Espacios de Orlicz de funciones vectoriales débilmente secuencialmente completos

Por Fernando Bombal

Recibido: 2 marzo 1983

Presentado por el académico numerario D. Baltasar Rodríguez-Salinas

Abstract

In this note we generalize a previous result of Kwapien, proving that a Banach space E contains a subspace isomorphic to c_0 if and only if an Orlicz space of E–valued function contains such a space. As a result, we prove the weak sequential completeness of the Orlicz space $L^\phi(E)$ when E is a Banach lattice weakly sequentially complete.

Kwapien probó en [5] que un espacio de Banach E contiene un subespacio isomorfo a c_0 si y sólo sí el espacio de funciones integrables Bochner $L^1(E)$ lo contiene, demostrando así una conjetura de Hoffman–Jϕrgense. En esta nota extendemos el resultado de Kwapien al caso de espacios de Orlicz de funciones vectoriales y, como consecuencia, establecemos la completitud secuencial débil de $L^\phi(E)$ cuando E es un retículo de Banach débilmente secuencialmente completo, resolviendo así en parte una cuestión planteada en [2].

En lo que sigue, designaremos por ϕ y ψ un par de funciones conjugadas de Young (véase, por ej., [1] y [7], pág. 77 y sigs.), (S, Σ, μ) un espacio de probabilidad, E un espacio de Banach y E' su dual topológico. Para cada función $f\colon S \to E$ medible Bochner, escribiremos

$$M_\phi(f) = \int_S \phi(\|f\|)\, d\mu.$$

Se define $L^\phi(S, \mu, E)$ $(= L^\phi(E))$ como el espacio vectorial de todas las (clases de) funciones de S en E, medibles Bochner, tales que $M_\phi(kf) < \infty$ para algún $k > 0$, y pondremos $L^\phi(K) = L^\phi$. Nótese que si $\phi(t) = t^p$, $L^\phi(E)$ coincide con el espacio $L^p(E)$ usual. En general, $L^\phi(E)$ coincide con el conjunto de funciones medibles Bochner de S en E tales que

$$\|f\|_\phi = \operatorname{Sup} \left\{ \int_S \|f\|\, \beta\, d\mu \colon \beta \in L^\psi \text{ y } M_\psi(\beta) \leqslant 1 \right\} < \infty .$$

Esta última expresión define una norma de espacio de Banach en $L^\phi(E)$. Siempre se tiene $L^\phi(E) \in L^1(E)$, con inclusión continua.

AMS(MOS) Subject clssifications (1970): Primary 46 E 40; secondary 46 G 10

Se dice que ϕ satisface la condición (Δ_2) si es finita y

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\phi(2t)}{\phi(t)} < \infty .$$

En este caso, $L^\phi(E)$ coincide con el espacio de funciones medibles Bochner de S en E para las que $M_\phi(f) < \infty$.

Finalmente, se llama sucesión de Bernouilli sobre el espacio de probabilidad (S, Σ, μ) a toda sucesión (r_n) de variables aleatorias independientes, tales que

$$\mu\{t \in S: r_n(t) = 1\} = \mu\{t \in S: r_n(t) = -1\} = 1/2, \text{ para todo } n.$$

El siguiente resultado es una extensión del teorema principal de [5] y el teorema 5.1 de [3].

Teorema 1.—*Sea E un espacio de Banach y* (S, Σ, μ) *un espacio de probabilidad sobre el que se puede definir una sucesión de Bernouilli. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.1. *E contiene un subespacio isomorfo a* c_0.
1.2. $L^1(S, \mu, E)$ *contiene un subespacio isomorfo a* c_0.
1.3. *Para toda función de Orlicz* ϕ, *el espacio* $L^\phi(S, \mu, E)$ *contiene un subespacio isomorfo a* c_0.
1.4. *Existe una función de Orlicz* ϕ *verificando la condición* (Δ_2), *de modo que* $L^\phi(S, \mu, E)$ *contiene un subespacio isomorfo a* c_0.

Demostración.— La equivalencia de 1.1 y 1.2 está probada en 5. Es claro que 1.1 $\Rightarrow$ 1.3 $\Rightarrow$ 1.4. Basta pues probar que 1.4 $\Rightarrow$ 1.2, para lo que seguiremos la técnica del teorema 5.1 de [3] con algunas modificaciones. De acuerdo con este teorema, bastará probar que existe una sucesión $(x_n) \subset E$ tal que $\{\sum_{n=1}^{k} r_n x_n \; k \in N\}$ es acotado en $L^1(E)$ y sin embargo $\sum_{n=1}^{\infty} r_n x_n$ no converge en medida (donde $\{r_n\}$ es una sucesión de Bernouilli en (S, Σ, μ)). Supongamos pues que ϕ verifica la condición ((Δ_2) y $\{f_n\}$ es una sucesión en $L^\phi(E)$ equivalente a la base canónica de c_0. Por lo tanto se cumple

I) $c \leqslant \|f_n\|_\phi \leqslant C$, para todo $n \geqslant 1$, donde $0 < c < C < \infty$.

II) $\|\sum_{n=1}^{m} a_n f_n\|_\phi \leqslant K$ máx $\{\|a_n\|: 1 \leqslant n \leqslant m\}$, para todo $m \geqslant 1$ y toda familia de escalares $a_1, \ldots, a_m$, siendo K una constante finita.

En el espacio $S' = S \times S$ con la probabilidad producto μ', definamos

$$f'_n(s, t) = r_n(s) f_n(t), \; (s, t) \in S'.$$

Sea $\beta \in L^\psi(S'. \mu'. K)$ con $\beta \geqslant 0$ y $M_\psi(\beta) \leqslant 1$. Definamos $\beta_s(t) = \beta(s, t)$ y $h(s) = \text{máx}\{1, M_\psi(\beta_s)\}$. Entonces

$$\int_{S'} \|f'_n\| \beta \, d\mu' = \int_S \Big[\int_S \|f_n(t)\| \beta_s(t)\, h(s)^{-1} d\mu(t) \Big] h(s) d\mu(s).$$

Como ψ es convexa, $\psi\,(au) \leqslant a\ \psi\,(u)$ para $0 \leqslant a \leqslant 1$, luego $M_\psi\,(\beta_s h(s)^{-1}) \leqslant 1$, para todo s de S. En consecuencia,

$$\int_{S'} \|f'_n\| \beta \, d\mu' \leqslant \|f_n\|_\phi \int_S h \, d\mu \leqslant (1 + \int_{S'} \psi(\beta)\, d\mu') \|f_n\|_\phi \leqslant 2\ \|f_n\|_\phi .$$

La desigualdad $\|f'_n\|_\phi \geqslant \|f_n\|_\phi$ es evidente. Por tanto se tiene

I') $c \leqslant \|f_n\|_\phi \leqslant \|f'_n\|_\phi \leqslant 2\ \|f_n\|_\phi \leqslant 2C$ para todo $n \geqslant 1$.

Utilizando el mismo argumento, se prueba también fácilmente

II') $\|\Sigma\, a_n f'_n\| \leqslant 2K\{\text{máx } |a_n|\colon\ 1 \leqslant n \leqslant m\}$, para todo $m \geqslant 1$

y toda familia de escalares $a_1, \ldots, a_m$.

Sea $g'_m = \sum_{n=1}^{m} f'_n$. La condición II′ prueba que $\{g'_m\}$ es una sucesión acotada en $L^\Phi(E)$, y por tanto en $L^1(E)$. Como $\{f_n\}$ es claramente una sucesión simétrica, la proposición 2.8 de [3] prueba que para casi todo $t' \in S'$. $\{\sum_{n=1}^{k} r_n f'_n(t')\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ está acotado en $L^1(S,\ \mu,\ E)$. Si para casi todo $t' \in S'$ la serie $\Sigma r_n f'_n(t')$ convergiera en medida, de nuevo la proposición 2.8 de [3] implicaría que $\{g'_m\}$ converge en casi todo punto a una cierta función g'. Por el lema de Fatou,

$$\int_{S'} \|g'\| \beta \, d\mu' \leqslant \text{lím inf} \int_{S'} \|g_m\| \beta \, d\mu' \leqslant \text{lím inf} \|g'_m\|_\phi \leqslant 2K,$$

para $\beta \geqslant 0$ y $M_\psi\,(\beta) \leqslant 1$. Esto prueba que $g' \in L^\Phi(S'.\mu'.E)$. Por otro lado, por el teorema 2.3 de [3] se tiene

$$R_1(s) = \mu'\{t' \in S'\colon \operatorname{Sup}_m \|g'_m(t')\| \geqslant s\} \leqslant 2\mu'\{t' \in S'\colon \|g'(t')\| \geqslant s\} = 2R_2(s)$$

Como ϕ es continua y creciente en $[0, \infty)$, con $\phi\,(0) = 0$, se tiene entonces integrando por partes:

$$\int_{S'} \phi(\sup_m \|g'_m\|) d\mu' = \int_0^\infty R_1(s)\, d\phi(s) \leqslant 2 \int_0^\infty R_2(s)\, d\phi(s) = 2 \int_{S'} \phi(\|g'\|) d\mu' < \infty$$

pues $g' \in L^\Phi(S',\ \mu',\ E)$ y ϕ verifica la (Δ_2). Por tanto, la aplicación $t' \to \sup \|g'_m(t')\|$ pertenece a L^Φ, luego el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue prueba que

$$M_\phi(g'_m - g') \xrightarrow[m \to \infty]{} 0.$$

Como ϕ verifica la (Δ_2), esto equivale a que $\lim\limits_{m} g'_m = g'$ en el espacio $L^\phi(S', \mu', E)$ ([7], Chap. 5, §7, lemma α), pero esto contradice el que $\|f'_n\| \geqslant c$ para todo $n \geqslant 1$. Así pues, debe existir $A' \subset S'$ con $\mu'(A') > 0$, tal que para todo $t' \in A'$ se tenga que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n f'_n(t')$ no converge en medida.

Si ahora E es un retículo de Banach y ϕ es una función de Orlicz, es evidente que $L^\phi(S, \mu, E)$ es un retículo de Banach para el orden

$$f \leqslant g \Longleftrightarrow f(t) \leqslant g(t) \text{ en casi todo } t \in S.$$

Se tiene entonces el siguiente teorema:

Teorema 2.– Sea E un retículo de Banach y (S, Σ, μ) un espacio de probabilidad sobre el que se puede definir una sucesión de Bernouilli. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

2.1. Para toda función de Orlicz ϕ que verifique la condición (Δ_2), el espacio $L^\phi(S, \mu, E)$ es débilmente secuencialmente completo.

2.2. Existe una función de Orlicz verificando la condición (Δ_2) tal que $L^\phi(S, \mu, E)$ es débilmente secuencialmente completo.

2.3. E es débilmente secuencialmente completo.

Demostración: Como E es isomorfo a un subespacio de $L^\phi(S, \mu, E)$, es claro que 2.1 $\Rightarrow$ 2.2 $\Rightarrow$ 2.3. La demostración de 2.3 $\Rightarrow$ 2.1 es consecuencia inmediata del teorema 1 y el teorema 1.c.4. de [6], según el cual un retículo de Banach es débilmente secuencialmente completo sí y sólo si no contiene un subespacio isomorfo a c_0.

Tanto en 2.3 $\Rightarrow$ 2.1 como en 1.4 $\Rightarrow$ 1.1, el requisito de que verifique la condición (Δ_2) es esencial, como prueba el siguiente resultado:

Proposición 3.– Sea (S, Σ, μ) un espacio de probabilidad que contiene un conjunto de medida positiva sin átomos, y ϕ una función de Orlicz que no satisface la condición (Δ_2). Entonces $L^\phi(S, \mu, E)$ no es débilmente secuencialmente completo para ningún espacio de Banach $E \neq \{0\}$.

Demostración: $L^\phi(S, \mu, E)$ contiene un subespacio isomorfo a $L^\phi = L^\phi(S, \mu, K)$, luego basta probar que L^ϕ no es débilmente secuencial mente completo. Esto es evidente si existe $t_0 > 0$ tal que $\phi(t) = \infty$ para $t > t_0$, pues entonces L^ϕ y L^∞ son iguales como conjuntos y topológicamente isomorfos. En cualquier caso, si ϕ no verifica la condición (Δ_2), el subespacio B de las funciones acotadas no es denso en L^ϕ. Sea entonces $f \in L^\phi \setminus \bar{B}, f \geqslant 0$, y definamos

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } f(t) \leqslant n \\ 0 & \text{si } f(t) > n \end{cases}$$

$\{f_n\} \subset B$ es una sucesión monótona en el retículo de Banach L^ϕ, acotada en norma por $\|f\|_\phi$, luego es débilmente de Cauchy. Sin embargo, no converge débilmente, pues si lo hiciera su límite coincidiría con el límite en L^1, que es f, y entonces f pertenecería a B, contra lo supuesto.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOMBAL, F.. Sobre los espacios de Orlicz de funciones vectoriales. *Coll. Math.*, 32, 3–12. (1981).

[2] DIESTEL, J. and UHL, J. J.. Vector Measures. Math. Surveys no. 15. *American Math. Soc.* (1977).

[3] HOFFMAN–JORGENSEN, J.: Sums of independent Banach space valued random variables. *Studia Math.*, 52,159–186. (1974).

[4] KRASNOSELSKI, M. A and RUTICKI, Y B.. Convex functios and Orlicz spaces. *No ordhoff.*, (1961).

[5] KWAPIEN, S.: On Banach spaces containing c_0 *Studia Math.*, 52, 187–188. (1974).

[6] LINDENSTRAUSS, J. and TZAFRIRI, L.. Classical Banach Spaces II. Springer. (1979).

[7] ZAANEN, A. C.: Linear Analysis. North Holland. (1953)

Departamento de Teoría de Funciones
Universidad Complutense de Madrid.