statistical distributions of velocity, momentum and energy of a relativistic gas of particles and their physical implications such as mass variation with temperature are also investigated, as well as the relativistic waves of matter.

La composición euclidiana de vectores en los espacios euclídeos de n dimensiones y en el espacio de Hilbert.

A la ley de composición de Einstein de las velocidades de la relatividad restringida se le puede dar una forma intrínseca, que permite generalizarla del espacio euclídeo ordinario de tres dimensiones a los espacios euclídeos de cualquier número de dimensiones e incluso al espacio clásico de Hilbert (*). Sean ν_1 y ν_2 las velociddes de un mismo móvil M respecto a dos observadores O' y O , tales que el O' se mueve con movimiento uniforme y rectilíneo de velocidad ν respecto al O. La ley de composición de velocidades de Einstein afirma que:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}{*}\mathbf{v}_1 = \frac{1 + \dfrac{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}_1 \rangle}{\nu^2}}{(\quad)}\,\mathbf{v} + \frac{\sqrt{1-\dfrac{\nu^2}{c^2}}\;\langle \mathbf{v}_1\ \mathbf{j} \rangle}{(\quad)}\,\mathbf{j} \tag{1}$$

en donde por * representamos la dicha ley de composición y:

$$\nu^2 = \|\mathbf{v}\|^2;\quad (\quad) = 1 + \frac{\langle \mathbf{v}\ \ \mathbf{v}_1 \rangle}{c^2};\quad \mathbf{j} = \frac{(\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}_1)\wedge\mathbf{v}}{|\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}_1|\,\nu} = (20) \tag{2}$$

donde la primera expresión del vector $\mathbf{j}$ es exclusiva del espacio euclídeo de tres dimensiones, mientras que la segunda (20) es válida para cualquier nú-

---

(*) Por espacio de Hilbert clásico, entendemos el espacio de Hilbert separable y de dimensión finita.

mero de dimensiones, inculídas las infinitas numerables del espacio de Hilbert clásico. Incluso se puede extender a los espacios complejos si en las fórmulas anteriores sustituímos el producto escalar por su módulo.

De la (1) se sigue que:

$$\mathbf{v}_1^2 = \frac{|\mathbf{v}+\mathbf{v}_1|^2 - \dfrac{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}_1|^2}{c^2}}{(\quad)^2} = \frac{|\mathbf{v}+\mathbf{v}_1|^2 - \dfrac{\nu^2 \nu_1^2 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle^2}{c^2}}{(\quad)^2} \tag{3}$$

La segunda expresión (3) es válida para cualquier número de dimensiones incluido el espacio de Hilbert clásico. Respecto a la primera aun cuando el producto vectorial no tiene propiedades iguales para tres dimensiones que para cualquier otro número, sin embargo su módulo sí es generalizable, tomando como valor del mismo:

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}_1|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\nu_i \nu_{1j} - \nu_j \nu_{1i})^2 \tag{4}$$

en donde los subíndices i,j representan las correspondientes coordenadas de los vectores.

Los numeradores de las dos fracciones de (1) son respectivamente iguales a:

$$1 + \frac{\nu_1}{\nu} \cos \varphi \, ; \qquad \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}\, \nu_1 \operatorname{sen} \varphi \tag{5}$$

siendo φ el ángulo que forman ν y ν_1. Análogamente el numerador de (3) se puede sustituir por

$$\nu^2 + \nu_1^2 + 2\,\nu\,\nu_1 \cos \varphi - \left(\frac{\nu \nu_1 \operatorname{sen} \varphi}{c} \right)^2 \tag{6}$$

De (1) se sigue que:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} * \mathbf{0} \tag{7}$$

y también:

$$\mathbf{v} * \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} * \mathbf{v}_1' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' \tag{8}$$

De (1) se sigue que:

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \rangle = \frac{\nu^2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle}{1 + \dfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle}{c^2}} \Rightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \rangle - \nu^2}{1 - \dfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle}{c^2}} \tag{9}$$

y:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{-1 + \dfrac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \rangle}{c^2}}{1 - \dfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle}{c^2}} \mathbf{v} + \alpha \mathbf{j}; \quad \alpha = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{j} \rangle \tag{10}$$

De la primera de (9) dividiendo por c^2 ambos miembros y restando de la unidad se obtiene:

$$1 - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle}{c^2} = \frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{1 + \dfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle}{c^2}} \tag{11}$$

multiplicando escalarmente por $\mathbf{j}$ la (1) se obtiene:

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{j} \rangle = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle}{c^2}} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{j} \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{j} \rangle = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle}{c^2}} \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{j} \rangle \tag{12}$$

como consecuencia de (11). De (10) y (12) se sigue que:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1 - \dfrac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \rangle}{v^2}}{1 - \dfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle}{c^2}} \mathbf{v} + \frac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{j} \rangle}{1 - \dfrac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle}{c^2}} \mathbf{j} \tag{13}$$

que muestra que la fórmula (1) es invertible, y que se tiene:

$$\mathbf{v}_1 = (-\mathbf{v}) * \mathbf{v}_2 \tag{14)*}$$

Las velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ juegan el mismo papel, no así la $\mathbf{v}$.

La fórmulas anteriores muestran que las velocidades de un mismo módulo medidas por los dos observadores O y O', establecen una correspondencia biunívoca entre los puntos interiores a la esfera de centro en el origen y radio c. En el §2 demostraremos que esta correspondencia biunívoca es también bicontínua. Los resultados anteriores son válidos para cualquier número de dimensiones y para el espacio de Hilbert.

Si x, y, z, t son las coordenadas y el tiempo de un suceso medidas respecto a un observador O, las transformaciones de estas coordenadas espaciales y temporal de un mismo suceso para todos los observadores en movimien-

(*) (14) $\Rightarrow \mathbf{0} * \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$ (14 bis).

to rectilíneo y uniforme respecto a O, forman un subgrupo del grupo de las transformaciones afines del espacio cuadridimensional, que deja invariante la expresión

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \tag{15}$$

y como las componentes cartesianas de las velocidades son los cocientes de las diferenciales de las coordenadas espaciales respecto a la temporal, se sigue que las transformaciones de las velocidades de un mismo móvil para todos los observadores en movimiento uniforme y rectilíneo respecto a O, forman un subgrupo del grupo de las transformaciones proyectivas del espacio euclídeo tridimensional. Estos resultados son válidos para cualquier número de dimensiones, incluído el espacio clásico de Hilbert.

Se sigue de lo anterior que si $\mathbf{v}'$ es la velocidad de un observador O'' respecto al observador O' y $\mathbf{v}_3$ la velocidad de M respecto a O'', siendo el movimiento de O'' uniforme y rectilíneo respecto a O', por (1) es:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}' * \mathbf{v}_3; \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} * (\mathbf{v}' * \mathbf{v}_3) \tag{16}$$

y por haber demostrado en el párrafo anterior que estas velocidades forman grupo, se ha de cumplir que:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'' * \mathbf{v}_3 \tag{17}$$

siendo en principio $\mathbf{v}''$ desconocida. Vamos a calcularla: por lo visto en (7) es para $\mathbf{v}_3 = 0$, las (16) y (17) dan:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'; \; \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} * \mathbf{v}'; \; \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'' \tag{18}$$

lo que comprueba la asociatividad de la composición einsteniana de velocidades:

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{v}' * \mathbf{v} \tag{19}$$

cualquiera que sea el número de dimensiones incluída la dimensión infinita.

Se demuestra fácilmente que la composición einsteniana es asociativa para una sola dimensión, y por ejemplos sencillos que no lo es para cualquier número mayor de dimensiones. En cambio sí es conmutativa (3).

Al vector normalizado $\mathbf{j}$ (2) se le puede dar la forma:

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{v}_1}{v_1 \operatorname{sen} \varphi} - \frac{\mathbf{v} \cos \varphi}{v \operatorname{sen} \varphi} \tag{20}$$

lo que por otra parte se comprueba fácilmente, por ser (20) unitario, ortogonal a $\mathbf{v}$, y combinación lineal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}_1$. Llevando el valor (20) a (1), se obtiene:

$$\mathbf{v}_2 = \frac{[1 + \frac{\langle\ \rangle}{\nu^2}(1 - \sqrt{\ })]\,\mathbf{v} + \sqrt{\ }\,\mathbf{v}_1}{(\ )} \tag{21}$$

en donde por simplificación tipográfica hemos hecho:

$$\langle\ \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle\ ;\ (\ \ ) = 1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle}{c^2}\ ;\ \sqrt{\ } = \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}} \tag{22}$$

2.—El cálculo diferencial asociado a la composición einsteniana de velocidades y la diferencial de Einstein—Lobatschewsky.

Si **dv** es la diferencial ordinaria, llamamos diferencial de Einstein—Lobatschewsky **Dv** a la:

$$\mathbf{Dv} = (\mathbf{v} + \mathbf{dv}) * (-\mathbf{v}) \tag{23}$$

que por (21) vale:

$$\mathbf{Dv} = \frac{[1 - \frac{\langle \mathbf{v}, (\mathbf{v} + \mathbf{dv}) \rangle}{|\mathbf{v} + \mathbf{dv}|^2}(1 - \sqrt{\ })](\mathbf{v} + \mathbf{dv}) - \sqrt{\ }\,\mathbf{v}}{1 - \frac{\nu^2}{c^2}} \tag{24}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{|\mathbf{v} + \mathbf{dv}|^2} = \frac{1}{\mathbf{v}^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{dv} \rangle} = \frac{1 - \frac{2\langle \mathbf{v}, \mathbf{dv} \rangle}{\mathbf{v}^2}}{\mathbf{v}^2} \tag{25}$$

y por tanto:

$$\langle \mathbf{v}, (\mathbf{v} + \mathbf{dv}) \rangle \left(1 - 2\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{dv} \rangle}{\mathbf{v}^2}\right) = \mathbf{v}^2 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{dv} \rangle \tag{26}$$

de (24) se sigue que:

$$D\mathbf{v} = \frac{\sqrt{\ }\,\mathbf{dv} + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{dv} \rangle}{\nu^2}(1 - \sqrt{\ })\,\mathbf{v}}{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}$$

Se demuestra por simple cálculo que:

$$\mathbf{Dv} = (-\mathbf{v}) * (\mathbf{v} + \mathbf{dv}) \tag{28}$$

y de aquí por comparación con la (23) que la composición einsteniana de vectores infinitesimales sí es conmutativa. De (28) se sigue que:

$$\mathbf{v} + \mathbf{dv} = \mathbf{v} * \mathbf{Dv} \Rightarrow \mathbf{dv} = \mathbf{v} * \mathbf{Dv} - \mathbf{v} \tag{29}$$

y aplicando la (21) se obtiene:

$$\mathbf{dv} = \frac{[1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{Dv} \rangle}{v^2} (1 - \surd\ )]\,\mathbf{v} + \surd\ \mathbf{Dv}}{(\quad)} - \mathbf{v} \tag{30}$$

en la que la raiz cuadrada tiene el mismo valor (22) y el paréntesis es:

$$(\quad) = 1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{Dv} \rangle}{c^2} \tag{31}$$

Por tanto la (30) se escribe:

$$\mathbf{dv} = \surd\ \mathbf{Dv} + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{Dv} \rangle}{v^2} (\surd\ - 1) \surd\ \mathbf{v} \tag{32}$$

que es la fórmula inversa de la (24). Las (24) y (32) muestran que para todo vector $\mathbf{v}$ existe una correspondencia biunívoca entre $\mathbf{dv}$ y $\mathbf{Dv}$.

En el caso particular de una sola dimensión de (24) y (32) se sigue:

$$Dv = \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{33}$$

3.—La geometría diferencial de Lobatschewsky deducida de la composición einsteniana de vectores.

De (27) se sigue que:

$$\langle \mathbf{Dv}, \mathbf{Dv} \rangle = \mathbf{Dv}^2 = \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})\, dv^2 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{dv} \rangle^2}{c^2}}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^2} \tag{34}$$

que es el elemento lineal ds^2 del espacio de Lobatschewsky de cualquier número de dimensiones.

Si pasamos de las coordenadas cartesianas $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbf{v}$ a las coordenadas esféricas es:

$$v^2 = v_1^2 + \dots + v_n^2\,, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{dv} \rangle = v_1\, dv_1 + \dots + v_n\, dv_n = v\, dv \tag{35}$$

y la (34) se escribe:

$$ds^2 = \frac{dv^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} + \frac{dw^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{36}$$

donde dw^2 es el ds^2 de la superficie esférica de radio v en el espacio euclídeo de n dimensiones.

4.—El espacio de Hilbert—Lobatschewsky

Como tanto el producto escalar como el módulo (la norma) en un espacio euclídeo o en el de Hilbert clásico son invariantes para las transformaciones ortogonales si el espacio es real (o unitarias si es complejo) la composición einsteniana de vectores es invariante para dichas transformaciones, que en el plano y en el espacio ordinario son las rotaciones. Por tanto:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} * \mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = (\mathbf{A}\mathbf{v}) * (\mathbf{A}\mathbf{v}_1) \tag{37}$$

si $\mathbf{A}$ es una matriz ortogonal.

Llamamos bola lobatschewskiana abierta, de centro a y radio r al conjunto de puntos x del espacio de Hilbert (o de Euclides), tales que:

$$(x, -a)^2 = \frac{\|x-a\|^2 - \dfrac{\|x\|^2 \|a\|^2 - \langle x, a\rangle^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{\langle x, a\rangle}{c^2}\right)^2} < r^2 \tag{38}$$

Llamamos espacio de Hilbert—Lobatschewsky al conjunto de puntos del espacio de Hilbert interiores a la bola de radio c, centrada en el origen, dotada de la topología de las bolas lobatschewskianas, es decir para las que éstas constituyen una base. Se define entonces la convergencia por:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N |\ n > N: (x_n, a) < \epsilon \tag{39}$$

En el caso del espacio de Hilbert clásico complejo, hay que sustituir el producto interno por su módulo en la (38):

$$\langle x, a\rangle \to |\langle x, a\rangle| \tag{40}$$

En el caso en que el espacio de Hilbert es la recta real R, la (38) es una distancia que se escribe:

$$(x, a) = \frac{|x-a|}{1 - \dfrac{a x}{c^2}} \tag{41}$$

y llamamos recta de Lobatschewsky al conjunto de números reales de valor absoluto inferior a c, dotados de la distancia (41). En este caso se demuestra por el cálculo o como consecuencia de la asociatividad y de la conmutatividad de la composición einsteniana de velocidades que:

$$(x, y) = (x * z,\ y * z) \tag{42}$$

es decir que la distancia (41) es invariante para la ley de composición de Einstein.

Para cualquier otro número de dimensiones mayor no se cumple (42) por no ser conmutativa la composición einsteniana, porque si se cumpliera, debido a la asociatividad sería:

$$z * (-(y * z)) = -y \tag{43}$$

lo que es absurdo. Por tanto:

$$(x, y) = (x * z,\ z * y) \neq (x * z,\ y * z) \tag{44}$$

5.—Las distribuciones de las velocidades, de las cantidades de movimientos y de la energía de un gas relativista de partículas.

Hemos demostrado (véase bibliografía) que la función de distribución de las velocidades de las partículas de un gas relativista es isótropa y la función de frecuencia (*ff*) del módulo de la velocidad v es $f(v)$:

$$f(v) = A \exp\left[-\frac{mc^2}{kT\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right] \frac{v^2}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2}\ ;\ 0 < v < c \tag{45}$$

siendo A un coeficiente de normalización, m la masa en reposo de la partícula, c la velocidad de la luz en elvacío, $k$la constante de Boltzmann y Tla temperatura absoluta.

Como el valor absoluto de la cantidad de movimiento p es:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow dp = \frac{mdv}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}},\ 1 + \frac{p^2}{m^2c^2} = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{46}$$

la función de distribución para las cantidades de movimiento es isótropa y la *ff* del módulo p:$g(p)$ se obtiene a partir de (45) y (46) y vale:

$$g(p) = B \exp\left[-\frac{mc^2}{kT}\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}} \right] \frac{p^2}{\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}}\ ;\ 0 < p < \infty \tag{47}$$

Como la energía cinética E es:

Como la energía cinética E es:

$$E + m\,c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\,c^2 \sqrt{1+\frac{p^2}{m^2\,c^2}} \tag{48}$$

y de aquí:

$$p = m\,c\sqrt{\frac{E^2}{m^2 c^4}+\frac{2E}{mc^2}}\;,\quad v = \sqrt{\frac{E^2}{m^2 c^2}+\frac{2E}{m}}\Big/\left[1+\frac{E}{mc^2}\right] \tag{49}$$

la ff $h(E)$ de la energía cinética relativista (excluida la másica) vale:

$$h(E) = C\exp\left[-\frac{E}{kT}\right]\sqrt{E+\frac{E^2}{2mc^2}}\;,\quad 0 < E < \infty \tag{50}$$

donde C, como antes A y B son coeficientes de normalización.

La función característica ($f.c.$) de la ff de E (50), por las propiedades de la transformación de Laplace vale:

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{izE}\,h(E)\,dE\;;\quad C = \int_0^\infty h(E)\,dE \tag{51}$$

$$\varphi(z) = \frac{\exp(-izmc^2)}{1-izkT}\;\frac{K_1\left[mc^2\left(\frac{1}{kT}-iz\right)\right]}{K_1\left(\frac{mc^2}{kT}\right)} \tag{52}$$

donde K_1 es una función asociada a las de Bessel con la notación clásica.

Para el cálculo de los valores medios de las funciones de la velocidad, de la cantidad de movimiento o de la energía es preferible utilizar la (50) en vez de las (45) y (47), por ser más fácilmente calculables las integrales correspondientes. Como cuanddo c tiende a infinito la ff y la fc de la energía tienden respectivamente a las:

$$C\,e^{-E/kT}\sqrt{E}\;;\qquad \frac{1}{(1-izkT)^{3/2}} \tag{53}$$

se sigue que:

$$\lim_{c\to\infty}\frac{K_1\left(mc^2\left(\frac{1}{kT}-iz\right)\right)}{K_1\left(\frac{mc^2}{kT}\right)} = \frac{\exp\,(mc^2 iz)}{\sqrt{1-izkT}} \tag{54}$$

fórmula que es conocida por las propiedades asintóticas de la función K_1.

5.—El valor medio de la energía y la variación de la masa con la temperatura en un gas relativista.

El valor medio de la energía E, por la (52) vale:

$$E = \frac{1}{i}\varphi'(0) = kT + mc^2\left[-1 + \frac{1}{K_1(\frac{mc^2}{kT})}\right]\left[\frac{dK_1(x)}{dx}\right]_{x=mc^2/kT} \tag{55}$$

pero si la energía cinética E es inferior al doble de la energía másica mc^2, la fc, de E vale:

$$\varphi(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} a_n \exp\left(-E\left(\frac{1}{kT} - iz\right)\right)\sqrt{E}(E/2mc^2)^n\, dE}{\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} a_n \exp(-E/kT)\sqrt{E}\,(E/2mc^2)^n\, dE} \tag{56}$$

donde los a_n son los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de $\sqrt{1+x}$. De (56) se sigue que:

$$\varphi(z) = \frac{1}{(1 - iz\,kT)^{3/2}}\;\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[\frac{kT}{1-izkT}\right]^n\left[\frac{1}{2mc^2}\right]^n}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(kT/2mc^2)^n} \tag{57}$$

y de aquí:

$$\bar{E} = \frac{3}{2}k\,T + k\,T\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\,a_n(kT/2\,mc^2)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(kT/2\,mc^2)^n} \tag{58}$$

y como $a_0 = 1, a_1 = 1/2$ cuando $E \ll mc^2$. se tiene en segunda aproximación:

$$E = \frac{3}{2}k\,T + \frac{1}{4}\frac{k^2T^2}{mc^2} \tag{59}$$

Como la masa de una partícula en movimiento es:

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m(1 + E/mc^2) \tag{60}$$

se observa que ésta varía con la temperatura. Cuando $E \ll mc^2$ en segunda aproximación el valor medio de la masa en movimiento de una partícula es:

$$m\left[1 + \frac{\bar{E}}{mc^2}\right] = m\left[1 + \frac{3}{2}\frac{kT}{mc^2}\right] \tag{61}$$

6.—La modificación relativista de la ecuación de estado de los gases perfectos

Para establecer la ecuación de estado de los gases perfectos de acuerdo con la relatividad restringida, hay que sustituir el cálculo del valor medio de mv^2 con arreglo a la ffde la distribución de velocidades de Maxwell—Bolzt-mann por el cálculo del valor medio de la magnitud:

$$\frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{62}$$

habida cuenta del valor de la cantidad de movimiento (o de la masa) en la relatividad restringida, y con arreglo a la *ff* (45). Pero se puede sustituir el cálculo de dicho valor medio por el de la magnitud igual:

$$2\,E\,\frac{1+E/2mc^2}{1+E/mc^2} \tag{63}$$

con arreglo a la ff (51).

Si $E \ll mc^2$, desarrollando en serie la (63) se obtiene:

$$2E\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(E/2\,mc^2)^n \tag{64}$$

y por tanto si $E \ll mc^2$ se obtiene en segunda aproximación para ecuación relativista de los gases perfectos, la:

$$p\,V=\frac{2R}{3k}\left(\bar{E}-\frac{\bar{E}^2}{2mc^2}\right)=R\,T\left[1-\frac{13kT}{12mc^2}\right] \tag{65}$$

donde R es la constante universal de los gases perfectos.

7.—Las ondas relativistas de materia.

En la dinámica relativista del punto material, cuando las fuerzas derivan de un potencial U, se obtienen las fórmulas (véase bibliografía):

$$\frac{p^2}{m^2}=\frac{(W-U)^2}{m^2c^2}-c^2;\quad \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=W-U;$$

$$v=c\,\frac{\sqrt{(W-U)^2-m^2c^4}}{W-U};\quad p=m\,v\,\frac{dt}{d\tau} \tag{66}$$

donde W es la energía total de la partícula, t el tiempo medido por el observador, τ el tiempo medido por un observador invariablemente ligado al punto material en movimiento, m la masa en reposo, v la velocidad y p la cantidad de movimiento.

El movimiento tiene lugar de acuerdo con un principio de mínima acción, en virtud del cual la trayectoria hace mínima la integral:

$$\delta\int\sqrt{\frac{(W-U)^2}{m^2c^2}-c^2}\;ds=0 \tag{67}$$

Para que se pueda asociar una onda al movimiento de la partícula, la velocidad de fase v_f dela misma ha de ser igual a:

$$v_f=\frac{C}{\sqrt{\dfrac{(W-U)^2}{m^2c^2}-c^2}} \tag{68}$$

siendo C un coeficiente de proporcionalidad, para que el principio de Fermat del movimiento ondulatorio, que asegura que las trayectorias de los rayos anulan la variación de la integral:

$$\delta \int \frac{ds}{v_f} = 0 \tag{69}$$

coincida con (67).

Hacemos la hipótesis de que:

$$U + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = E = W - mc^2 = h\,\nu \tag{70}$$

en donde h es la constante de Planck. ν la frecuencia (no confundir con velocidad) con lo que la velocidad de fase v_f, se escribe:

$$v_f = \frac{h\nu}{m\sqrt{\dfrac{(h\nu + mc^2 - U)^2}{m^2 c^2} - c^2}} = \frac{h\nu}{p} \tag{71}$$

porque la constante C se determina por la condición de que la velocidad de grupo v_g sea igual a la velocidad de la partícula (66), de lo que se sigue que:

$$v_g = v; \quad \frac{1}{v_g} = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{\nu}{v_f}\right) \Rightarrow C = \frac{h\nu}{m} \tag{72}$$

o también:

$$v_g = v; \quad \frac{\nu}{v_f} = \int_{U/h}^{\nu} \frac{d\nu}{v_g} = \int_{U/h}^{\nu} \frac{h\nu + mc^2 - U}{c\sqrt{(h\nu + mc^2 - U)^2 - m^2 c^4}} d\nu \tag{73}*$$

con lo que se tiene exactamente para v_f el valor:

$$\frac{\nu}{v_f} = \frac{1}{hc}\sqrt{(h\nu + mc^2 - U)^2 - m^2 c^4} \Rightarrow v_f = (71),\ C = (72) \tag{74}$$

la última resulta de la (73). Por otra parte se tiene que:

$$\lambda\,\nu = v_f = \frac{h\nu}{p} \Rightarrow \frac{h}{\lambda} = p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{75}$$

y las (70) y (71) determinan la frecuencia y la longitud de onda asociada al movimiento de la partícula.

La teoría anterior conserva su validez si la partícula en vez de moverse libremente en el espacio, se mueve sobre una curva o superficie, con solo sustituir el ds de (67) y (69) por el de la curva o superficie.

8.—La modificación relativista de la ecuación de Schrödinger y el potencial paramétrico perturbador.

Si en la ecuación de propagación de una onda de velocidad de fase v_f

$$\Delta\,\psi - \frac{1}{v_f^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{76}$$

(*) $h\nu \geqslant U$ para que la integral no se imaginaria.

donde Δ es el laplaciano, hacemos:

$$\psi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)\, e^{-2\pi i \nu t} \tag{77}$$

la (76) se transforma en la:

$$\Delta\varphi + \frac{4\,\pi^2 \nu^2}{\nu_f^2}\varphi = 0 \tag{78}$$

y teniendo en cuenta la (74), la anterior se escribe:

$$\Delta\,\varphi + \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\frac{(W-U)^2}{c^2} - m^2\,c^2\right]\varphi = 0 \tag{79}$$

y si efectuamos la sustitución:

$$W = E + m\,c^2 \tag{80}$$

la (79) se transforma en la:

$$\Delta\,\varphi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U)\varphi + \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\frac{E-U}{c}\right]^2\varphi = 0 \tag{81}$$

en la que:

$$\frac{(E-U)^2}{2\,mc^2} \tag{82}$$

se puede considerar como un potencial perturbador de la ecuación clásica de Schröringer, que es la (81) sin el último sumando:

$$\Delta\varphi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U)\varphi = 0 \tag{83}$$

El potencial perturbador (82) es paramétrico, depende de los valores propios de la (83), y por tanto en el caso en que:

$$U \ll m\,c^2 \tag{84}$$

se puede obtener la solución de (81) a partir de la de (83) por el método clásico de la teoría de perturbaciones de la mecánica cuántica no relativista. Las (70) y (75) son las que hay que aplicar para la difracción de partículas de alta energía. Las ν_g se componen como las ν para las transformaciones de Lorentz, no así las ν_f.

El incremento de energía en primera aproximación ΔE_i correspondiente al estado i–ésimo debido al potencial perturbador (82) vale:

$$\Delta E_i = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i^*(x)\,\frac{(E_i-U)^2}{2\,mc^2}\,\varphi_i(x)\,dx \tag{85}$$

siendo $\varphi_i(x)$ la función propia correspondiente al valor propio E_i, para el caso de una sola variable.

7.—Ondas planas relativistas de materia y cuasipartículas relativistas. El efecto Doppler.

En el caso particular en que el movimiento de la partícula es rectilíneo y uniforme y el potencial $U = 0$, la onda asociada es la:

$$\psi(x,t) = a \exp\left[2\pi i \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)\right] \tag{86}$$

donde a es una constante. De (78) y (86) se sigue que:

$$h\nu = E(48); \quad p = \frac{h}{\lambda} = \sqrt{2\, m\, E\left(1 + \frac{E}{2mc^2}\right)} \tag{87}$$

el paso al último miembro es debido a (49). Por otra parte es:

$$\nu_f = \lambda\, \nu = \frac{E}{p} = \sqrt{\frac{h\nu}{2m(1 + h\nu/2mc^2)}}; \quad \nu_g = c\,\frac{\sqrt{h\nu(h\nu + 2mc^2)}}{h\nu + mc^2} = v \tag{88}$$

en virtud del valor de ν_f (75) y de (87), (88) coincide con (71) y la tercera (66) al hacer en ellas $U = 0$, y también esta última coincide con la segunda (49).

Si O_1 es un observador que se mueve con movimiento uniforme y rectilíneo de velocidad v respecto al observador O, entre las medidas de O y O_1 por las transformaciones de Lorentz existen las relaciones:

$$dx = dx_1 \operatorname{Ch} \alpha + c\, dt_1 \operatorname{Sh} \alpha; \; c\, dt = c\, dt_1 \operatorname{Ch} \alpha + dx_1 \operatorname{Sh} \alpha; \operatorname{Th} \alpha = \frac{v}{c} \tag{89}$$

y como para un mismo móvil M es:

$$p = m\,\frac{dx}{d\tau}; \quad E = m\, c^2\, \frac{dt}{d\tau} - m\, c^2 \tag{90}$$

se sigue para las medidas de O y O_1 las relaciones:

$$\begin{aligned} p &= p_1 \operatorname{Ch} \alpha + \left(\frac{E_1}{c} + m\, c\right) \operatorname{Sh} \alpha \\ \frac{E}{c} + m\, c &= \left(\frac{E_1}{c} + m\, c\right) \operatorname{Ch} \alpha + p_1 \operatorname{Sh} \alpha \end{aligned} \tag{91}$$

y de aquí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda_1} \operatorname{Ch} \alpha + \left(\frac{\nu_1}{c} + \frac{mc}{h}\right) \operatorname{Sh} \alpha \\ \frac{\nu}{c} + \frac{mc}{h} &= \left(\frac{\nu_1}{c} + \frac{mc}{h}\right) \operatorname{Ch} \alpha + \frac{1}{\lambda_1} \operatorname{Sh} \alpha \end{aligned} \tag{92}$$

y como:

$$dx^2 - c^2\, dt^2 = -\, c^2\, d\tau^2 \Rightarrow p^2 - \left(\frac{E}{c} + m\, c\right)^2 = -\, m\, c^2 \tag{93}$$

se sigue que:

$$m = \frac{p^2 - \frac{E^2}{c^2}}{2E} = \frac{h}{2\nu}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\nu^2}{c^2}\right) = \frac{h\nu}{2}\left(\frac{1}{\nu_f^2} - \frac{1}{c^2}\right) \tag{94}$$

y también se deduce la:

$$\frac{1}{\lambda^2} - \left(\frac{\nu}{c} + \frac{mc}{h}\right)^2 = -\frac{m^2 c^2}{h^2} \tag{95}$$

Las (92) son invertibles y se obtiene el resultado de efectuar la tal inversión haciendo en ellas los cambios:

$$\lambda \to \lambda_1, \quad \lambda_1 \to \lambda, \quad \nu_1 \to \nu, \quad \nu \to \nu_1, \quad \alpha \to -\alpha \tag{96}$$

Las (92) expresan el efecto Doppler en las ondas planas relativistas de materia. Si en ellas como en (95) hacemos $m = 0$ se obtienen las fórmulas relativistas correspondientes a las ondas luminosas ordinarias.

Cuando la dirección de propagación de la onda no coincide con la del movimiento del observador O_1 respecto al O, las (92) son válidas para la proyección de la dirección de propagación de la onda sobre la dirección del movimiento relativo de O y O_1, mientras que para las proyecciones sobre las otras dos direcciones perpendiculares se tiene:

$$\lambda' = \lambda_1' : \quad \lambda'' = \lambda_1'' \tag{97}$$

Para la velocidad de fase ν_f y los cosenos directores de la dirección de propagación de la onda plana se tienen las:

$$\nu_f = \frac{\nu}{\surd}; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\lambda\surd}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\lambda'\surd}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\lambda''\surd} \tag{98}$$

siendo:

$$\surd = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} + \frac{1}{\lambda''^2}} \tag{99}$$

y en las (94) y (95) hay que sustituir $1/\lambda$ por (99).

En el caso de una partícula, las cuatro magnitudes m, ν, p, E no son independientes, sino que dadas dos de ellas quedan automáticamente determinadas por las otras dos.

De (92) se sigue que es invariante para las transformaciones de Lorentz la expresión:

$$\frac{dx}{\lambda} - \left(\nu + \frac{mc^2}{h}\right) dt \tag{100}$$

Por otra parte se cumple para la velocidad de grupo ν_g que es igual a la velocidad v de la partícula que:

$$v = \nu_g = \frac{p}{m + E/c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\nu_g} = \frac{1}{\nu_f} + \frac{\nu_f}{c^2} \tag{101}$$

y teniendo en cuenta la definición de ν_g(72) a partir de (101) se obtiene una ecuación diferencial de primer orden de variables separadas que da v_f en función de ν, cuya integración conduce a:

$$\frac{1}{v_f} = \sqrt{\frac{2m}{h\nu} + \frac{1}{c^2}} \tag{102}$$

después de escoger la constante de integración igual a $2m/h$. La (102) coincide con la primera (88). De (101) se sigue que:

$$c^2\left[\frac{1}{v_g} - \sqrt{\frac{1}{v_g^2} - \frac{1}{c^2}}\right] = v_f < v = v_g < c \tag{103}$$

Tanto v_f como v_g crecen con la frecuencia ν, y tanto para ν infinito como para $m = 0$, son iguales v_f, v_g y c.

La correspondencia entre ondas y partículas es biunívoca, y dada la (86) se obtienen por las fórmulas anteriores m, v, p, E de la partícula asociada. También si hay dispersión y v_f es función de ν a todo tren de ondas corresponde un colectivo de partículas relativistas (o casi partículas) cuyas m, v, E, p, están dadas por las fórmulas anteriores a partir de la longitud de onda λ y de la frecuencia ν de las ondas del tren de ondas.

Si en las fórmulas anteriores hacemos $v_f = c/n$, siendo n el índice de refracción, obtenemos para la masa m, la energía E, la cantidad de movimiento p, y la velocidad v del fotón (también v_g) los valores:

$$m = \frac{h\nu(n^2-1)}{2c^2}; \quad E = \frac{h\nu(n^2+1)}{2}; \quad p = \frac{h\nu n}{c}; \quad v = \frac{2nc}{n^2+1} \tag{103 bis}$$

que muestran que la masa m del fotón es nula en el vacío y no lo es fuera del vacío, que su energía es mayor fuera que en el vacío, y que la máxima velocidad que puede alcanzar una partícula es inferior a la última (103 bis), y si la alcanza se transforma en un fotón de frecuencia dada por la primera (103 bis).

8.—El desdoblamiento en dos de las funciones de distribución de las velocidades, de las cantidades de movimiento y de la energía de un gas relativista de partículas.

En la mecánica estadística relativista, como la masa varía con la velocidad, las antecitadas funciones de distribución se desdoblan en dos: una para la fracción numérica y otra para la fracción másica.

Las $f(v)$ (45), $g(p)$(47) y $h(E)$(50) multiplicadas respectivamente por dv, dp, dE, dan la probabilidad de que una partícula tenga su velocidad comprendida entre v y $v + dv$, su cantidad de movimiento entre p y $p + dp$, y su energía entre E y $E + dE$, de modo que:

$$\frac{\Delta n}{n} = \int_{v_1}^{v_2} f(v)\, dv = \int_{p_1}^{p_2} g(p)\, dp = \int_{E_1}^{E_2} h(E)\, dE \tag{104}$$

da la fracción numérica, es decir el cociente de dividir por n (número total de partículas, muy grande) el número de partículas Δn cuyas velocidades, cantidades de movimiento y energía están entre v_1 y v_2, p_1 y p_2, E_1 y E_2 respectivamente.

Habida cuenta de como varía la masa con la velocidad y de las fórmulas establecidas en el § 5, si introducimos las nuevas funciones:

$$f_1(v) = \frac{A_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} f(v); \quad g_1(p) = B_1 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}\, g(p); \qquad (105)$$
$$h_1(E) = C_1 \left[1 + \frac{E}{mc^2}\right] h(E)$$

donde los coeficientes, lo son de normalización, las integrales:

$$\frac{\Delta M}{M} = \int_{v_1}^{v_2} f_1(v)\, dv = \int_{p_1}^{p_2} g_1(p)\, dp = \int_{E_1}^{E_2} h_1(E)\, dE \qquad (106)$$

dan la fracción másica, es decir, el cociente de dividir por M (masa total de las partículas) la masa ΔM de todas las partículas, cuyas v, p, y E están comprendidas dentro de los límites de la integral (106).

Los valores de $f(v)$, $g(p)$ y $h(E)$, por un lado y los $f_1(v)$, $g_1(p)$ y $h_1(E)$ por otro que tienen que estar forzosamente ligados por las relaciones (105) los hemos establecido por métodos independientes (véase bibliografía).

9.—Sobre las definiciones de unidad de longitud y de cantidad de sustancia.

Desde 1979 en diversas publicaciones y conferencias he expuesto una necesaria revisión de los fundamentos de la teoría de la relatividad restringida relacionada con la sustitución de las antiguas unidades de longitud y tiempo vigentes en 1905, por las nuevas, y proponía introducir como unidad fundamental la de la velocidad basada en la constancia de la velocidad de la luz en el vacío, y conservar también como fundamental la unidad de tiempo, basada en la definición actual o en la constante de semidesintegración de alguna sustancia radiactiva, lo que a mi juicio sería preferible. En consecuencia, la unidad de longitud pasaría a ser derivada en vez de fundamental. La actual definición de unidad de longitud adoptada por la Conferencia General de Pesos y Medidas de 1983, en realidad lo que ha hecho ha sido adoptar como fundamental la unidad de velocidad, al definirla como la longitud recorrida en el vacío por un rayo de luz; lo que está de acuerdo con mis ideas expresadas con anterioridad.

Así mismo al considerar en esta memoria que la masa de un gas varía con la temperatura, resulta que el número de Avogadro y la masa de un mol varía con la temperatura, y si la masa de un mol es constante entonces el número de Avogadro varía con la temperatura. En todo caso, al definir la actual unidad de cantidad de sustancia en relación con el número de átomos en una determinada masa de un determinado elemento químico, es necesario fijar la temperatura a que está la antedicha masa.

10.—La transformada de Lorentz de la ecuación de propagación de las ondas relativistas planas.

Como las v_g para las transformaciones de Lorentz se transforman de acuerdo con la ley de composición de velocidades de Einstein (3), para hallar la transformada de la (76) para $U = 0$, se pasa de la v_f de la onda primitiva a su v_g por (101), de la v_g de la onda primitiva se pasa a la v_g de la onda transformada por (3), y de la v_g de la onda transformada a su v_f por (103) con lo que se tiene la (76) para la onda transformada.

Teniendo en cuenta la (103), la (76) se escribe también:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left[\frac{1}{v_g} + \sqrt{\frac{1}{v_g^2} - \frac{1}{c^2}} \right]^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{107}$$

La masa en reposo m de la partícula asociada (94) ó (102) a la onda, es la misma (es un invariante) para la onda primitiva y la transformada.

Obsérvese que para $c = \infty$ es $v_g = 2v_f$, y para $v_f = v_g = c$, la ecuación (76) permanece invariante, como ya era sabido.

CONCLUSIONES

Hemos investigado las propiedades de las dos funciones de distribución de las velocidades, cantidades de movimiento y energía de un gas relativista de partículas, así como sus consecuencias físicas, entre las que figuran la variación de la masa con la temperatura, que puede ser grande a temperaturas altas, como las del interior de ciertas estrellas. Así mismo hemos investigado las propiedades de las ondas de materia relativistas y mostrado que la masa del fotón es nula en el vacío y no lo es fuera del vacío, y que su energía es menor en el vacío.

FUENTE BIBLIOGRAFICAS

Las actuales investigaciones prolongan las que habíamos expuesto en la memoria publicada en 1981 en el Boletín de la Universidad de Galati (Rumanía) que lleva por título "Un principio de correspondencia de la mecánica clásica y relativista"; así como en cuatro memorias publicadas en esta Revista en 1978, 1979, 1983 y 1984 que llevan por títulos: "Sobre los principios de mínimo de la electrodinámica y de la mecánica clásica y relativista", "Los espacios no riemannianos y el empleo de los métodos de la mecánica clásica en la teoría de la relatividad", "Principios variacionales y ecuaciones diferenciales de la dinámica relativista de los sistemas" y "Algunos nuevos teoremas de mecánica analítica e hidrodinámica relativistas".