Una cuestión sobre Z–Sumergibilidad

Por JOSE L. BLASCO

Recibido: 4 abril 1983

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia Ureña.

Abstract

We give an example of a σ–compact regular Hausdorff space containing a sequence of dense, open, C-embedded subsets whose intersection is dense but not z-embedded.

Resumen

En esta nota damos un ejemplo de un espacio de Hausdorff regular σ-compacto que contiene una sucesión de subconjuntos abiertos densos C-sumergibles cuya intersección es densa pero no es z-sumergible.

1. INTRODUCCION

Un subconjunto S de un espacio topológico X es z–sumergible en X si todo conjunto cero en S es la intersección de S con un conjunto cero en X. (Un conjunto cero es el conjunto de puntos donde se anula una función real contínua). Se dice que S es C^*–sumergible en X si toda función real continua y acotada sobre S admite una extensión continua a X. En ([4], 6.4) Hager plantea la siguiente cuestión: Sea D la intersección de una sucesión de subconjuntos abiertos, densos, C^*–sumergibles en un espacio topológico X y supongamos que D es denso en X. ¿Es D z–sumergible en X?.

Generalizando un resultado de E. Aron [1], Dashiell [2] ha probado que en un espacio regular totalmente no magro, la intersección de una sucesión de subconjuntos abiertos, normales, C^*–sumergibles es normal y C^*–sumergible. En este artículo contestamos negativamente a la cuestión de Hager con la construcción de espacios σ–compactos regulares de Hausdorff en los que existen sucesiones de subconjuntos abiertos densos C–sumergibles cuya intersección es densa pero no es z–sumergible.

2. EL RESULTADO

Si β es un número ordinal escribimos $\beta+1$ para el número ordinal que sigue a β y $W(\beta)$ para el conjunto de los números ordinales menores que β provisto de la topología del orden. Un subconjunto S de un espacio topológico X se dice que es C–sumergible en X si toda función real continua sobre

S se puede extender continuamente a X. Escribiremos $|A|$ para el número cardinal de un conjunto A.

Sea E un espacio topológico σ–compacto regular de Hausdorff que es unión de una sucesión $[C_n: n = 1,2,...]$ de subconjuntos cerrados sin puntos interiores. Sea $\aleph_a$ un número cardinal mayor que $|E|$ tal que $\alpha > 0$ es un ordinal no límite, sea ω_a el primer ordinal cuyo número cardinal es $\aleph_a$ y sea P el espacio producto $W(\omega_a+1) \times E$.

(*a*) El conjunto $W(\omega_a) \times E$ es C–sumergible en P.

Demostración: Sea f una función real continua sobre $W(\omega_a) \times E$. Para cada $x \in E$ la función f es eventualmente constante en $W(\omega_a) \times [x]$ ([3], 9K) y puesto que $\aleph_a > |E|$, existe $\eta \in W(\omega_a)$ tal que para cada $x \in E$ la función f es constante en $[\eta,\omega_a) \times [x]$. Sea g la función definida sobre P cuya restricción a $W(\omega_a) \times E$ coincide con f y $g(\omega_a, x) = f(\eta, x)$, $x \in E$. Es claro que g es continua en los puntos de $W(\omega_a) \times E$. Consideramos entonces un punto $(\omega_a, x), x \in E$. Dado $\epsilon > 0$, sea V un entorno de x tal que

$$f([\eta] \times V) \subset (f(\eta, x) - \epsilon, f(\eta, x) + \epsilon)$$

De la definición de η se sigue que

$$g([\eta, \omega_a] \times V) \subset (g(\omega_a, x) - \epsilon, g(\omega_a, x) + \epsilon)$$

por consiguiente g es continua en (ω_a,x). Se tiene entonces que g es una extensión contìnua de f a P.

De las consideraciones anteriores es fácil probar que todo conjunto cero en P que contiene al conjunto $[\omega_a] \times E$ corta a $W(\omega_a) \times E$.

Consideramos ahora dos copias P_1 y P_2 de P. Si A es un subconjunto de P, escribiremos A_i para denotarlo en la copia P_i. Sea X' la suma topológica de P_1 y P_2 y consideremos la descomposición $\mathcal{E}$ de X' cuyos elementos son $[(\omega_a, x)_1, (\omega_a, x)_2]$, $x \in E$ y los restantes puntos de X'. Si X es el espacio cociente $X'(\mathcal{E}$ es fácil probar que X es σ–compacto, regular y de Hausdorff. Si B es un subconjunto de X' escribiremos B^* para su imagen por la aplicación cociente.

(*b*) Para cada número n, el conjunto abierto $D_n = X \sim ([\omega_a] \times C_n)_1^*$ es C–sumergible en X.

Demostración: Sea f una función real continua sobre D_n. Si h_i' es la restricción de f a $(W(\omega_a) \times E)_i^*$, de (*a*) se deduce que h_i' tiene una extensión continua h_i a P_i^*. Puesto que las funciones h_1 y h_2 coinciden sobre $([\omega_a] \times (E \sim C_n))_1^*$ y este conjunto es denso en $([\omega_a] \times E)_1^*$, se tiene que h_1 y h_2 coinciden en $([\omega_a] \times E)_1^*$. Por consiguiente la función h definida $h(p) = h_1(p)$ si $p \in P_1^*$, $h(p) = h_2(p)$ si $p \in P_2^*$ es una extensión continua de f a X.

(*c*) El conjunto $D = \cap [D_n: n = 1, 2, ...]$ es denso en X pero no es z–sumergible en X

Demostración: El subespacio D es la suma topológica de $(W(\omega_a) \times E)_1^*$ y $(W(\omega_a) \times E)_2^*$ por lo tanto $(W(\omega_a) \times E)_1^*$ es un conjunto cero en D, sin embargo este conjunto no es la intersección con D de un conjunto cero en X. En efecto, si Z es un conjunto cero en X tal que $(W(\omega_a) \times E)_1^* \subset Z$ entonces $([\omega_a] \times E)_1^* \subset Z$ y puesto que $([\omega_a] \times E)_1^* = ([\omega_a] \times E)_2^*$ se sigue que Z corta al conjunto $(W(\omega_a) \times E)_2^*$.

Este trabajo ha sido realizado en el departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Valencia que dirige el profesor D. Manuel Valdivia.

REFERENCIAS

[1] ARON, E.: Embedding lattice–ordered algebras in uniformly closed algebras, Thesis, U. Rochester, 1971.

[2] DASHIELL, F.K.: A theorem on c*–embedding, *Proc. Amer. Math, Soc.* 69, 359–360 (1978).

[3] GILLMAN, L. and JERISON, M.: Rings of continuous functions, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1960.

[4] HAGER, A. W.: A class of function algebras(and compactifications, and uniforma spaces) Symposia Mathematica, vol. 17, Academic Press New York, 11–23, 1976.