Representaciones de los espacios $\mathscr{S}(\Omega, E)$ *y* $O_M(\Omega, E)$

Por MANUEL MAESTRE (*)

Recibido: 1 junio 1983

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia Ureña.

Abstract

In this paper we give representations of the spaces of infinitely differentiable functions with values in a separated locally convex topological vector space $\mathscr{S}(\Omega, E)$ and $O_M(\Omega, E)$, using spaces of sequences.

INTRODUCCION

Si A es un subconjunto de un espacio topológico X, $\mathring{A}$, $\bar{A}$ y ∂A denotarán el interior, la clausura y la frontera de A respectivamente. Todos los espacios vectoriales que se usarán están definidos sobre el cuerpo C de los números complejos. Con la palabra espacio vamos a designar espacio vectorial topológico localmente convexo separado. Si E y F son dos espacios isomorfos escribiremos $E \cong F$. Diremos que un espacio es localmente completo si todo subconjunto acotado de él está incluído en un disco de Banach. Si E es un espacio E' denota su dual topológico. Denotaremos por N el conjunto de los enteros positivos.

Por R^n indicaremos el espacio euclídeo de dimensión n. Si x pertenece a R_n escribiremos $|x|$ para la norma euclídea de x. En cuanto sigue usaremos las notaciones de L.Schwartz (véase (8), (9)) y los espacios $\mathscr{E}(\Omega, M)$, $\mathscr{E}(Q, E)$, donde Ω es un abierto de R^n no vacío, Q es un cubo compacto de R^n con interior no vacío y E un espacio. Por $\mathscr{B}_1(\Omega, E)$ entenderemos el subespacio de $\mathscr{E}(R^n, E)$ formado por las funciones que cumplen que ellas y todas sus derivadas parciales se anulan en $R^n \sim \Omega$ y están acotadas en R^n, dotado el espacio de la topología definida por la siguiente familia de seminormas: si α es un multiíndice y q es una seminorma continua en E, entonces $R(\alpha, q)(f) = \sup\ q(D^\alpha f(x)) \,/\, x \in R^n)$ para cada $f \in \mathscr{B}_1(\Omega, E)$ [2]. Para espacios de sucesiones de Banach seguiremos las notaciones de [5]

Si E es un espacio, $s(E)$ es el espacio de las sucesiones de decrecimiento rápido con valores en E [7].

En lo que sigue necesitaremos los siguientes resultados:

(*) El presente trabajo ha sido realizado bajo la dirección del Prof. Dr. M. Valdivia en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia.

a) Sean E y F dos espacios, si existe $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y continua, y existe $g\colon F \longrightarrow E$ una aplicación lineal y continua tal que $g \circ f$ es la identidad de E, entonces $f(E)$ es un subespacio complementado de F, topológicamente isomorfo a E [4] pág. 123.

b) Sea E un espacio localmente completo y Q un cubo compacto de R^n con interior no vacío, entonces $\mathcal{E}(\overset{\circ}{Q}, E) \cong \mathcal{D}(Q, E) \cong s(E)$ [1].

c) Sea E un espacio, sean P y Q compactos de R^n verificando: $0 = \overset{\circ}{Q} \subset Q \subset \overset{\circ}{P} \subset P$. Entonces existe $W\colon \mathcal{E}(Q, E) \longrightarrow \mathcal{D}(P, E)$ un operador lineal y continuo tal que si g es un elemento de $\mathcal{E}(Q, E)$ entonces la restricción de $W(g)$ a Q coincide con g. [1].

d) Sea E un espacio, si G es isomorfo a un subespacio complementado de $s(E)$ y contiene a un subespacio complementado isomorfo a $s(E)$, entonces $G \cong s(E)$ [10] y [1].

Sea Ω un abierto de R^n no vacío, consideremos la partición de la unidad de Ω dada por Valdivia en [11] (ver también [13]). Concretamente si $\Omega = R^n$ consideramos todos los cubos de la forma:

$$\left\{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \;/\; a_j \leqslant x_j \leqslant a_j + 1, \; a_j \text{ es entero}, \; j = 1, 2, \dots, n\right\} \qquad (1)$$

ordenados en una sucesión (B_r) de cubos distintos. Si $\Omega \neq R^n$, sea $\mathcal{B}_1$ la familia de los cubos de la forma (1) incluidos en Ω tales que si $Q \in \mathcal{B}_1$ la distancia de Q a $R^n \sim \Omega$ es mayor o igual que $\sqrt{n}$. Procediendo por recurrencia, supongamos que hemos obtenido las familias de cubos $\mathcal{B}_h$, $h = 1,2,\dots,k$. Representaremos por $\mathcal{B}_{k+1}$ la colección de todos los cubos de la forma

$$\left\{(x_1, \dots, x_n) \;/\; a_j/2^k \leqslant x_j \leqslant a_j + 1/2^k, \;\; a_j \text{ entero}, \; j = 1, 2, \dots, n\right\}$$

contenidos en Ω tales que si $Q \in \mathcal{B}_{k+1}$ su distancia a $R^n \sim \Omega$ es mayor o igual que $\sqrt{n}/2^k$ y Q no está contenido en ningún elemento de $\mathcal{B}_h$, $h = 1, 2, \dots, k$. Ordenamos los cubos de $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k$ en una sucesión (B_r) de elementos distintos.

En cualquiera de los casos considerados para Ω sea

$$B_r = \left\{ (x_1, \dots, x_n)\, R^n / \frac{a_j^{(r)}}{2^{k(r)}} \leqslant x_j \leqslant \frac{a_j(r)+1}{2^{k(r)+1}}, \; j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

donde $a_j(r)$ es un número entero y $k(r)$ es un entero no negativo, $j = 1, \dots, n$.

Sea (ρ_r) la sucesión de longitudes de las aristas de (B_r). Sea

$$I = [-1,1]^n, \; J = \left[-\frac{4}{15}, \frac{4}{15}\right]^n K = \left[-\frac{36}{35}, \frac{36}{35}\right]^n, \; L = \left[-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right]^n.$$

Sea $\varphi_r\colon R^n \longrightarrow R^n$ definida por

$$\varphi_r(x_1, \dots, x_n) = \left[\frac{2a_1(r)+1}{2^{k(r)+1}} + \frac{5}{2^{k(r)+3}} x_1, \dots, \frac{2a_n(r)+1}{2^{k(r)+1}} + \frac{5}{2^{k(r)+3}} x_n\right]$$

Obviamente $\varphi_r(L) = B_r$. Denotamos $\varphi_r(I) = A_r$, $\varphi_r(J) = C_r$, $O_r = \varphi_r(K)$.

Se tiene que $\Omega = \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r = \bigcup_{r=1}^{\infty} \mathring{A}_r = \bigcup_{r=1}^{\infty} O_r$. Además $4^n + 1$ elementos de (O_r) tienen siempre la intersección vacía, y cada C_r corta a un solo elemento de (O_r)

Sea φ una función real definida en R^n de clase $\mathscr{C}^\infty$, estrictamente positiva en I y nula en $R^n \sim I$. Si definimos

$$\mu = \frac{(\varphi \circ \varphi_r^{-1})(x)}{\sum_{s=1}^{\infty} (\varphi \circ \varphi^{-1})(x)}, \quad x \in \Omega,$$

se tiene que (μ_r) es una partición de la unidad en Ω de clase $\mathscr{C}^\infty$. El siguiente resultado puede encontrarse en [11]:

e) Sea $2^{-k(r)}$, la arista de un cubo B_r, si $2^{-k(r)} < 1$, entonces la distancia de B_r a $R^n \sim \Omega$ es menor o igual que $\dfrac{\sqrt{n}}{2^{k(r)-2}}$

Sea E un espacio y a $= (a_r)_{r=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos, se define el espacio

$$\lambda_\infty(a) = \Big\{ (x_r) \in E/\sup a_r^k\, q(x_r) < +\infty \text{ para cada } k \in N \cup \{0\}$$

y cada q seminorma continua en $E \Big\}$

Se dota a dichos espacios de la topología definida por las seminormas

$$Q(k, q)\,((x_r)) = \sup_r a_r^{-k} q(x_r).$$

Diremos que una sucesión $(a_r)_{r=1}^{\infty}$ de números reales positivos cumple la propiedad (N) si verifica que existe un $t > 0$ tal que $\sum_{r=1}^{\infty} a_r^t < +\infty$. En [7] se puede encontrar el siguiente resultado. (*f*) Si $(a_r)_{r=1}^{\infty}$ satisface la propiedad (N) entonces $\lambda_\infty(a)\,(s(E)) \cong s(E)$.

De las definiciones es inmediato probar.

Proposición 1. Si E es un espacio, $\lambda_\infty(a)\,(s(E)) \cong s(\lambda_\infty(a)\,(E))$.

1. REPRESENTACION DEL ESPACIO $\mathscr{S}(\Omega, E)$

Sea E un espacio y Ω un abierto de R^n no vacío, llamaremos $\mathscr{S}(\Omega, E)$ al subespacio de $\mathscr{E}(R^n, E)$ formado por todas las funciones f que verifican que ellas y todas sus derivadas parciales de cualquier orden se anulan en $R^n \sim \Omega$ y además $\sup\{\, |z|^r\, q(D^\alpha f(z)),\ z \in R^n \} < +\infty$, para cada r entero no negativo, α multiíndice y q seminorma continua en E.

Se dota a $\mathscr{S}(\Omega, E)$ de una topología localmente convexa separada mediante la familia de seminormas:

$$Q(q,p,r)(f) = \sum_{|\alpha| \leqslant p} \sup \left\{ (1 + |x|^2)^r \, q(D^\alpha f(x)) : \; x \in R^n \right\}$$

el espacio $\mathscr{S} = \mathscr{S}(R^n, K)$, con el cuerpo $K = R$ ó C, fue definido por Schwartz [9].

Consideremos $(B_r)_{r=1}^{\infty}$ la sucesión de cubos construída y sea ρ_r la arista del cubo B_r. Sea

$$M_m = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in R^n / -m \leqslant x_j \leqslant m, \; j = 1, \ldots, n \right\}$$

con m entero no negativo, sea $m(r)$ el entero positivo tal que

$$B_r \in M_{m(r)} \sim \mathring{M}_{m(r)-1}$$

consideremos ahora la sucesión $a = (\rho_r m(r)^{-1})$.

Proposición 1.

Sea $a = (\rho_r m(r)^{-1})$ y E un espacio localmente completo, entonces $\lambda_\infty(a)(\mathscr{D}(I, E)) \cong s(E)$.

Demostración:

Tendremos que por el resultado (b) $\lambda_\infty(a)(\;(I, E)) \cong \lambda_\infty(a)(s(E))$. Veamos que tiene la propiedad (N) y entonces la conclusión se obtendrá del resultado (f).

Sea $c_m = \left\{ r \in N/B_r \in M_m \sim \mathring{M}_{m-1} \right\}$ para $m \in N$, tendremos que

$\sum_{r \in c_m} \rho_r^n < (2m)^n - (2(m-1))^n$ medida de Lebesgue de $M_m \sim \mathring{M}_{m-1}$, sea b constante positiva verificando que $(2m)^n - (2(m-1))^n < bm^{n-1}$ para $m = 1, 2, \ldots$ entonces

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{\rho_r}{m(r)} \right]^{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r \in c_m} \left[\frac{\rho_r}{m} \right]^{2n} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{r \in c_m} \left[\rho_r \frac{1}{m} \right]^n \right]^2 \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \left[b \frac{m^{n-1}}{m^n} \right]^2 =$$

$$= b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = b \frac{\pi^2}{6} < +\infty$$

Consideremos ahora dada la sucesión (f_r) de $\lambda_\infty(a)(\mathscr{D}(I, E))$ la función

$$T(f_r) = \sum_r f_r \circ \varphi_r^{-1} \text{ de } \epsilon(R^n, E).$$

Proposición 2

La aplicación T es lineal y continua de $\lambda_\infty(a)(\mathscr{D}(I, E))$ en $\mathscr{S}(\Omega, E)$

Demostración:

Consideremos $b = (\rho_r)_{r=1}^{\infty}$ y el espacio $\lambda_\infty(b)(\mathcal{D}(I, E))$ entonces $\lambda_\infty(a)(\mathcal{D}(I, E))$ es un subespacio vectorial de $\lambda_\infty(b)(\mathcal{D}(I, E))$ y por lo tanto por [2, proposición 3.] obtenemos que $T(f_r) \in \mathcal{B}_1(\Omega, E)$ para cada $(f_r) \in \lambda_\infty(a)(\mathcal{D}(I, E))$, y por lo tanto $D^\alpha T(f_r)(x) = 0$ para cada α multiíndice y cada x de $R^n \sim \Omega$.

Sean k y p enteros no negativos, α multiíndice tal que $|\alpha| \leqslant p$ y q seminorma continua en E, dado $z \in R^n$ podemos suponer que $z \in \Omega$, sea $P = \{ r \in N / z \in A_r \}$, tendremos que el cardinal de P es menor o igual que 4^n, además si $z \in M_j \sim \mathring{M}_{j-1}$ entonces $z \in M_j \cap A_r$ luego $B_r \cap M_{j-2} = \phi$, y por lo tanto $j - 1 \leqslant m(r)$ de donde obtenemos:

$$|z|^2 + 1 \leqslant \sqrt{n}\, j^2 + 1 < n\,(m\,(r)^2 + 2) < 3n\, m(r)^2$$

de aquí

$$(1 + |z|^2)^k\, q(D^\alpha T(f_r)(z)) = (1 + |z|^2)^k \sum_{r \in P} q(D^\alpha (f_r \circ \varphi_r^{-1})(z)) =$$

$$= (1 + |z|^2)^k \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \sum_{r \in P} \rho_r^{-\alpha}\, q(D^\alpha f_r)(\varphi_r^{-1}(z)) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{8}{5}\right)^{|\alpha|} \sum_{r \in P} [(1 + |z|^2)\, \rho_r^{-1}]^{k+p} \sup \left\{ q(D^\alpha f_r)(x) \colon x \in I, \right\}$$

como card $(P) \leqslant 4^n$, existe un número real H positivo que no depende de z ni de (f_r) satisfaciendo que:

$$(1 + |z|^2)^k\, q(D^\alpha T(f_r)(z)) \leqslant$$

$$\leqslant H \sup_{r \in N} \left\{ (m(r)\, \rho_r^{-1})^{2(k+p)} \right\} \sup \left\{ q(D^\alpha f_r(x))\; x \in I,\; |\alpha| \leqslant p \right\}$$

de donde se deduce, al tomar supremos en R^n, que T está bien definida y que, al ser trivialmente lineal, es continua.

Refinando la técnica de [2, proposición 3.1.] y tomando en la proposición anterior $\lambda_\infty(a)(\mathcal{D}(K, E))$, es decir, K en lugar de I, se sigue que si (g_r) es un elemento de este espacio, entonces $\Sigma\; g_r \circ \varphi_r^{-1}$ está en $\mathcal{S}(\Omega, E)$ y por lo tanto la siguiente proposición:

Proposición 3.

Sea $a = \left[\dfrac{\rho(r)}{m(r)} \right]_{r=1}^{\infty}$ entonces $\sum_{r=1}^{\infty} a_r \psi \circ \varphi_r^{-1}$ pertenece a $\mathcal{S}(\Omega, E)$ para toda sucesión $(a_r) \in \lambda_\infty(a)$ y toda función $\psi \in \mathcal{D}(K, E)$.

Proposición 4.

Si f es una función de $\mathcal{S}(\Omega, E)$ entonces $|z|^{2k} f(z) \cdot D^\alpha (\Sigma\, \varphi \circ \varphi_r^{-1})(z)$ es una función de $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$ para $k = 0, 1, \ldots$ y cada α multiíndice.

Demostración:

Es evidente que $|z|^{2k} f(z) \in \mathscr{S}(\Omega, E)$, como éste es un subespacio de $\mathscr{B}_1(\Omega, E)$ basta aplicar la proposición 2.1. de [3] que asegura que si $g \in \mathscr{B}_1(\Omega, E)$ entonces $g\, D^\alpha\, (\Sigma\, \varphi \square \varphi_r^{-1}) \in \mathscr{B}_1(\Omega, E)$.

Proposición 5.

Si f es una función de $\mathscr{S}(\Omega, E)$ entonces

$$|z|^{2k} D^\alpha f(z)\, D^\beta (\Sigma\, \varphi \square \varphi_r^{-1}\ (z)) ... D^\mu\ (\Sigma\, \varphi \square \varphi_r^{-1}\ (z))$$

es un elemento de $\mathscr{B}_1(\Omega, E)$ para $k = 0, 1, 2, ...$ y, $\beta, \ldots, \mu$ multiíndices

Demostración:

Aplicando reiteradamente la proposición 4.

Proposición 6.

La aplicación $V: \mathscr{S}(\Omega, E) \longrightarrow \mathscr{S}(\Omega, E)$ definida cómo

$V(f) = f \dfrac{1}{\Sigma\, \varphi \square \varphi_r^{-1}}$ es una aplicación lineal y continua.

Demostración:

Llamemos $g(z) = 1/ \sum_{r=1}^{\infty} \varphi \square \varphi^{-1}\ (z)$ si $z \in \Omega$, si $f \in \mathscr{S}(\Omega, E)$ entendemos $f \cdot g$ definida en todo R^n tomando el valor 0 en $R^n \sim \Omega$. Si $z \in \Omega$ dados $k \in N$, ν multiíndice y q seminorma continua en E, $|z|^{2k} D^\nu\ [f \cdot g]\ (z)$ será un cociente cuyo numerador es una combinación lineal de elementos de la forma $|z|^{2k}\ D^\alpha\ f(z) \cdot D^\beta\ \Sigma\, \varphi \square \varphi^{-1}\ (z) \ldots D^\mu\ \Sigma\, \varphi \square \varphi^{-1}\ (z)$ acotados en Ω por la proposición 5. y el denominador una potencia natural de $\Sigma\, \varphi \square \varphi_r^{-1}\ (z)$ acotada inferiormente en Ω por una constante positiva. Aplicando [2, proposición 2.1.] obtendremos que la función $f \cdot g$ extendida a todo R^n es de $\mathscr{B}_1(\Omega, E)$ y además $\sup\{|z|^{2k}\ q(D^\nu [f \cdot g]\ (z)\ /\ z \in R^n\} < +\infty$ para cada q seminorma continua en E, luego $f \cdot g \in \mathscr{S}(\Omega, E)$. No es difícil probar para k y ν prefijados que existe $A > 0$, número que no depende de f, y existen h, m enteros positivos tales que

$$(1 + |z|^2)^k q[D^\nu (g\, f)\ (z)] \leqslant A \sum_{|\delta| \leqslant h} (1 + |z|^2)^k \sum_{r \in L} \rho^{-m}\ q(D^\delta f\ (z))$$

siendo $L = \{ r \in N / z \in A_r \}$. Si $\rho_r = 1$ entonces

$$\rho_r^{-m}\ (1 + |z|^2)^k\ q(D^\delta\ f(z)) \leqslant \sup_{\mu \in R^n} (1 + |\mu|^2)^k\ q(D^\delta\ f(\mu))$$

Si $\rho_r \leqslant 1/2$ entonces la distancia de z a $R^n \sim \Omega$ es por el resultado (e) menor o igual que $6\sqrt{n}\rho_r < 6\sqrt{n}$, sea u_z el punto de $R^n \sim \Omega$ donde se alcanza esta distancia, aplicando la fórmula de Taylor con resto integral obtenemos que existe A_1 que no depende de f, y t entero positivo $t > h$ tal que

$$\rho_r^{-m}\ q(D^\delta f(z)) \leqslant A_1 \sum_{|u| \leqslant t} \sup \left\{ q(D^\mu\ (f))\ (w) / w \in [z, u_z] \right\}$$

luego

$$(|z|^2 + 1)^k \rho_r^{-m}\ q(D^\delta f(z)) \leqslant A_1 (7\sqrt{n})^{2k} \sum_{|u| \leqslant t} \sup \left\{ (|u|^2 + 1)^k\ q(D^\mu f(u)) \colon u \in R^n \right\}$$

de donde se deduce la continuidad de V al ser $\mathrm{card}(L) \leqslant 4^n$.

Consideremos ahora la partición de la unidad (μ_r) de Ω, para cada $f \in \mathscr{S}(\Omega, E)$ llamaremos $h_r = (f \circ \varphi_r) \cdot \varphi$ y $R(f) = (h_r)$.

Proposición 7.

La aplicación R de $\mathscr{S}(\Omega, E)$ en $\lambda_\infty(a)$ $(\mathscr{D}(I, E))$ es lineal y continua.

Demostración:

Tomamos k y p enteros no negativos, q seminorma continua en E y α multiíndice con $|\alpha| \leqslant p$, aplicando la fórmula de Leibnitz obtenemos que existe un $H > 0$ no dependiente de f verificando:

$$(m(r)\ \rho_r^{-1})^k \sup_{x \in I} \left\{ q(D^a h_r\ (x)) \right\} \leqslant$$
$$\leqslant H \sum_{|\delta| \leqslant p} \sup \left\{ (m(r) \rho_r^{-1})^k\ q(D^a (f)\ (z)\ \ z \in A_r \right\}$$

si $z \in A_r$ entonces

$$B_r \subset M_{m(r)} \sim \mathring{M}_{m(r)-1} \text{ luego } A_r \subset M$$

y por lo tanto $|z| \geqslant m(r) - 1$, de donde:

$$(m(r)\ \rho^{-1})^k \sup_{x \in I} \left\{ q(D^a h_r\ (x)) \right\} \leqslant$$
$$\leqslant H \sum_{|\delta| \leqslant p} \sup \left\{ (|z|^2 + 1)^k \rho_r^{-k} q(D^\delta (F)\ (z)) \colon z \in A_r \right\}$$

procediendo como en la proposición anterior existirá un $H_1 > 0$ no dependiendo de f y t entero positivo con:

$$(m(r) \rho_r^{-1})^k \sup_{x \in I} \left\{ q(D^a h_r\ (x)) \right\} \leqslant$$
$$\leqslant H_1 \sum_{|\delta| \leqslant t} \sup \left\{ (|z|^2 + 1)^k\ q(D^\delta\ (f)\ (z)) \colon z \in R^n \right\}$$

luego R está bien definida y al ser lineal es continua.

Proposición 8.

$\mathscr{S}(\Omega, E)$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $\lambda_\infty(\mathscr{D}(I, E))$.

Demostración:

Consideremos $T\circ(R\circ V)\colon \mathscr{S}(\Omega, E) \longrightarrow \mathscr{S}(\Omega, E)$, es lineal y además

$$T\circ(R\circ V)(f) = T(((f\,g)\circ\varphi_r)\varphi) = \sum_{r=1}^{\infty} fg\,\varphi\circ\varphi_r^{-1} = f\sum_{r=1}^{\infty}\mu_r = f$$

para todo f de $\mathscr{S}(\Omega, E)$ luego la conclusión se deduce ahora del resultado (*a*).

Teorema 1.

Sea Ω un abierto no vacío de R^n y E un espacio localmente completo, entonces $\mathscr{S}(\Omega, E) \cong s(E)$.

Demostración:

Sabemos que $\lambda_\infty(\mathscr{D}(I, E)) \cong s(E)$. Por otra parte tomados $O \neq \mathring{P} \subset P \subset \mathring{Q} \subset Q \subset \Omega$, siendo P y Q cubos compactos de R^n y un operador de extensión lineal y continuo $W\colon \mathscr{E}(P, E) \longrightarrow \mathscr{D}(Q, E)$ podemos suponer que $W\colon \mathscr{E}(P, E) \longrightarrow \mathscr{S}(\Omega, E)$, entonces W es un isomorfismo en, y $W(\mathscr{E}(P, E))$ tiene como complemento topológico el subespacio de $\mathscr{S}(\Omega, E)$ formando por las funciones que se anulan ellas y sus derivadas parciales de cualquier orden en P, como $s(E) \simeq \mathscr{E}(P, E) \simeq W(\mathscr{E}(P, E))$, entonces la conclusión se deduce del resultado (*d*) y de la proposición 8.

Para el caso $\Omega = R^n$ y E un espacio localmente completo, el resultado se debe a Bonet [3].

2. UNA REPRESENTACION DEL ESPACIO 0_M (Ω, E)

Sea Ω un abierto no vacío de R^n y E un espacio, llamaremos $O_M(\Omega, E)$ al subespacio de $\mathscr{E}(\Omega, E)$ formado por aquellas funciones que satisfacen que $\sup\{q(\varphi(x)D^\alpha f(x)) / x \in R^n\} < +\infty$ para cada φ de $\mathscr{S}(\Omega, E)$, α multiíndice y q seminorma continua en E. Si $\Omega = R^n$ el espacio $O_M(R^n, E)$ fue definido por Schwartz en [9], le dotamos de una topología localmente convexa separada por la siguiente familia de seminormas:

$$q(\varphi, m)(f) = \sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in R^n}\{q(\varphi(x)\,D^\alpha f(x))\}$$

al variar q en las seminormas continuas en E, φ en $\mathcal{S}(\Omega, E)$ y m en los enteros positivos.

Sea $a = (a_r)$ una sucesión de números reales positivos, llamaremos $\lambda'_\infty(a)(E)$ para E un espacio, al conjunto de sucesiones (x_n) de E verificando que:

$$q(x_n)(\alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|\, q(x_n) < +\infty \qquad (*)$$

para cada q seminorma continua en E y cada $(\alpha_n) \in \lambda_\infty(a)$, a $\lambda'_\infty(a)(E)$ se le dota de una topología localmente convexa separada mediante la familia (*) de seminormas.

Proposición 1.

Sea E un espacio, $\lambda'_\infty(a)(s(E)) \cong s(\lambda'_\infty(a)(E))$.

Demostración: Inmediata a partir de las definiciones.

Consideramos en lo que sigue a $= \left[\dfrac{\rho(r)}{m(r)}\right]_{r=1}^{\infty}$

Proposición 2.

Si f es de $\mathcal{S}(\Omega)$, entonces $(\sup\limits_{x \in A_r} |f(x)|) \in \lambda_\infty(a)$.

Demostración:

Se obtiene la conclusión de la prueba de la proposición 1.

Sea $\psi \in \mathcal{D}(K)$ con $\psi(x) = 1 \quad x \in I$ y además $\psi(x) > 0$ si $x \in \mathring{K}$.

Proposición 3.

Sea $(\alpha_n) \in \lambda_\infty(a)$, q seminorma continua en E α multiíndice y $g \in O_M(\Omega, E)$, entonces:

$$\sum_{r \in N} |\alpha_r| \sup_{x \in I}\{q(D^a(g \circ \varphi_r)(x))\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\pi^2}{6} \sup_{z \in R^n} (\Sigma\, (m(r)\rho_r^{-1})^{2n} |\alpha_r| (\psi \circ \varphi_r^{-1})(z) D^a g(z))$$

Demostración:

$$|\alpha_s| \sup_{x \in I}\{q(D^a g \circ \varphi_s)(x)\} = \sup_{x \in I}\{|\alpha_s| \psi(x)\, q(D^a(g \circ \varphi_s)(x))\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{K}\{|\alpha_s|\, \psi(x)\, q(D^a g \circ \varphi_s(x))\} \leqslant$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{|a|} \rho_s^{|a|} \sup_{z\in\Theta_r}\{|\alpha_s|\psi(\varphi_s^{-1}(z))\, q(D^a g(z))\}\leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x\in R^n}\{q(\sum_{r=1}^{\infty}|\alpha_r|(\psi\circ\varphi_r^{-1})(z))\, D^a g(z))\}$$

para $s = 1, 2, \ldots$ luego

$$\sum_{s=1}^{\infty}|\alpha_s| \sup_{x\in I}\{q(D^a\, g\circ\varphi_s)(x)\}\leqslant$$
$$\leqslant \sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m(s)}\,\rho_s\right]^{2n} \sup_{r\in N}\{(m(r)\,\rho_r^{-1})^{2n}\ |\alpha_r|\}\cdot \sup_{x\in I}\{q(D^a g\circ\varphi_s)(x)\}\leqslant$$
$$\leqslant \frac{\pi^2}{6} \sup_{z\in R^n}\{q(\sum_{r=1}^{\infty}(m(r)\rho_r^{-1})^{2n}\ |\alpha_r|\,(\psi\circ\varphi_r^{-1})(z)\cdot D^a g(z))\}$$

Definamos ahora $\widetilde{T}((f_r)) = \sum_{r=1}^{\infty} f_r\circ\varphi_r^{-1}$ para cada (f_r) de $\lambda'_\infty(a)\,(\mathscr{D}(I, E))$, evidentemente la función definida es de $\mathscr{E}(\Omega, E)$.

Proposición 4.

$T(f_r)$ pertenece a $O_M(\Omega, E)$ para cada sucesión (f_r) de $\lambda'_\infty(a)\,(\mathscr{D}(I, E))$ y el operador $\widetilde{T}$: $\lambda'_\infty(a)\,(\mathscr{D}(I, E)) \longrightarrow O_M(\Omega, E)$ es lineal y continuo.

Demostración:

Sea $f\in\mathscr{S}(\Omega)$, m entero positivo y q seminorma continua en E,

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} q(f(z)\cdot\sum_{r=1}^{\infty} D^a(f_r\circ\varphi_r^{-1})(z))\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m}\sum_{r=1}^{\infty} q(f(z).\, D^a(f_r\circ\varphi_r^{-1})(z))\leqslant$$
$$\leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m}\left(\frac{8}{5}\right)^m \sum_{r=1}^{\infty}\rho_r^{-m} \sup_{x\in A_r}|f(x)|\cdot \sup_{u\in I} q(D^a f_r(u))$$

por la proposición 2. $(\rho_r^{-m} \sup_{x\in A_r}|f(x)|)\in\lambda_\infty(a)$, de donde se sigue la conclusión. Sea $g = \dfrac{1}{\Sigma\varphi\circ\varphi^{-1}}$ definida en Ω, llamemos $\widetilde{V}(h) = g\cdot h$ para cada h de $O_M\ (\Omega, E)$.

Proposición 5.

La aplicación $\widetilde{V}$: $O_M(\Omega, E) \longrightarrow O_M(\Omega, E)$ es lineal y continua.

Demostración:

Si $f\in\mathscr{S}(\Omega, E)$ y η es un multiíndice, por la proposición 1.6 $f\cdot D^\eta g$ es de $\mathscr{S}(\Omega, E)$, dada α multiíndice y q seminorma continua en E obtenemos, aplicando la fórmula de Leibnitz:

$$\sup_{x\in\Omega} q((fD^a(g\cdot h))(x)) = \sup_{x\in\Omega} q(\sum_{\delta+\eta=\alpha} c_{\delta\,\eta}\, f(x)\, D^\eta g(x)\cdot D^\delta h(x))\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\delta+\eta=\alpha} |c_{\delta\,\eta}| \sup_{x\in\Omega} q(f(x)\cdot D^{\eta} g(x)\cdot D^{\delta} h(x)) < +\infty$$

como $c_{\delta\,\eta}$ son números que no dependen de h, obtenemos de la desigualdad la conclusión.

Tomemos ahora, dada h de $O_M(\Omega, E)$, la función $(h\circ\varphi_r)\cdot\varphi$, es de $\mathscr{D}(I, E)$ para $r = 1, 2, \ldots$, y definamos $\widetilde{R}(h) = ((h\circ\varphi_r)\cdot\varphi)_{r=1}^{\infty}$

Proposición 6.

La aplicación $\widetilde{R}$: $O_M(\Omega, E) \longrightarrow \lambda'_\infty(a)\ (\mathscr{D}(I, E))$ es lineal y continua.

Demostración:

Sea (α_r) de $\lambda_\infty(a)$, q seminorma continua en E y β multiíndice

$$|\alpha_r| \sup_{x\in I} D^{\beta}\widetilde{R}(h) \leqslant \sum_{\delta+\eta=\beta} |c_{\delta\,\eta}||\alpha_r| \sup_{x\in I} |D^{\eta}\varphi(x)|\cdot \sup_{x\in I} q(D^{\delta}(h\circ\varphi_r)(x))$$

la conclusión se obtiene ahora de la proposición 3.

Proposición 7.

$O_M(\Omega, E)$ es topológicamente isomorfo a un subespacio complementado de $\lambda'_\infty(a)\ (\mathscr{D}(I, E))$.

Demostración:

Se cumple que $\widetilde{T}\circ(\widetilde{R}\circ\widetilde{V})$ es la identidad en $O_M(\Omega, E)$ luego la conclusión se obtiene del resultado (a).

Sea ahora $J = \left[-\dfrac{1}{15}, \dfrac{1}{15}\right]^n$ y sea W: $\mathscr{E}(J, E) \longrightarrow \mathscr{D}(I, E)$ operador de extensión lineal y continuo [resultado (c)]. La aplicación U: $\lambda'_\infty(a)\ (\mathscr{E}(J, E)) \longrightarrow \lambda'_\infty(a)\ (\mathscr{D}(I, E))$ definida cómo $U(f_r) = (Wf_r)$ es trivialmente continua al serlo W.

Definamos ahora $V(h) = (h_r)_{r=1}^{\infty}$ para cada h de $O_M(\Omega, E)$, siendo $h_r(x) = (h\circ\varphi_r)(x)$ para cada x en J.

*Proposición*8.

La aplicación V: $O_M(\Omega, E) \longrightarrow \lambda'_\infty(a)(\mathscr{E}(J,E))$ es lineal y continua.

Demostración:

Es consecuencia directa de la proposición 3., tomando ahora supremos en J.

Proposición 9.

λ'_∞ (a) $(\mathscr{E}(J, E))$ es isomorfo topológicamente a un subespacio complementado de $O_M(\Omega, E)$.

Demostración:

$V\circ(T\circ U)$ es la identidad sobre λ'_∞ (a) $(\mathscr{E}(J, E))$, obteniéndose la conclusión del resultado (a).

Teorema 2.

Si E es un espacio localmente completo y Ω es un abierto de R^n no vacío, entonces $O_M(\Omega, E) \cong \lambda'_\infty$ (a) $(s(E))$.

Demostración:

Cómo $\epsilon(J, E) \cong s(E)$ y $\mathscr{D}(J, E) \cong s(E)$ por el resultado (b), la conclusión se obtiene de las proposiciones 1., 7., 9. y el resultado (a).

3. DOS CASOS PARTICULARES

Teorema 1.

Sea E un espacio localmente completo y Ω un abierto de R^n tal que $R^n \sim \Omega$ es acotado, entonces O_M $(\Omega, E) \cong s'(s(E))$.

Demostración:

Como la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\rho(r)}{m(r)}^{2n} < +\infty$ podemos suponer $(a_r) = \left[\dfrac{\rho(r)}{m(r)}\right]_{r=1}^{\infty}$ ordenados de mayor a menor y tendremos $\lim\limits_{n\to>} r\cdot a_r^{2n} = O$, luego existe un

$$P > 0 \text{ con } a_r^{2n} \leqslant P r^{-1} = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Por otra parte sea m_0 entero positivo con $R^n \sim \Omega \subset M_{m_0 - 1}$, entonces es

$$\text{evidente que } a_1 \geqslant 1/m_0 \text{ y que } a_r \geqslant \frac{1}{m_0 + r} \geqslant \frac{1}{2m_0 r} \quad r = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene que como conjuntos λ'_∞ (a) $(s(E)) = s'(s(E))$, siendo s' el dual del espacio s, y de las desigualdades (1) y(2) se obtiene que $\dfrac{1}{2m_0} r^{-1} \leqslant a_r \leqslant P^{1/2n} r^{-1/2n}$, de donde se deduce trivialmente que las topologías coinciden.

Para el caso en que $\Omega = R^n$ este resultado se debe a J .Bonet [3].

Llamemos ahora $F = R^n \sim \Omega$ y supongamos que existe Q un cubo compacto de R^n verificando que $\mathring{Q} \sim Q \cap \partial F$ tiene al menos dos componentes conexas (*), entonces se verifica que:

Lema 1.

Existe un cubo B_r tal que si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es su centro, existe un punto $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y un j con $1 \leqslant j \leqslant n$ con $y_i = x_i$ para $i = 1, \ldots, n$ $i \neq j$, además si $D_r = B_r - x$, tendremos que B_r y $D_r + y$ están en distintas componentes conexas de $Q \cap \partial F$.

De aquí si $n \geqslant 2$ se puede probar el siguiente lema:

Lema 2.

Sea B_r un cubo de arista $1/2^k$ satisfaciendo el lema 1., si $n > 2$ entonces existen B_r y B_r cubos de la partición satisfaciendo $B_{r_1} \cap B_{r_2} = \phi$ y que $B_{r_1} \cup B_{r_2} \subset (D_r + [x, y]) \cap \Omega$.

Teorema 2.

Sea Ω un abierto no vacío de R^n con $n \geqslant 2$, supongamos que se verifica la condición (*), entonces si E es un espacio localmente completo $O_m(\Omega, E) \cong s'(s(E))$.

Demostración:

Sea k_0 entero no negativo con $1/2^{k_0}$ arista del cubo B_r obtenido en el lema 1. Aplicando reiteradamente el lema 2., probamos que existen al menos 2^p cubos de arista $1/2^{k_0+p}$ luego tendremos que, supuesto ordenada $(a_r) = \left(\dfrac{\rho(r)}{m(r)}\right)_{r=1}^{+\infty}$ de mayor a menor:

$$a_1 \geqslant 1/2^{k_0}, \quad a_2 \geqslant 1/2^{k_0+1}, \quad a_3 \geqslant 1/2^{k_0+1}, \ldots, a_{2^p} \geqslant 1/2^{k_0+p}, \ldots$$

de donde $2^p a_{2^p} \geqslant 1/2^{k_0}$ tomando $2^{p-1} \leqslant r \leqslant 2^p$ tendremos $r \cdot a_r \geqslant r \cdot a_{2^p} \geqslant$

$$2^{p-1} \cdot a_{2^p} \geqslant 1/2^{k_0+1} \quad \text{luego } a_r \geqslant \frac{1}{2^{k_0+1}} \frac{1}{r} \quad r = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

combinando las desigualdades (1) y (3) obtenemos de una manera inmediata la conclusión buscada.

Corolario 1

Sea Ω un abierto no vacío de R_n con $n \geqslant 2$ y $F = R_n \sim \Omega$ un cerrado tal que $\mathring{F} \neq \phi$, si E es un espacio localmente completo $O_M(\Omega, E) \cong s'(s(E))$.

Demostración:

Inmediata del teorema anterior.

Consideremos ahora $\Omega =]-1, 1[$ en R, tendremos que la sucesión $(a_r)_{r=1}^{\infty}$ será $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/2, \ldots, a_{2k-1} = 1/2^k, a_{2k} = 1/2^k, \ldots$ luego $\lambda'_\infty(a)\,(s(E)) \cong \lambda'(b)\,(s(E))$, siendo $b = (b_r)$ con $b_r = 1/2^r$ para $r = 1,2,\ldots$

¿Es cierto en este caso que $0_M(\Omega, E) \cong \lambda'_\infty(a)\,(s(E)) \cong s'(s(E))$?

Estos resultados para el caso escalar nos fueron comunicados por el prof. Valdivia.

BIBLIOGRAFIA

[1] BONET, J.: Representaciones de los espacios $O_M(E)$ y $\mathcal{D}_{Lp}(E)$. *Collectanea Math.* (1982).

[2] BONET, J. Y MAESTRE, M.: Representaciones de los espacios $\mathcal{B}_0(\Omega, E)$ y $\mathcal{B}_1(\Omega, E)$ *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.* Madrid 77, 141–159. (1983).

[3] BONET, J.: Una nota sobre los espacios $\mathcal{P}(R^n, E)$ y $S(R_n, E)$. Comunicación IX Jornadas Hispano Lusitanas. Salamanca (1982).

[4] HORVATH, J.: Topological vector spaces and distributions I. Addison-Wesley. *Publ. Comp* Reading Massachusetts. (1966).

[5] JAMESON, G. J. O.: Topology and normed spaces. Chapman and Hall. London. (1974).

[6] MAESTRE, M.: Representaciones de los espacios de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ con valores vectoriales. Tesis Valencia. (1982).

[7] MAESTRE, M.: Sobre el espacio $\mathcal{D}_{Lp}(\Omega, E)$. *Collectanea Math.* Vol. XXXV, Fasc. 3°(1984),279-296.

[8] SCWARTZ, L.: Theorie des distributions. Herman, París(1978).

[9] SCHWARTZ, L.: Espaces de fonctions differentiables a valeurs vectorielles. *J. Analyse Math.* 4 (88–148. (1954–55).

[10] VALDIVIA, M.: Representaciones de los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}'(\Omega)$. *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.* Madrid, 72, 385-414. (1978).

[11] VALDIVIA, M.: Sobre el espacio $\mathcal{B}_0(\Omega)$. *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.* Madrid 74, 835-863. (1980).

[12] VALDIVIA, M.: Topics in locally convex spaces. *North–Holland Publ. Comp* Amsterdam (1982).

[13] WHITNEY, H.: Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* 36, 63-89 (1934).