Operadores sobre espacios de sucesiones infraperiódicas con valores vectoriales (I)

por J. M. MORAL MEDINA

Recibido: 1 junio 1983

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia Ureña

Resumen

En este artículo se denota por $lp(E)$ a la adherencia, en la topología de la convergencia uniforme, del espacio $p(E)$ de las sucesiones biláteras periódicas con valores en un espacio vectorial topológico E. En primer lugar se caracterizan los elementos de lp(E), a los que se denomina sucesiones infraperiódicas, mediante ciertas propiedades intrínsecas. Después se estudian representaciones de los operadores lineales de este espacio en otro espacio vectorial topológico arbitrario, y en particular, suponiendo que éste es otro espacio de sucesiones, se estudia la forma de los operadores que conmutan con la traslación.

Abstract

In this paper $lp(E)$ stands for the closure, in the uniform convergence topology, of the space p(E) of periodic (bilateral) sequences with values in a topological vector space E. We call infraperiodic sequences to the elements of $lp(E)$ and we characterize them by certain intrinsecal properties. Later on we study representations of linear operators from this space to an arbitrary topological vector space. When this second space is assumed to be a sequence space we study those linear operators commuting with translations.

1. INTRODUCCION

A lo largo de este trabajo los símbolos C, R, Q, Z y Z^+ designarán respectivamente los conjuntos de los números complejos, reales, racionales, enteros y enteros estrictamente positivos. Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo K (C o R). Una sucesión (bilátera) de elementos de E es una aplicación f de Z en E. Decimos que f es periódica de período ν si $f(n + \nu) = f(n)$ para todo $n \in Z$. Al espacio vectorial de las sucesiones periódicas de elementos de E lo denotamos por $p(E)$. Siempre que no sea necesario distinguir entre C y R llamaremos p a $p(K)$, es decir, al espacio de las sucesiones periódicas con valores escalares.

Para cada par de enteros positivos ν, j tales que $0 \leqslant j \leqslant \nu - 1$ sea $v_{\nu j}$ la sucesión de p definida por

$$v_{\nu j}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; n - j = \dot{\nu}. \\ 0 & \text{si } \; n - j \neq \dot{\nu}. \end{cases}$$

El conjunto de los $v_{\nu j}$ es un sistema de generadores de p ,ya que

$$f = \sum_{j=0}^{\nu-1} f(j)\, v_{\nu j} \text{ si } f \text{ tiene período } \nu.$$

Por otra parte, no es una base, pues $v_{\nu j}$ es la suma de

$$v_{r\nu, j}, v_{r\nu, j+\nu}, \ldots, v_{r\nu, j+(r-1)\nu}$$

sea cual fuere el entero positivo r.

Para conseguir mayor brevedad en el desarrollo que sigue hacemos la convención de llamar ag si $a \in E$ y $g \in p$ al elemento de $p(E)$ dado por $(ag)(n) = g(n)a$ para todo $n \in Z$. De esta forma cualquier $f \in p(E)$ de período ν puede escribirse como $f = \sum_{k=0}^{\nu-1} f(k) v_{\nu k}$. Si $a, b \in E, f, g \in p$ y $\lambda, \mu \in K$ se tiene:

$$a(\lambda f + \mu g) = \lambda(af) + \mu(ag), (\lambda a + \mu b)f = \lambda(af) + \mu(bf)$$

Si E es un espacio vectorial topológico, llamaremos $B_E(0)$ a una base de entornos equilibrados de 0, $\omega(E)$ al espacio vectorial topológico de las sucesiones (biláteras) de elementos de E con la topología producto de Z copias de E, y $l^\infty(E)$ al subespacio vectorial de $\omega(E)$ formado por las sucesiones f tales que $\{f(k)\colon k \in Z\}$ es un subconjunto acotado de E. Sobre $l^\infty(E)$ consideramos la única topología compatible con su estructura de espacio vectorial para la que $\{W_U : U \in B_E(0)\}$ es una base de entornos de 0, siendo

$$W_U = \{f \in l^\infty(E)\colon (\forall k \in Z)\, f(k) \in U\}$$

Esta topologia, llamada de la convergencia uniforme en Z, es estrictamente más fuerte que la inducida por la topología de la convergencia puntual que hemos definido sobre $\omega(E)$.

Mediante razonamientos similares a los del caso particular $E = K$, puede demostrarse que E es completo si y sólo si $\omega(E)$ lo es; y tambien sí y sólo si $l^\infty(E)$ lo es. Este espacio no es separable en ningún caso si $E \neq 0$, mientras que $\omega(E)$ es separable sí y sólo si E lo es.

Es claro que en cualquier caso $p(E) \subset l^\infty(E)$, ya que el rango de cualquier $f \in p(E)$ es finito. Es asimismo fácil ver que $p(E)$ es separable sí y sólo si E es separable, basándose en que $\overline{p(A)} = p(E)$ si $\overline{A} = E$, donde $p(A)$ es el conjunto de sucesiones de $p(E)$ que sólo toman valores en A.

Designamos por T al operador de traslación, que asigna a cada $f \in \omega(E)$ la sucesión Tf dada por $(Tf)(n) = f(n-1)$ para todo $n \in Z$. Diremos que un subespacio χ de $\omega(E)$ es invariante por traslaciones (en plural) cuando la restricción de T a χ es un automorfismo de χ, es decir cuando $T^k f \in \chi$ para toda $f \in \chi$ y todo $k \in Z$. Es claro que $\omega(E)$, $l^\infty(E)$ y $p(E)$ son invariantes por traslaciones en este sentido, más restrictivo que el usual de subespacio invariante frente al operador T. Además, T es un homeomorfismo lineal de $l^\infty(E)$ sobre sí mismo, y deja invariante cada entorno W_U.

Sea $D = (Z^+, \leqslant)$ el conjunto de los enteros positivos dirigido por la relación de orden siguiente: $\alpha \leqslant \beta$ si $\beta = \dot{\alpha}$. Una red $\{X_\alpha: \alpha \in D\}$ del espacio vectorial topológico X converge a $x \in X$ cuando para todo entorno W de 0 en X existe $\tau \in Z^+$ tal que $x_\alpha - x \in W$ siempre que $\alpha = \dot{\tau}$. Expresamos esto mediante la notación $x = \lim\limits_{\alpha \in D} x_\alpha = \lim\limits_{\alpha} x_\alpha$. La restricción de la relación $\leqslant$ a $Z^* = \{\nu!: \nu \in Z^+\}$ es la restricción de la relación de orden habitual de los enteros, y $(Z^*, \leqslant)$ es cofinal en D, por lo que $\lim\limits_{\nu \to \infty} x_{\nu!} = \lim\limits_{\alpha} x_\alpha$ cuando este último límite existe.

La adherencia de $p(E)$ en $l^\infty(E)$ será designada por $lp(E)$, y sus elementos como *sucesiones infraperiódicas*, por tener la propiedad $b)$ del enunciado siguiente. En él todos los límites se refieren a la topología de $l^\infty(E)$.

2. EL ESPACIO $lp(E)$

El siguiente resultado caracteriza de diversas formas a las sucesiones infraperiódicas. Por brevedad, la demostración se llevará a cabo "circularmente" aunque algunas implicaciones entre sus asertos son evidentes o muy sencillas de probar, como por ejemplo $c) \to f)$, $d) \to g)$ y $b \longleftrightarrow e)$.

Teorema 1.–*Sea E un espacio vectorial topológico, y sea $f \in l^\infty(E)$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $f \in lp(E)$

b) Para cada entorno U de 0 en E existe $\tau \in Z^+$ tal que $f(k_1) - f(k_2) \in U$ si $k_1 - k_2 = \dot{\tau}$.

c) $f = \lim\limits_{\alpha} \sum\limits_{k=0}^{\alpha-1} f(k) v_{\alpha k}$

d) Existe una sucesión $g \in l^\infty(E)$ tal que $f = \lim\limits_{\alpha} \sum\limits_{k=0}^{\alpha-1} g(k) v_{\alpha k}$

e) $f = \lim\limits_{\alpha} T^\alpha f$

f) $f = \lim\limits_{\nu \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{\nu!-1} f(k) v_{\nu!,k}$

g) Existe una sucesión $g \in l^\infty(E)$ tal que $f = \lim\limits_{\nu \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{\nu!-1} g(k) v_{\nu!,k}$

Demostración. La equivalencia $a) \longleftrightarrow b)$ está demostrada en (Núñez 1980) para E localmente convexo y completo. En el caso general vale el mismo razonamiento, que modificamos para probar que $a)$ implica $b)$ sin usar redes. Sean $f \in lp(E)$, U un entorno de 0 en E, $V \in B_E(0)$ tal que $V + V \subset U$ y $\hat{f} \in p(E)$ tal que $f - \hat{f} \in W_V$. Si τ es el período de $\hat{f}$ y $k_1 - k_2 = \dot{\tau}$

se tiene:

$$f(k_1) - f(k_2) = f(k_1) - \hat{f}(k_1) + \hat{f}(k_2) - f(k_2) \in V + V \subset U$$

Supongamos ahora que se verifica b). Para cada entero positivo α sea F_α la sucesión de período α dada por $F_\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha-1} f(k)\, v_{\alpha k}$. Fijado un entorno U de 0 en E, sea τ tal que $f(k_2) - f(k_1) \in U$ si $k_2 - k_1 = \dot{\tau}$. Si $\alpha = \dot{\tau}$ y k' es, para cada entero k, el resto de dividirlo por α, se cumple que

$$f(k) - F_\alpha(k) = f(k) - f(k') \in U.$$

Por tanto, $\lim_\alpha F_\alpha = f$, que es el aserto c). Es obvio que éste implica d). Supongamos que se verifica d) y que U es un entorno de 0 en E; sea $V \in B_E(0)$ tal que $V + V \subset U$ y $\tau \in Z^+$ tal que $f - \sum_{k=0}^{\tau-1} g(k) v_{\tau k} \in W_V$. Si $\alpha = \dot{\tau}$ el operador T^α transforma $g(k) v_{\tau k}$ en sí misma, por lo que

$$T^\alpha f - \sum_{k=0}^{\tau-1} g(k) v_{\tau k} \in T^\alpha W_V = W_V$$

Por ser W_V equilibrado se tiene finalmente, para $\alpha = \dot{\tau}$, que

$$f - T^\alpha f \in W_V + W_V \subset W_U;$$

luego $f = \lim_\alpha T^\alpha f$, que es la afirmación e). Supuesta ésta cierta y dado $U \in B_E(0)$, sea $\tau \in Z^+$ tal que, si $\alpha \in Z^+$ y $\alpha = \dot{\tau}$, se verifica

$$T^\alpha f - f \in W_U, \text{ es decir, } f(k - \alpha) - f(k) \in U$$

para todo $k \in Z$. Esto equivale, por ser U equilibrado, a que

$$f(k_1) - f(k_2) \in U \text{ si } k_1 - k_2 = \dot{\tau}\ .$$

Así hemos demostrado b), que sabemos que implica c), es decir, $\lim F_\alpha = f$. Inmediatamente resulta $\lim_{\nu \to \infty} F_{\nu!} = f$, que es la afirmación f). Es obvio que ésta implica g). Finalmente, si ésta se verifica f es el límite en $l^\infty(E)$ de una sucesión de funciones periódicas, y por consiguiente $f \in \overline{p(E)} = lp(E)$, lo que concluye la demostración.

La caracterización f) del teorema pone de manifiesto que toda sucesión infraperiódica es el límite de la sucesión $F_{\nu!}$ de sus secciones de 0 a $\nu! - 1$ prolongadas periódicamente. Por tanto:

Corolario 1. *La adherencia secuencial de $p(E)$ en $l^\infty(E)$ coincide con la adherencia $lp(E)$.*

Además, c) expresa que las F_α, secciones de 0 a $\alpha - 1$ de f prolongadas periódicamente, convergen a f en cierto sentido –el de una red–. Por otra parte, la convergencia en $l^\infty(E)$ implica la convergencia puntual en Z, por lo que de d) y g) se deduce:

Corolario 2. *Si $f \in lp(E)$, para todo $k \in Z$ se verifica:*

$$f(k) = \lim_{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha-1} v_{\alpha j}(k) f(j) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{j=0}^{\nu!-1} v_{\nu! j}(k) f(j)$$

Por tanto, una sucesión infraperiódica está totalmente determinada por los valores que toma sobre los enteros no negativos.

Consideremos ahora el espacio $l_N^\infty(E)$ de las sucesiones ordinarias (no biláteras) de elementos de E con la topología de la convergencia uniforme, es decir, la topología obtenida sustituyendo en la definición de la de $l^\infty(E)$ el conjunto Z por el conjunto N de los enteros no negativos. La proposición que sigue expresa que, si E es completo, el estudio del espacio $lp(E)$ es equivalente en gran manera al del espacio $lp_N(E)$, adherencia en $l_N^\infty(E)$ del $p_N(E)$ de sucesiones ordinarias periódicas.

Teorema 2. *Si E es completo la aplicación de $lp(E)$ en $lp_N(E)$ que hace corresponder a cada $f \in lp(E)$ la sucesión $\hat{f} = (f(n))_{n \in N}$ es un isomorfismo topológico sobreyectivo.*

Demostración. En primer lugar notemos que la aplicación está bien definida en cuanto a la pertenencia de las imágenes a $lp_N(E)$, ya que la imagen de $p(E)$ es $p_N(E)$, y si $\{f_n\} \subset p(E)$ converge a f es claro que $\{\hat{f}_n\} \subset p_N(E)$ converge a $\hat{f}$, que por tanto pertenece a $lp_N(E)$. La linealidad y la continuidad se demuestran con razonamientos elementales. Para ver que la aplicación es inyectiva basta observar que, si $f \in lp(E)$ y $f(n) = 0$ para todo $n \geqslant 0$, el teorema 1, c), nos dice que $f = \lim F_\alpha$, con $F_\alpha = 0$ para todo $\alpha > 0$.

Sea $g \in lp_N(E)$ el límite de la red $\{g_i\} \subset p_N(E)$, y sea f_i, para cada i, la prolongación periódica de g_i a Z, lo que equivale a decir que $\hat{f}_i = g_i$. La red $\{f_i\} \subset p(E)$ es de Cauchy en $l^\infty(E)$; en efecto, dado el entorno V de 0 en E existe i_0 tal que, si $i,j \geqslant i_0$, $f_i(k) - f_j(k) \in V$ para todo $k \geqslant 0$. Si $k < 0$ podemos encontrar un período ν_{ij} común a f_i y a f_j tal que $k + \nu_{ij} \geqslant 0$, y por tanto

$$f_i(k) - f_j(k) = f_i(k + \nu_{ij}) - f_j(k + \nu_{ij}) \in V$$

de lo que resulta que $f_i - f_j \in W_V$ si $i, j \geqslant i_0$. Por ser $l^\infty(E)$ completo $\{f_i\}$ converge a una sucesión $f \in lp(E)$. Para demostrar que la aplicación dada es sobreyectiva basta ver que $\hat{f} = g$, lo cual es consecuencia de que para $k \geqslant 0$, se verifica:

$$f(k) = \lim_i f_i(k) = \lim_i g_i(k) = g(k)$$

Aplicando el corolario 2 se tiene ahora:

$$f(k) = \lim_\alpha \sum_{j=0}^{\alpha-1} v_{\alpha j}(k) g(j) = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{j=0}^{\nu!-1} v_{\nu!,j}(k) g(j)$$

fórmula que expresa la aplicación inversa, que hace corresponder a $g \in lp_N(E)$ la sucesión $f \in lp(E)$. Para probar que es contínua, dado un entorno cerrado V de 0 en E llamamos $W_{V,N}$ al entorno de 0 en $l_N^\infty(E)$ definido así:

$$W_{V,N} = \{g \in l_N^\infty(E). \ (\forall\, k \in N) \ g(k) \in V\}$$

Si $g \in W_{V,N} \cap lp_N(E)$ se cumple que $g(j) \in V$ para $j \geqslant 0$, y por tanto $\sum_{j=0}^{\alpha-1} v_{\alpha j}(k) g(j) \in V$ para $k \in Z$ y $\alpha \in Z^+$. Tomando el límite en α queda $f(k) \in \overline{V} = V$ para todo $k \in Z$, es decir, $f \in W_V \cap lp(E)$. Por consiguiente dado un entorno cerrado en $lp(E)$ existe un entorno en $lp_N(E)$ cuya imagen por la aplicación inversa está contenida en aquél. Esto concluye la demostración.

Escolio. Si E es completo y $g \in lp_N(E)$, la sucesión

$$f = \lim_\alpha \sum_{k=0}^{\alpha-1} g(k) v_{\alpha k} = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{k=0}^{\nu!-1} g(k) v_{\nu!,k}$$

es la única prolongación de g a Z que pertenece a lp(E).

Con poco esfuerzo puede verse ahora que, reemplazando $l^\infty(E)$, $lp(E)$, $v_{\alpha k}$ por sus respectivos análogos para sucesiones ordinarias $l_N^\infty(E)$, $lp_N(E)$, $v_{\alpha k,N}$, sigue siendo válido el teorema 1, siempre que se suprima e) del enunciado, ya que para éstas no tiene sentido la definición del operador T que hemos dado para las biláteras. Por otra parte, un sencillo razonamiento con la sucesión bilátera simétrica de $f \in lp(E)$ muestra que este teorema es válido, tanto para unas como para otras, si en e) se sustituye la traslación (a la derecha) T por T^{-1} (traslación a la izquierda). Se tiene así:

Teorema 3. *El enunciado del teorema* 1 *sigue siendo válido reemplazando e) por*

e') $f = \lim_\alpha T^{-\alpha} f$

Con esta modificación también lo es para sucesiones ordinarias, es decir, sustituyendo $l^\infty(E)$, $lp(E)$, $v_{\alpha k}$ por $l^\infty_N(E)$, $lp_N(E)$, $v_{\alpha k,N}$ *respectivamente.*

El resultado que viene a continuación permite concretar hasta un cierto punto la forma en que una sucesión o una red de sucesiones periódicas se aproxima a su límite en el caso de que éste no sea periódico.

Teorema 4. Sea $\{f_\alpha: \alpha \in L\} \subset p(E)$ *una red que converge a la sucesión no periódica* f, *y sea* ν_α *un período de* f_α *para cada* $\alpha \in L$. *Entonces:*

a) *Para cada* $N \in Z^+$ *existen* $k = k(N) \in Z$ *y* $\alpha_0 \in L$ *tales que* $f_\alpha(k+N) \neq f_\alpha(k)$ *si* $\alpha \geqslant \alpha_0$; *por tanto,* N *no es período de* f_α *si* $\alpha \geqslant \alpha_0$.

b) $\lim \nu_\alpha = +\infty$.

Demostración. Por no pertenecer f a $p(E)$ existe $k \in Z$ tal que $f(k+N) - f(k) = a \neq 0$. Sea V un entorno equilibrado de 0 en E tal que $a \notin V + V$, y $\alpha_0 \in L$ tal que $f_\alpha - f \in W_V$ para $\alpha \geqslant \alpha_0$. Para cualquiera de estos valores de α se tiene:

$$a = f(k+N) - f_\alpha(k+N) + f_\alpha(k+N) - f_\alpha(k) + f_\alpha(k) - f(k)$$

$$a \in f_\alpha(k+N) - f_\alpha(k) + V + V$$

Luego $f_\alpha(k+N) - f_\alpha(k) \neq 0$, lo que prueba *a*). Sea ahora M un entero positivo y $N = M!$. Existe $\alpha_0 \in L$ tal que $M!$ no es período de f_α si $\alpha \geqslant \alpha_0$, lo que implica que $\nu_\alpha > M$ para estos valores de α. Esto demuestra *b*).

3. INTEGRACION RESPECTO DE MEDIDAS CON VALORES EN $\mathcal{L}(E,F)$

Sean E, F dos espacios vectoriales topológicos sobre K, $\mathcal{L}(E, F)$ el espacio vectorial de las aplicaciones lineales contínuas de E en F, y R un anillo de subconjuntos de Z. Una medida (función de conjunto) μ finitamente aditiva sobre R con valores en $\mathcal{L}(E, F)$ se dice que es de *variación acotada* si, para todo entorno U de 0 en F existe un entorno V de 0 en E tal que, para toda partición $\Pi = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de Z por conjuntos de R se verifica que $\sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) \cdot V \subset U$, es decir $\sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) \cdot a_i \in U$, para cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_p \in V$.

Por simplicidad sustituímos en adelante, como acabamos de hacer, el paréntesis por un punto para designar las imágenes de elementos y subconjuntos de E por aplicaciones de $\mathcal{L}(E, F)$. Llamaremos $bv(Z, R, \mathcal{L}(E, F))$ al espacio vectorial de todas estas medidas.

Sobre el conjunto P de todas las particiones de Z por conjuntos de R consideramos la relación de orden habitual: $\Pi \leqslant \Pi'$ si cada conjunto de Π' está contenido en un conjunto de Π. Sea $\Pi = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ una partición perteneciente a P, $r_i \in A_i$ para $1 \leqslant i \leqslant p$, y f una sucesión de elementos de E. Consideramos la suma de Riemann $S_\Pi = S(f, \Pi, \mu; r_1, ..., r_p)$ definida por $S_\Pi = \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i).f(r_i)$. Diremos que f es R-integrable respecto de μ cuando exista el límite de la red multiforme $\{S_\Pi : \Pi \in P\}$. En tal caso escribiremos:

$$R - \int f d\mu = \lim_{\Pi} S_\Pi$$

Omitiremos la referencia al anillo R cuando no haya lugar a confusión.

Para cada $A \in R$ llamemos χ_A a la función característica de A. Sea $\bar{b}(E, R)$ la adherencia en la topología de $l^\infty(E)$ del subespacio $b(E, R)$ formado por las sucesiones de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A(i)}$, donde los a_i son elementos de E y los $A(i)$ —notados así en lugar de A_i por exigencias tipográficas— conjuntos disjuntos pertenecientes a R. Una tal sucesión toma el valor a_i en cada entero $n \in A_i$, y el valor 0 en cada entero n que no pertenece a ningún A_i.

Teorema 5. *Sea F un espacio vectorial topológico completo. Si $f \in \bar{b}(E, R)$ y $\mu \in bv(Z, R, \mathcal{L}(E, F)$, f es R–integrable respecto de μ.*

Demostración.— Consideremos primero $f = a\chi_A$, donde $a \in E$ y $A \in R$. Sea $\Pi_0 = \{A, Z - A\}$, $\Pi = \{E_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p}$ una partición más fina que Π_0 —es decir, $\Pi \geqslant \Pi_0$ — y $r_i \in E_i$ para $1 \leqslant i \leqslant p$. Si $E_i \subset A$ es $f(r_i) = \chi_A(r_i)a = a$, mientras que si $E_i \subset Z - A$ es $f(r_i) = 0$, por lo que $S_\Pi = \sum_{i=1}^{p} \mu(E_i) \cdot f(r_i) = \mu(A) \cdot a$. Luego $\int a \chi_A \, d\mu = \mu(A) \cdot a$. De aquí resulta con facilidad el teorema para $f \in b(E, R)$, en cuyo caso las sumas de Riemann correspondientes a particiones más finas que una cierta Π_0 coinciden con el valor de la integral. Demostramos ahora que, si $f \in \bar{b}(E, R)$, la red $\{S_\Pi\}$ es de Cauchy. Sean U, U_1 entornos de 0 en F tales que $U_1 + U_1 \subset U$, y V un entorno equilibrado de 0 en E tal que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu(E_i) \cdot V \subset U_1 \qquad \text{para toda } \Pi = \{E_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p} \in P$$

Sea $g \in b(E, R)$ tal que $f - g \in W_V$ y sea Π_0 una partición tal que, si $\Pi \geqslant \Pi_0$, la suma de Riemann $S_\Pi = S_\Pi(g)$ es igual a la integral de g respecto de μ. Para cualesquiera $\Pi = \{E_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $\Pi' = \{E'_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ más finas que Π_0 se tiene:

$$S_\Pi(f) - S_{\Pi'}(f) = S_\Pi(f) - S_\Pi(g) + S_{\Pi'}(g) - S_{\Pi'}(f) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \mu(E_i) \cdot (f(r_i) - g(r_i)) + \sum_{j=1}^{n} \mu(E'_j) \cdot (g(r'_j) - f(r'_j))$$

Puesto que $f(k) - g(k) \in V$ para todo $k \in Z$ y V es equilibrado, se tiene finalmente:

$$S_\Pi(f) - S_\Pi{}'(f) \in \sum_{i=1}^{m} \mu(E_i) \cdot V + \sum_{j=1}^{n} \mu(E'_j) \cdot V \subset U_1 + U_1 \subset U$$

lo que concluye la demostración.

Puede comprobarse con facilidad que esta operación de integración es lineal con respecto a f y con respecto a μ. Además se tiene:

Teorema 6. *Sea F completo, $\mu \in bv(Z, R, \mathcal{L}(E, F))$, y sea*

$$\gamma_\mu : \overline{b}(E, R) \to F$$

la aplicación dada, para cada $f \in \overline{b}(E, R)$, por $\gamma_\mu(f) = \int f d\mu$. La correspondencia $\mu \to \gamma_\mu$ es un isomorfismo entre $bv(Z, R, \mathcal{L}(E, F))$ y el espacio $\mathcal{L}(\overline{b}(E, R), F)$ de las aplicaciones lineales contínuas de $\overline{b}(E, R)$ en F.

Demostración. La linealidad de γ_μ resulta de la linealidad de la integración respecto del integrando. En cuanto a la continuidad, sea U un entorno cerrado de 0 en F y sea $V \in B_E(0)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) \cdot V \subset U \text{ para toda } \Pi = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p} \in P$$

Si $f \in W_V \cap \overline{b}(E, R)$ todos sus valores $f(k)$ pertenecen a V, y por tanto $S_\Pi(f) \in U$ para cualquier partición $\Pi = \{A_i\}$ y cualesquiera $r_i \in A_i$. Como f es integrable se tiene:

$$\gamma_\mu(f) = \int f d\mu = \lim_{\Pi} S_\Pi(f) \in \overline{U} = U$$

Esto demuestra que γ_μ es contínua. De la linealidad de la integración respecto de la medida resulta que la aplicación: $\mu \to \gamma_\mu$ es lineal. Si $\gamma_\mu = 0$, $A \in R$ y $a \in E$, de acuerdo con lo visto en la demostración anterior se verifica:

$$\mu(A) \cdot a = \int a\chi_A d\mu = \gamma_\mu(a\chi_A) = 0$$

y por consiguiente $\mu = 0$, lo que prueba que $\mu \to \gamma_\mu$ es inyectiva. Para ver que es sobreyectiva, dada $\gamma \in \mathcal{L}(\overline{b}(E, R), F)$ definimos $\mu(A)$ para cada $A \in R$ como la aplicación de E en F tal que $\mu(A) \cdot a = \gamma(a\chi_A)$ para todo $a \in E$. Entonces $\mu(A)$ es la composición de las aplicaciones $a \to a\chi_A$ y γ, que son lineales y contínuas, y por tanto $\mu(A) \in \mathcal{L}(E, F)$. La función de conjunto μ es aditiva sobre R por ser γ lineal. Para probar que μ es de variación acotada consideremos un entorno U de 0 en F, y sea V un entorno de 0 en E tal que $\gamma(f) \in U$ si $f \in W_V \cap \overline{b}(E, R)$. Si $\Pi = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant p} \in P$ y $a_1, \ldots, a_p \in V$, se cumple que $\sum_{i=1}^{p} a_i\chi_{A(i)} \in W_V$, ya que cada coordenada de esta sucesión es igual a algún a_i. Luego

$$\sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) \cdot a_i = \gamma(\sum_{i=1}^{p} a_i \chi_{A(i)}) \in U$$

Queda por ver que $\gamma_\mu = \gamma$, para lo que, por ser ambas aplicaciones lineales y contínuas, basta que sea $\gamma_\mu(a\chi_A) = \gamma(a\,\chi_A)$ para $a \in E$ y $A \in R$, lo que resulta evidente a partir de la definición de γ_μ.

Nuestro objetivo principal ahora es aplicar este teorema, amplia generalización del caso particular $E = F = K$ que figura en (Dunford et al. 1958), al espacio $lp(E)$ eligiendo como anillo $R = R(S)$ el engendrado por un semianillo S conveniente, de modo que $\overline{b}(E, R(S)) = lp(E)$. Sin embargo, no queremos dejar de señalar que, sustituyendo R por el anillo $P(Z)$ de todos los subconjuntos de Z, se obtiene para los operadores de $l^\infty(E)$ en F —en particular para el dual de $l^\infty(E)$— una representación que generaliza la de (Hildebrandt 1934) para el dual de $l^\infty(K)$, a condición de que E pertenezca a una amplia clase de espacios vectoriales topológicos que comprende, entre otros, los espacios de Montel. Nos limitaremos a enunciar el resultado, precedido de dos lemas previos; las demostraciones pueden verse en (Moral 1982).

Lema 1. Una sucesión f de elementos de E pertenece a $\overline{b}$(E, $P(Z)$) si y sólo si el conjunto de valores de f es totalmente acotado en E.

Lema 2. Una condición necesaria y suficiente para que $\overline{b}(E, P(Z)) = l^\infty(E)$ es que todo subconjunto numerable y acotado de E sea totalmente acotado.

Teorema 7. *Sea F completo y sea E tal que todo subconjunto suyo numerable y acotado es totalmente acotado. Entonces existe un isomorfismo:* $\mu \to \gamma_\mu$ *de* $bv(Z, P(Z), \mathcal{L}(E, F))$ *sobre* $\mathcal{L}(l^\infty(E), F)$, *dado por las fórmulas:*

$$\gamma_\mu(f) = \int f\, d\mu \qquad \text{para toda } f \in l^\infty(E)$$

$$\mu(A) \cdot a = \gamma_\mu(a\chi_A) \qquad \text{para todo } A \subset Z, a \in E$$

En particular, este isomorfismo existe si E es de dimensión finita o tiene la propiedad de Heine-Borel o es numerablemente compacto.

4. EL ESPACIO $\mathcal{L}(lp(E), F)$

Consideremos ahora, como en el capítulo III de (Moral, 1981) el semianillo S formado por el conjunto vacío $\emptyset$ y por los subconjuntos $E_{\nu j} = \{n \in Z: n - j = \dot{\nu}\}$ de Z, siendo ν, j enteros positivos tales que $0 \leqslant j \leqslant \nu - 1$. Es claro que $E_{\nu j}$ es la unión de los conjuntos disjuntos $E_{r\nu,\, j}\; E_{r\nu,\, j+\nu}, \ldots, E_{r\nu,\, j+(r-1)\nu}$;

haciendo uso de ello puede comprobarse que una medida (función de conjunto) μ finitamente aditiva sobre S con valores en el espacio vectorial X viene dada por una colección $\{\mu(E_{\nu j}) : \nu, j \in Z^+, o \leqslant j \leqslant \nu - 1\}$ de elementos de X que verifiquen, para cada entero positivo r,

$$\mu(E_{\nu j}) = \sum_{s=0}^{r-1} \mu(E_{r\nu, j+s\nu})$$

Es decir, esta condición garantiza que si $E_{\nu(i)j(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, son elementos de S disconjuntos dos a dos cuya unión pertenece a S, se cumple que $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_{\nu(i)j(i)}) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_{\nu(i)j(i)})$. En tal caso (Kolmogorov et al. 1975) μ admite prolongación única al anillo $R(S)$ engendrado por S, cuyos elementos son de la forma

$$A = E_{\nu j(1)} \cup E_{\nu j(2)} \cup \ldots \cup E_{\nu j(n)}, \quad 0 \leqslant j(1) < j(2) < \ldots < j(n) \leqslant \nu - 1$$

Llamamos $ma(Z, R(S), X)$ al espacio vectorial formado por las medidas finitamente aditivas con valores en X definidas sobre el anillo $R(S)$, y $l(E, F)$ al formado por las aplicaciones lineales de E en F, siendo E, F espacios vectoriales cualesquiera. Es claro que $bv(Z, R(S), \mathcal{L}(E, F))$ es un subespacio vectorial de $ma(Z, R(S), l(E, F))$ si E, F son espacios vectoriales topológicos. Además, estos dos espacios son respectivamente isomorfos a $\mathcal{L}(lp(E), F)$ y $l(p(E), F)$, como muestran los siguientes enunciados.

Teorema 8. *$l(p(E),F)$ es isomorfo a $ma(Z, R(S), l(E,f))$. La relación entre los elementos γ_μ y μ que se corresponden en el isomorfismo está expresada por*

$$\gamma_\mu(f) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \mu(E_{\nu j}) \cdot f(j) \quad \textit{para } f \textit{ de período } \nu$$

$$\mu(A) \cdot a = \gamma_\mu(a\chi_A) \quad \textit{para todo } A \in R(S) \textit{ y todo } a \in E$$

Demostración. Puede comprobarse que $\gamma_\mu(f)$ no varía cuando se consideran distintos períodos para f, debido a la relación entre $\mu(E_{\nu j})$ y los $\mu(E_{r\nu, j+s\nu})$. La linealidad de γ_μ es consecuencia de que μ toma valores en $l(E, F)$ y de que dos sucesiones de $p(E)$ tienen siempre un período común. La linealidad de la correspondencia $\mu \to \gamma_\mu$ resulta de la definición de las operaciones en los espacios vectoriales de salida y de llegada. Si $\gamma_\mu = 0$ es fácil ver que μ se anula sobre S, pues haciendo $f = av_{\nu j}$ se tiene $\mu(E_{\nu j}) \cdot a = 0$; por tanto, $\mu = 0$ y la correspondencia es inyectiva. Para ver que es sobreyectiva, dada $\gamma \in l(p(E), F)$ definimos $\mu(A) \cdot a = \gamma(a\chi_A)$ para todo $A \in R(S)$ y todo $a \in E$. Es sencillo probar que $\mu(A)$ es lineal, que μ es aditiva y que $\gamma_\mu = \gamma$, lo que concluye la demostración.

Aunque la definición de una medida μ parece extremadamente complicada a causa de la necesidad de cumplir la condición señalada al comienzo de esta sección, veremos más adelante que, supuesto un cierto conocimiento de $l(E, F)$, puede construirse un gran número de elementos de $ma(Z, R(S), l(E, F))$.

Teorema 9. *Sea F completo.* $\mathcal{L}(lp(E), F)$ *es isomorfo a* $bv(Z, R(S), \mathcal{L}(E, F))$. *La relación entre los elementos* γ_μ *y* μ *que se corresponden en el isomorfismo está expresada por*

$$\gamma_\mu(f) = R(S) - \int f\, d\mu \quad \textit{para toda } f \in lp\ (E)$$

$$\mu(A) \cdot a = \gamma_\mu(a\chi_A) \textit{ para todo } A \in R(S) \textit{ y todo } a \in E$$

Demostración. Si f tiene período ν se cumple que $f = \sum_{k=0}^{\nu-1} f(k)v_{\nu k}$; puesto que $v_{\nu k}$ es la función característica del conjunto $E_{\nu k}$, que pertenece a S, es claro que $p(E) \in b\ (E, R\ (S))$.Todo $A \in R(S)$ es unión de ciertos conjuntos disjuntos $E_{\nu k}$; por consiguiente, $a\chi_A$ tiene período ν sea cual fuere $a \in E$, de lo que se deduce que $b(E, R(S)) \subset p(E)$. Resulta así que $p(E) = b(E, R(S))$ y que $lp(E) = \bar{b}(E, R(S))$. Aplicando el teorema 6 con $R = R(S)$ se obtiene inmediatamente el resultado buscado.

BIBLIOGRAFIA

[1] DUNFORD, N. Y SCHWARTZ, J. T.: (1958). Linear operators, I (New York: Interscience) p. 258.

[2] HILDEBRANDT, T H. (1934): On bounded linear functional operations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 36, p.p. 868-875.

[3] KOLMOGOROV, A. V.: (1975): Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional (Moscú: Mir) p. 308.

[4] MORAL MEDINA, J. M (1981): Conceptos fundamentales en el filtrado de señales discretas (Tesis Doctoral) (Barcelona, Universidad Politécnica).

[5] MORAL MEDINA, J. M. (1982): Espacios de sucesiones periódicas con valores vectoriales y operadores que conmutan con la traslación (tesina) (Valencia, Facultad de Matemáticas).

[6] NUÑEZ GIMENEZ, M. (1980): Sucesiones y funciones periódicas con valores vectoriales (tesis doctoral) (Valladolid, Facultad de Matemáticas).