

# ***Bifurcaciones de frentes en sistemas de reacción-difusión***

Por J. M. FRAILE y J. SABINA

Recibido: 28 julio 1983

*Presentado por el académico numerario Alberto Dou MasdeXexás.*

## **Abstract**

In this paper we prove the existence of a new kind of wave front solutions for reaction-diffusion systems with the feature that we are able to impose boundary value conditions to these on distinguished points only.

## **Resume**

Dans ce article on demontre l'existence d'une nouvelle classe de solutions, du type front d'ondes, pour des systemes paraboliques de reaction-diffusion. Elles ont la particularité d'admettre de conditions aux limites sur des points distingués de la frontière.

## **Resumen**

En este trabajo se demuestra la existencia de un nuevo tipo de frentes de onda, para sistemas parabólicos de reacción-difusión. Además tienen la característica de admitir condiciones de contorno sobre puntos distinguidos de la frontera y sólo sobre ellos.

## **1. INTRODUCCION**

Los sistemas de reacción-difusión acaparan actualmente la atención de un amplio sector de especialistas de la matemática aplicada. Esto es debido en parte, a que comparecen de una manera natural modelizando procesos de la realidad de muy diversa naturaleza: dinámica de poblaciones, cinética enzimática, transmisión de impulsos nerviosos, procesos que tienen lugar en reactores nucleares etc.

Como sistemas de evolución en el tiempo, los problemas prioritarios a plantearse se centran en el estudio de la existencia, en primer lugar, y en el comportamiento asintótico, de las soluciones. Este último es un requisito imprescindible para la garantía de que los resultados obtenidos son recuperables para las aplicaciones.

Un grupo distinguido de soluciones, por otra parte ampliamente estudiadas en la literatura [2], es el constituido por las de tipo homogéneo, estacionarias, periódicas, y las de tipo ondulatorio (frentes y trenes, ondas planas, ondas espirales, etc.) Relativamente a dicho grupo el interés radica en el rol que tienen tales soluciones como eventuales candidatos a realizar los estados asintóticos o tal vez transitorios del sistema (ver [2] y las numerosas referencias que allí se dan).

Precisamente, dentro de las de tipo ondulatorio, recibe un especial interés las soluciones de tipo frente de ondas planas ya que parecen adecuadas para describir, en primera aproximación, la formación de estructuras espacio-temporales en ciertos fenómenos ([5]). Sin embargo, y a diferencia de las soluciones convencionales de un sistema parabólico, tales soluciones son incompatibles con las condiciones de contorno estándar, lo cual dificulta enormemente su estudio, siendo necesarias técnicas hasta cierto punto sofisticadas para obtener información cualitativa acerca de las mismas ([1], [8]).

En el presente trabajo se estudia un tipo de soluciones dotadas de propiedades de propagación, los frentes de onda direccionales, quienes son susceptibles de admitir condiciones de contorno. Para ello introducimos un parámetro en el sistema con el fin de analizar, mediante técnicas estándar de la teoría de bifurcación ([7], [8]), el comportamiento de las mismas respecto a dicho parámetro. Establecemos además la relación asintótica que liga aquellas soluciones con los frentes de ondas.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se considera el siguiente sistema de tipo reacción-difusión:

$$\mathbf{u}_t = \mathcal{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(\lambda, \mathbf{u}) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) \in \mathbb{R}^m$  y  $x \in \Omega$ , dominio acotado de  $\mathbb{R}^n$  suficientemente

regular,  $t \in \mathbb{R}$ , y donde  $\lambda$  es un parámetro real,  $\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij} + \sum_{j=1}^n b_j D_j$

es un operador elíptico, con coeficientes constantes, y donde  $\mathbf{f}$  es una función de clase  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) cuyas propiedades se especificarán posteriormente.

El objetivo de este trabajo es estudiar la existencia y propiedades de soluciones de tipo *frente de ondas direccionales* de la ecuación (1).

Una de las características de este tipo de soluciones reside en el hecho de que, contrariamente a lo que sucede con frentes habituales (planos, espirales, etc.) resulta fácil dotarles de condiciones de contorno naturales que, a su vez distinguen ciertos puntos de la frontera de  $\Omega$  frente a los demás. ([9], [10]). Por otra parte, y en un sentido en el que se hablará más tarde, tales frentes son direccionales y su *estructura global* no cambia con la forma de  $\Omega$  salvo quizás si ésta se ve alterada en alguno de los puntos distinguidos.

Con el propósito de evitar que la exposición se convierta en excesivamente técnica, restringiremos nuestro estudio al caso  $m = 1$ ,  $n = 2$ , utilizando un lenguaje lo más intuitivo posible. En este espíritu nuestro objetivo

consiste en encontrar soluciones del tipo  $u(x_1, x_2, t) = u(k_1 x_1 - c_1 t, k_2 x_2 - c_2 t)$  para la ecuación (1) (ver p. e. [9] para el caso general).

Tales soluciones, sometidas a condiciones de tipo Dirichlet homogéneas en puntos distinguidos del borde de  $\Omega$ , conducen, tras un cierto número de tecnicismos obvios, al problema

$$\Delta v + f(\lambda, v) = 0 \quad \text{en } \omega \quad (2)$$

$$V|_{\partial\omega} = 0$$

siendo  $\omega = \mathbb{R} \times (-\alpha, \alpha)$  con  $\alpha > 0$ .

Durante el proceso arriba indicado resulta fácil ver que una adecuada elección para los valores de  $c_i$ , aún cuando no totalmente imprescindible, es,  $c_i = -k_i b_i$ , para unos ciertos  $k_i \in \mathbb{R}$ . De ahora en adelante, y por comodidad, supondremos los  $c_i$  elegidos con este criterio.

Por otra parte, las condiciones para la existencia de los puntos distinguidos, necesarios en nuestro caso particular, en el borde de  $\Omega$  son:

$$\exists x^\ell = (x_1^\ell, x_2^\ell) \in \partial\Omega, \ell = 1, 2, \text{ tales que, si llamamos}$$

$$H^\ell = \{(x_1, x_2) / c_1 k_2 (x_2 - x_2^\ell) = c_2 k_1 (x_1 - x_1^\ell)\},$$

se verifica que

$$H^1 \cap H^2 = \emptyset$$

$$\prod_{\ell=1}^2 [c_2 k_1 (x_1 - x_1^\ell) - c_1 k_2 (x_2 - x_2^\ell)] \leq 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$$

en cuyo caso, cada uno de los tales puntos quedaría caracterizado por ser cualquier  $x^* \in \partial\Omega$  tal que

$$c_2 k_1 (x_1 - x_1^*) \neq c_1 k_2 (x_2 - x_2^*), \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega$$

### Observaciones

- i) Si tales condiciones de existencia no se dieran, no habría puntos distinguidos asociados a los valores de  $c_i$ , arriba indicados y, por consiguiente, para dichos valores tampoco existirían frentes direccionales, aunque ello no excluye la posibilidad de frentes para otros valores admisibles de  $c_i$ .
- ii) Obviamente dichas relaciones se satisfacen si  $\Omega$  es convexo.
- iii) Tal y como se han definido los puntos distinguidos es necesario suponer que  $\partial\Omega$  no tiene autointersecciones. Esta restricción no es indispensable, pues resulta perfectamente posible adaptar las definiciones anteriores al caso de abiertos con bordes como los indicados

### 3. ESTABLECIMIENTOS DE RESULTADOS

En este punto introducimos las siguientes hipótesis sobre la función  $f \in C^r$  ( $r \geq 1$ )

( $F_1$ )  $f(\lambda, u) = a(\lambda)u - g(\lambda, u)$  donde las funciones  $a(\lambda) \in C^r$  y  $g$  satisfacen a su vez:

( $F_2$ )  $g(\lambda, 0) = 0, \quad \nabla g(\lambda, 0) = 0$

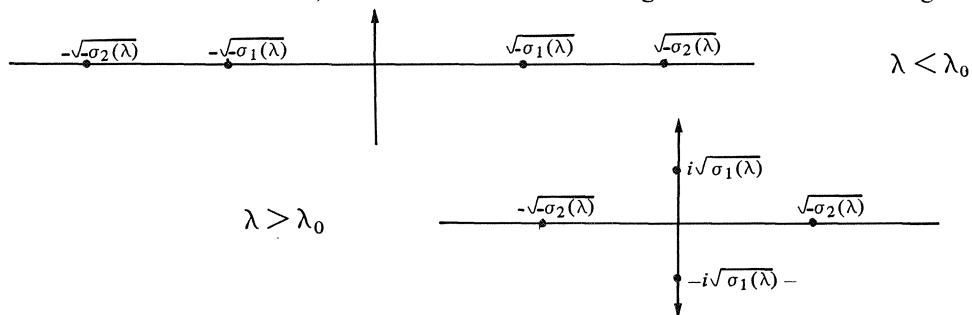
( $F_3$ )  $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$  tal que:

$$a(\lambda) < \frac{\pi^2}{4\alpha^2} \text{ (resp. } =, >) \text{ para } \lambda < \lambda_0 \text{ (resp. } =, >).$$

Tales hipótesis nos permiten observar el problema (2), sumergido en el cuadro funcional adecuado, como un problema de evolución en la variable  $y_1$ . Aplicando la técnica de la variedad centro, y siguiendo a [6], podemos describir con precisión el comportamiento de las soluciones de pequeña amplitud de (2). De hecho ( $F_3$ ) garantiza que el problema (2), considerado de evolución en  $y_1$ , tiene un espectro con las siguientes propiedades:

- (i) es simétrico respecto al eje imaginario para todo valor de  $\lambda$ , próximo a  $\lambda_0$ , y real si  $\lambda < \lambda_0$ .
- ii) cuando  $\lambda$  cruza  $\lambda_0$  en sentido creciente, únicamente dos de dichos autovalores alcanzan el valor 0 por la izquierda, continuando posteriormente por el eje imaginario, mientras que el resto del espectro se mantiene alejado del mismo para valores  $\lambda$  próximos a  $\lambda_0$ .

Concretamente si  $\sigma_k(\lambda)$  denotan los autovalores de  $\frac{d^2}{dy_1^2} + a(\lambda)I$  con condiciones nulas en  $\pm \alpha$ , la situación se resume gráficamente como sigue:



De esto se deduce que ([6] para detalles funcionales) es aplicable el cuadro de la variedad centro para el problema (2); entonces, si  $u = (u_1, u_2)$

denota la descomposición funcional asociada a tal técnica, donde  $u_1$  corresponde a la parte finito-dimensional de  $u$

$$u_1 = (u, \phi_1)_{L^2(-\alpha, \alpha)} \phi_1$$

y  $u_2$  toma la forma

$$u_2 = \sum_{j=2}^{\infty} (u, \phi_j)_{L^2(-\alpha, \alpha)} \phi_j,$$

siendo  $\phi_j$  la  $j$ -ésima autofunción, normalizada en  $L^2(-\alpha, \alpha)$ , del operador  $-\frac{d^2}{dy^2}$  con condiciones de Dirichlet nulas en  $\pm \alpha$ ; y si  $u_2 = h(\lambda, u_1)$  es la expresión de la variedad centro en cuestión (local en un entorno de  $(\lambda, u_1) = (\lambda_0, 0)$ ) se obtiene el resultado siguiente.

### Teorema

Si  $g(\lambda, v) = b_k(\lambda)v^k + \text{t.o.s.}$ , y si  $b^k(\lambda) \int_{-\alpha}^{+\alpha} \phi_1^{k+1}(\sigma) d\sigma > 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que:

1° Si  $k$  es par, para cada  $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$  existe  $v_\lambda = v_\lambda(y_1, y_2)$  solución acotada de (2), no periódica, que es única salvo traslaciones en  $y_1$  y que satisface:

$$(i) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |v_\lambda(\alpha x_1 + \beta x_2 - \eta t, \gamma x_1 + \mu x_2 - \xi t) - \phi_\lambda(\gamma x_1 + \mu x_2 - \xi t)| = 0, \quad \text{si } \lambda > \lambda_0,$$

uniformemente en  $(x_1, x_2) \in \Omega$

$$(ii) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v_\lambda(\alpha x_1 + \beta x_2 - \eta t, \gamma x_1 + \mu x_2 - \xi t) = 0, \quad \text{si } \lambda \leq \lambda_0$$

uniformemente en  $(x_1, x_2) \in \Omega$ ,

donde  $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \eta, \xi$ , son constantes independientes de  $\lambda$  y  $\phi_\lambda$  es la única solución de (2) independiente de  $y_1$  que bifurca de la solución trivial en  $\lambda = \lambda_0$

2° Si  $k$  es impar para cada  $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \delta)$  existen dos soluciones acotadas no periódicas,  $v_\lambda^\pm$ , de (2), única salvo traslaciones en  $y_1$ , que satisfacen:

$$(i) \quad \lim_{t \rightarrow \pm \infty} |v_\lambda^+(\alpha x_1 + \beta x_2 - \eta t, \gamma x_1 + \mu x_2 - \xi t) - \phi_\lambda^+(\gamma x_1 + \mu x_2 - \xi t)| = 0$$

$$(ii) \quad \lim_{t \rightarrow \pm \infty} |v_\lambda^-(\alpha x_1 + \beta x_2 - \eta t, \gamma x_1 + \mu x_2 - \xi t) - \phi_\lambda^-(\gamma x_1 + \mu x_2 - \xi t)| = 0$$

uniformemente en  $(x_1, x_2) \in \Omega$ ,

donde las constantes  $\alpha, \beta, \dots$  son independientes de  $\lambda$  y donde  $\phi_\lambda^\pm$  son las únicas soluciones  $y_1$  independientes de (2) que bifurcan de la solución trivial en  $\lambda = \lambda_0$ .

#### 4. DISCUSION

En este apartado llevamos a cabo una discusión somera de los resultados obtenidos, dando prioridad a la intuición geométrica frente a cuestiones técnicas. En primer lugar observaremos que el teorema anterior establece la existencia de frentes de onda direccionales para el problema (1), tal como se han definido en el apartado 2. Sin embargo tales frentes no aparecen caprichosamente para cualesquiera abiertos acotados  $\Omega$ , sino que dependen íntimamente de que  $\delta\Omega$  existan unos puntos (los puntos distinguidos) sobre los que van a tener sentido, solamente sobre ellos, las condiciones de contorno (en este caso de tipo Dirichlet; para otras condiciones, ver [4], [10]). Por otra parte y ésta es otra novedad del presente trabajo, se introducen, por primer vez a nuestro juicio, condiciones de contorno para soluciones, de tipo de frentes de ondas direccionales, del sistema  $\mathbb{R}-D$  en los que las variables espaciales varían en abiertos acotados y se seleccionan los puntos de  $\partial\Omega$  en que tales condiciones son compatibles con la particularidad “solución de tipo frente”.

Hasta aquí las novedades, con la indicación suplementaria de que, excepto por algunas complicaciones adicionales de tipo técnicas debidas a las nuevas dimensionalidades, el mismo cuadro funcional y, en alguna medida, resultados similares al actual, se obtienen en el caso  $m, n \geq 2$  ([9], [10]).

En cuanto a lo que concierne propiamente al teorema haremos los comentarios en una serie de etapas:

- i) No sólo se demuestra la existencia de frentes de onda direccionales de (1), sino también la de frente de onda planos ( $\phi_\lambda, \phi_\lambda^\pm, \phi_\lambda^\mp$ ) para la misma ecuación.

Además tales frentes de onda planos aparecen como estructuras espacio temporales hacia los que los frentes direccionales se van aproximando en el tiempo (pasado o futuro), uniformemente en las variables espaciales. Pero a su vez, las estructuras espacio-temporales,  $\phi_\lambda, \phi_\lambda^\pm, \phi_\lambda^\mp$ , pueden tender como soluciones particulares de (1) que son, hacia otros estados asintóticos —éstos ya definitivos— cuando  $t \rightarrow \pm \infty$  lo que convierte a los frentes de onda planos (o, al menos, a los obtenidos en el teorema) en estados asintóticos, transitorios en el tiempo, de estructuras más complicadas como son los frentes direccionales. Ello no hace restar importancia ni a unos no a otros pues en definitiva, todo proceso espacio-temporal parece obligado a evolucionar hacia estructuras finales, sean estas simples o complejas, en este sentido las soluciones tipo frente no sólo pueden ser una herramienta para conocer (algunos de) los estados finales, sino que además la naturaleza parece dispensarle un especial cariño.

- ii) Un segundo punto importante radica en que las soluciones de tipo onda plana también satisfacen las mismas condiciones de contorno que las direccionales, por su misma construcción. En nuestro caso satisfacen que  $\phi_\lambda(x^*, t) = 0 \forall t, \forall x^*$  distinguido.
- iii) Finalmente al menos desde un punto de vista teórico, tales soluciones son numéricamente aproximables, aproximando primero la variedad centro y estudiando numéricamente el sistema (2) restringido a la misma.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] CONLEY, C. : "Isolated invariant sets and the generalized Morse index". C.B.M.S. Regional Conference Series in Mathematics, núm. 38
- [2] FIFE, P. C.: "Mathematical aspects of reacting and diffusing systems". Lecture Notes in Biomathematics, 28. Springer-Verlag. (1979).
- [3] FRAILE, J. y SABINA J.: "Nuevos resultados para frentes de onda en sistemas de reacción-difusión". Comunicación enviada al VI CEDYA (Jaca, 1983).
- [4] FRAILE, J. y SABINA, J.: "Time periodic conditions for traveling waves in bounded domains". En preparación.
- [5] HOWARD, L. N.: "Chemical wave-trains and related structures". Appl. of Bifurcation Theory (ed. P. Rabinowitz), Ac. Press. (1977).
- [6] KIRCHGASSNER: K.: "Wave-solutions of reversible systems and applications", J. of Differential Equations 45 (1982).
- [7] KIRCHGASSNER, K. : "Homoclinic bifurcation of perturbed reversible systems" CIMPA, Niza (1983).
- [8] KOPELL-N. AND HOWARD, L. N.: "Bifurcations and trajectories joining critical points", Adv. Math, 18 (1975).
- [9] SABINA, J.: Manuscrito para Tesis Doctoral.
- [10] SABINA, J. y FRAILE, J.: "On some questions related to boundary value conditions for traveling waves reaction-diffusion systems". En preparación.

Departamento de Ecuaciones Funcionales  
Facultad de Matemáticas  
Universidad Complutense  
Madrid