Grupos finitos con un número pequeño de clases de conjugación fuera del socle

Por Antonio Vera Lopez

Recibido: 2 de marzo de 1983

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia Ureña

Abstract

In this paper we classify all the finite groups G with $\alpha(G)$ conjugacy classes out of the socle $S(G)$, where $1 \leqslant \alpha(G) \leqslant 3$. Moreover, we obtain all the finite groups with $\alpha(G) = 4$ and $S(G)$ solvable.

Resumen

En este trabajo se clasifican todos los grupos finitos G con exactamente $\alpha(G)$ clases de conjugación fuera del socle $S(G)$, para $1 \leqslant \alpha(G) \leqslant 3$. Además se obtienen todos los grupos finitos verificando: $\alpha(G) = 4$ y $S(G)$ resoluble.

En este trabajo, G denotará siempre un grupo finito, $r= r(G)$ el número de clases de conjugación de G, $\beta(G)$ el número de subgrupos normales minimales de G, $\alpha(G)$ el número de clases de conjugación de G fuera del socle $S(G)$, H un grupo finito del tipo: $C_{p_1} \times \overset{t_1}{\ldots} \times C_{p_1} \times \ldots \times C_{p_s} \times \overset{t_s}{\ldots} \times C_{p_s}$ (*), donde los p_i son primos impares, $\delta = \delta(H)$ el número $\delta = \sum_{i=1}^{s} (p_i^{t_i} - 1)/(p_i - 1)$, $C_p x_\theta C_q$ el único grupo no abeliano de orden pq, donde p y q son números primos tales que $q|(p-1)$, y los subgrupos normales minimales de G serán denotados con las letras L_k.

Teorema 1: $\alpha(G) = 1$ si y sólo si existe H del tipo (*) tal que $G = Hx_\tau C_2 = Hx_\tau\langle y\rangle$ donde τ se define por $h^y = h^{-1}$ para cada $h \in H$; además este grupo satisface $\beta(G) = \delta$ y $r(G) = 2 + (|H| - 1)/2$.

Demostración: Por hipótesis $G = S(G) \dot{\cup} Cl(x)$, en consecuencia $G/S(G) = C_2$ y $|Cl(x)| = |S(G)|$. Así pues $|C_G(x)| = 2$ y G es un grupo de Frobenius con núcleo $S(G)$ y complemento isomorfo a C_2. En consecuencia, $S(G)$ es abeliano. Sea $o(g) = 2$. Si $y \in L_k^*$, entonces $o(y) = p$ para algún primo $p \neq 2$; además, $(yy^g)^g = yy^g$ y g actúa s.p.f. sobre L_k, luego $y^g = y^{-1}$. Esto fuerza $L_k = \langle y\rangle$ isomorfo a C_p. Como $S(G)$ es producto directo de algunos subgrupos normales minimales de G, el grupo G tiene la estructura establecida. Los valores dados de $\beta(G)$ y $r(G)$ son verificados fácilmente.

Lema 1: Si $r(G/S(G)) = \alpha(G) + 1$, entonces $G/S(G) \not\approx C_p x_\theta C_q$ para cualesquiera primos p y q tales que $q|(p-1)$.

Demostración: Supongamos $\bar{G} = G/S(G) \approx C_p x_\theta C_q$. Sea

$$G = S(G) \dot{\cup} Cl(x_1) \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} Cl(x_{\alpha(G)}) \tag{1}$$

Por hipótesis tenemos:

$$G = \{\bar{1}\} \dot{\cup} Cl(\bar{x}_1) \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} Cl(\bar{x}_{\alpha(G)}) \tag{2}$$

Como $|Cl(x_i)| \leqslant |Cl(\bar{x}_i)|\ |S(G)|$ para cada i, tomando cardinales en (1) y en (2) deducimos que

$$|C_G(x_i)| = |C_{\bar{G}}(\bar{x}_i)| \text{ para cada } i \tag{3}$$

Sea $K \lhd G$ tal que $G/K \approx C_q$. Sea $o(\bar{x}_i) = q$, (3) implica que $|C_G(x_i)| = q$, y por tanto que G es un grupo de Frobenius con núcleo K y complemento isomorfo a C_q. Por otro lado, si consideramos un elemento $\bar{x}_j$ de orden p, (3) implica que $o(x_j) = p$ y que p no divide al orden de $S(G)$. El núcleo de G tiene orden $p|S(G)|$ y es nilpotente, en consecuencia dicho núcleo es $C_p x S(G)$ y así deducimos el absurdo: $S(G) \leqslant C_G(x_j)$.

Lema 2: $\alpha(PGL(2,q)) = (q+1)/2$, para q impar mayor que 3.

Demostración: Sea $G = PGL(2,q)$. Entonces $S(G) = PSL(2,q)$. Es fácil verificar que $r(G) = q+2$ y que el número de clases de conjugación de G que están en $S(G)$ es $2+(q-1)/2$ (trabajando con los polinomios mínimos asociados a las matrices regulares 2×2 sobre $GF(q)$). La diferencia de ambos números nos origina el resultado establecido.

Lema 3: Sea G un grupo simple. Entonces G tiene 2–subgrupos de Sylow isomorfos a $C_2 \times C_2$ si y sólo si $G = PSL(2,q)$ con $q \equiv 3$ ó 5 módulo 8. En este caso, q no es cuadrado, y $E/PSL(2,q) \approx C_2$ implica $E \approx PGL(2,q)$ ó $E \approx PSL(2,q) \times C_2$. (cf. [2] p. 417).

Lema 4: Sea P un 2–grupo de orden 2^n. Entonces $|P/P'| = 4$ y P no es abeliano si y sólo si $P \in \{D_{2^n}, Q_{2^n}, SD_{2^n}\}$. (cf. [2] p. 194).

Lema 5: Si $N \lhd G$, entonces $\alpha(G/N) \leqslant \alpha(G)$.

Demostración: Es una consecuencia inmediata de que $S(G)N/N$ es subgrupo de $S(G/N)$.

Teorema 2: $\alpha(G) = 2$ si y sólo si G es isomorfo a uno de los grupos de la siguiente lista:

a) G es un grupo de Frobenius con núcleo $S(G)$ y complemento isomorfo a $C_3 = \langle g \rangle$, donde la acción de $\langle g \rangle$ sobre cada subgrupo $P \in \mathrm{Syl}_p(S(G))$ está dada por:

i) *Si* $x^2+x+\bar{1}$ es reducible en $Z_p[x]$ y $\{\bar{i}, -(\overline{1+i})\}$ son las raíces de $x^2+x+\bar{1}$, entonces

$$[P]\langle g\rangle = ((C_p \times \overset{s_1}{\dots} \times C_p) \times (C_p \overset{s_2}{\dots} \times C_p))\ x_\nu\ \langle g\rangle =$$

$$= (\langle w_1\rangle \times \dots \times \langle w_{s_1}\rangle \times \langle u_1\rangle \times \dots \times \langle u_{s_2}\rangle)\ x_\nu\ \langle g\rangle$$

donde ν se define por $w_k^g = w_k^i$, $u_l^g = u_l^{(1+i)}$ para cada k y l.

ii) Si $x^2+x+\bar{1}$ es irreducible en $Z_p[x]$ (es decir $p \equiv -1$(mód. 3)), entonces

$$[P]\langle g\rangle = ((C_p \times C_p) \times \overset{s}{\dots} \times (C_p \times C_p))x_\mu\langle g\rangle = (\prod_i(\langle x_i\rangle \times \langle y_i\rangle)x_\mu\langle g\rangle$$

con μ: $x_j^g = y_j$, $y_j^g = x_j^{-1}y_j^{-1}$ para cada j.

Además, si $\beta_P(G)$ denota el número de normales minimales de G contenidos en P, entonces

$$\beta(G) = \sum_{P \in \mathrm{Syl}(S(G))} \beta_P(G),$$

donde

$$\beta_P(G) = (p^{s_1}-1)/(p-1) + (p^{s_2}-1)/(p-1) \text{ en } i) \text{ y}$$
$$\beta_P(G) = (p^{2s}-1)/(p^2-1) \text{ en } ii).$$

b) C_4 ó $Hx_\sigma C_4 = Hx_\sigma\langle z\rangle$ donde σ se define por $h^z = h^{-1}$ $\forall h \in H$.

c) $(C_2 \times H)x_\gamma C_2 = (\langle z\rangle \times H)x_\gamma\langle d\rangle$ donde γ se define por $z^d = z$ $h^d = h^{-1}$ para cada $h \in H$.

Además, $r = 3 + |H|$ y $\beta(G) = 1 + \delta$ para todos los grupos que aparecen en *b*) ó *c*).

Demostración: $\alpha(G) = 2$ implica $G/S(G) \in \{C_2, C_3, \Sigma_3\}$. Además $G/S(G)$ no puede ser isomorfo a Σ_3, por el lema 1. Sea $G = S(G) \dot\cup Cl(g) \dot\cup Cl(w)$. Supongamos $G/S(G) \approx C_3$. Entonces se tiene $|C_G(g)| = 3 = |C_G(w)|$ y G es un grupo de Frobenius con núcleo $S(G)$ y complemento isomorfo a C_3. Así pues, $S(G)$ es nilpotente, luego

$$S(G) \approx C_{p_1} \times \overset{t_1}{\dots} \times C_{p_1} \times \dots \times C_{p_s} \times \overset{t_s}{\dots} \times C_{p_s}$$

Si $x \in S(G)$, entonces $xx^gx^{g^2} = 1$, luego $x^{g^2} = x^{-1}\ y^{-1}$ con $y = x^g$. De este modo $x \in \langle x,y\rangle \lhd G$ y cada L_k es isomorfo a C_p o $C_p \times C_p$ para algún primo p.

i) Supongamos que $x^2 + x + \bar{1}$ es reducible en $Z_p[x]$. Entonces cada p—subgrupo normal minimal es isomorfo a C_p (en otro caso, existiría $L_k = \langle x\rangle \times \langle y\rangle \approx C_p \times C_p$ con $x^g = y$, $y^g = x^{-1}y^{-1}$ y si i es una raíz de $x^2 + x + \bar{1}$,

entonces $(xy^{-i})^g = (xy^{-i})^i$ y $\langle xy^{-i}\rangle$ sería un subgrupo normal de G contenido en L_k, lo cual es una contradicción). De esta forma, obtenemos el grupo *a*) *i*).

ii) Supongamos ahora que $x^2 + x + \bar{1}$ es irreducible en $Z_p[x]$ (es decir

$p \equiv -1(\text{mod. } 3)$). Entonces cada L_k es isomorfo a $C_p \times C_p$ (en otro caso, existiría $L_k \approx C_p$, y $L_k\langle g\rangle$ sería un grupo de Frobenius con núcleo L_k. Esto implicaría $3|(p-1)$, imposible) y existen generadores x e y para L_k tal que $x^g = y$ y $y^g = x^{-1}y^{-1}$. Esto prueba *a*) *ii*).

Uno puede fácilmente deducir las relaciones dadas en *a*) *i*) y *a*) *ii*) en orden a obtener $\beta(G)$.

Ahora, supongamos que $G/S(G) \approx C_2$. Claramente 2 divide a $o(g)$ y a $o(w)$. Sea $|C_G(g)| = 2t_2$ y $|C_G(w)| = 2t_2$. Entonces tenemos: $1/2 = (1/2t_1) + (1/2t_2)$, luego $t_1 = t_2 = 2$. Sea P un 2–subgrupo de Sylow de G tal que $C_G(g) \leqslant P$. Si P es abeliano, entonces $|P| = 4$, $|S(G)| = 2m$, $(2,m) = 1$ y en consecuencia $S(G)$ es resoluble. Esto fuerza que $S(G) = \langle z\rangle$ ó $S(G) = \langle z\rangle \times H$ donde $\langle z\rangle$ es un subgrupo normal de G isomorfo a C_2 y H es un grupo del tipo (*). Entonces, ó $G \approx C_4$ ó $Z(G) \approx C_2$ y aparecen los grupos de *b*) y *c*) según sea $P \approx C_4$ ó $P \approx C_2 \times C_2$ respectivamente.

Si P es un grupo no abeliano, como $|C_P(g)| = 4$ entonces $|P/P'| = 4$ y $P \in \{D_{2^n}, Q_{2^n}, SD_{2^n}\}$ por lema 4. Como P no tiene subgrupos del tipo $C_2 \times C_2 \times C_2$, tenemos $S(G) = A \times E$, donde A es un grupo simple no abeliano ó $A = C_2 \times C_2$, y $E = 1$ ó H, con H un grupo del tipo (8). En cualquier caso sabemos que existe $\langle a\rangle \lhd P$ tal que $P/\langle a\rangle \approx C_2$. Si $a \in S(G)$, entonces $\langle a\rangle \in \mathrm{Syl}_2(S(G))$ y $o(a) = 2$, una contradicción. Luego $a \notin S(G)$ y $|C_G(a)| = 4$. Por tanto $o(a) = 4$ y $P \approx D_8$, luego $P \cap S(G) \approx C_2 \times C_2$ y G/E es isomorfo a D_8 ó $PGL(2, q)$. Esto contradice el hecho de que $\alpha(G/E)$ es menor o igual que $\alpha(G) = 2$, ya que $\alpha(PGL(2, q)) = (q+1)/2$ y $\alpha(D_8) = 3$.

Teorema 3: $\alpha(G) = 3$ si y sólo si G es uno de los grupos siguientes:

a) $(C_3 \times H) x_\rho C_2 = (\langle z\rangle \times H) x_\rho \langle y\rangle$ donde ρ se define por $z^y = z$, $h^y = h^{-1}$ para cada $h \in H$. Este grupo verifica $r(G) = 6+(3|H|-3)/2$ y $\beta(G) = 1+\delta$

b) $(A_5 \times H) x_\xi C_2 = (A_5 \times H) x_\xi \langle z\rangle$, donde ξ se define por $A_5\langle z\rangle \approx \Sigma_5$ y $h^z = h^{-1}$ para cada $h \in H$. Este grupo verifica $\beta(G) = 1+\delta$ y $r(G) = 6 + (5|H| - 3)/2$.

c) $Hx_\pi C_4 = Hx_\pi\langle u\rangle$ un grupo de Frobenius con complemento $\langle u\rangle$ actuando s.p.f. sobre cada $Q \in \mathrm{Syl}_q(H)$ del modo siguiente:
i) Si $q \equiv 1(\text{mód. } 4)$, entonces $Q = \langle w_1\rangle \times \ldots \times \langle w_s\rangle \times \langle z_1\rangle \times \ldots \times \langle z_s\rangle$ con relaciones $w_j^u = w_j^{\bar{i}}$, $z_k^u = z_k^{-\bar{i}}$ para cada j y k, donde $\{-\bar{i}, \bar{i}\}$ son las raíces de $x^2 + \bar{1}$ sobre Z_p.
ii) Si $q \not\equiv 1(\text{mód. } 4)$, entonces $Q = \langle z_1\rangle \times \langle w_1\rangle \times \ldots \times \langle z_s\rangle \times \langle w_s\rangle$ con relaciones $z_j^u = w_j$, $w_j^u = z_j^{-1}$ para cada j.
Además estos grupos satisfacen $r(G) = 4 + (|H| - 1)/4$ y $\beta(G) = \sum_{Q \in \mathrm{Syl}(H)} \beta_Q(G)$, donde $\beta_Q(G) = (q^{s_1}-1)/(q-1)+(q^{s_2}-1)/(q-1)$ en el caso *i*) y $\beta_Q(G) = (q^{2s}-1)/(q-1)$ en el caso *ii*).

d) Σ_5, Σ_4, D_8 ó Q_8.

Demostración: Si $\alpha(G) = 3$, entonces $r(G/S(G)) \leqslant 4$, y en consecuencia $G/S(G)$ es uno de los grupos siguientes: C_2, C_3, C_4, Σ_3, $C_2 \times C_2$, D_{10} y A_4. Sea

$$G = S(G) \dot{\cup} Cl(x_1) \dot{\cup} Cl(x_2) \dot{\cup} Cl(x_3) \qquad (1)$$

y sea Δ el triple ordenado

$$\Delta = (|C_G(x_1)|, |C_G(x_2)|, |C_G(x_3)|)$$

1) Supongamos $G/S(G) \approx C_2$. Entonces $2|o(x_i)$ para cada i y $|C_G(x_i)| = 2d_i$ con $d_i \geqslant 2$. Si $d_i = 3\ \forall i$, entonces tenemos $1 = 1/2 + 1/6 + 1/6 + 1/6$ y $\Delta = (6, 6, 6)$; si $d_1 = 2$, entonces $1/4 = 1/2d_2 + 1/2d_3$, lo cual implica $(d_2, d_3) = (3, 6)$ ó $(4, 4)$. Así pues tenemos $\Delta \in \{(6,6,6), (4,6,12), (4,8,8)\}$.

1) (a) Supongamos que $\Delta = (6, 6, 6)$ (2)

Sea P un 2–subgrupo de Sylow y $x \in P - S(G)$, entonces $|C_G(x)| = 6$, por (2), luego $|P| = 2$ y G es resoluble. Sea $g \in C_G(x)$ de orden 3, entonces $\langle g\rangle \leqslant Z(G) < C_G(x)$, luego $Z(G) = \langle g\rangle$ y $S(G) = \langle g\rangle \times H$ donde H es un grupo del tipo (*). De este modo G es el grupo dado en a).

1)(b) Ahora suponemos que $\Delta = (4, 6, 12)$ ó $(4, 8, 8)$ (3)

Sea $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ tal que $C_G(x_1) \leqslant P$. Entonces $|C_P(x_1)| = 4$. Si $|P| = 4$, entonces $\Delta = (4, 6, 12)$, $S(G) = C_2 \times H$ y $Z(G) \approx C_2$; considerando $g \in C_G(x_2) \approx C_6$ de orden 3,g estaría en $S(G)$ y por tanto sería central, una contradicción. De este modo $|P| > 4$ y $P \in \{D_{2^n}, Q_{2^n}, SD_{2^n}\}$ y existe $\langle a\rangle \lhd P$ tal que $P/\langle a\rangle \approx C_2$. Claramente $a \notin S(G)$ y $|C_G(a)| \leqslant 12$ por (3). En consecuencia $o(a) \leqslant 8$ y $|P| = 8$ ó 16. Tenemos $P \cap S(G)$ isomorfo a $C_2 \times C_2$ ó D_8 ya que no existen grupos simples con 2–subgrupos de Sylow isomorfos a Q_8 (cf. [2] p. 373). Consecuentemente, $S(G) = A \times E$ con $A \approx A_7$ ó $A \approx PSL(2, q)$, y $E = 1$ ó H, donde H es un grupo del tipo (8) (cf. [2] p. 462 y Lema 3). Si $A \approx A_7$, entonces $G/E \approx \Sigma_7$ y $\alpha(\Sigma_7)$ es mayor que 3, imposible. Sea $A = PSL(2, q)$. Tenemos, en este caso que $G/E \in \{PGL(2, q), PGL^*(2,q)$ $PSL(2,q)\langle t\rangle\}$ donde $PGL^*(2, q) = PSL(2, q)\langle u\rangle$ con u una involución originada por el automorfismo del cuerpo de $PSL(2, \mathrm{q})$ de orden 2, y $t = su$ con s una involución de $PGL(2, q) - PSL(2, q)$. Como $|C_G(z)| > 12$ para $z = s$ ó $z = su$, concluimos que $G/E \approx PGL(2, q)$. Pero $\alpha(G/E) \leqslant \alpha(G) \leqslant 3$ implica $q = 5$ y ó $G = \Sigma_5$, ó G es isomorfo a uno de los grupos de tipo b).

2) Supongamos $G/S(G) \approx C_3$. Entonces 3 divide a $o(x)$ para cada i y en consecuencia $\Delta = (3, 6, 6)$, una contradicción.

3) Supongamos $G/S(\mathrm{G}) \approx \Sigma_3$. Entonces probaremos que $G \approx \Sigma_4$. $G/S(G) \approx \Sigma_3$ implica que $o(x_i)$ es divisible por 2 ó 3. Sea $d_i = |C_G(x_i)|$. Como $5/6 = 1/d_1 + 1/d_2 + 1/d_3$, uno de los d_i debe ser menor que 4, luego po-

demos suponer que $d_1 = 2$ ó 3. Claramente d_1 no puede ser 2, luego $\Delta \in \in \{(3, 3, 6), (3, 4, 4)\}$. Como $\Delta = (3, 3, 6)$ no es posible, tenemos $\Delta = (3, 4, 4)$ y en consecuencia $Z(G) = 1$. Sea $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ tal que $C_G(x_2) \leqslant P$. Si $|P| = 4$, entonces existe un normal minimal isomorfo a C_2, imposible, luego P tiene más de 4 elementos, $P \in \{D_{2^n}, Q_{2^n}, SD_{2^n}\}$ y existe $\langle a\rangle \lhd P$ tal que $P/\langle a\rangle \approx C_2$. $a \notin S(G)$, luego $o(a) \leqslant 4$, P es isomorfo a D_8 y $P \cap S(G) \approx C_2 \times C_2$. Además tenemos claramente que $G = [S(G)]N_G(\langle x_1\rangle)$ y que $N_G(\langle x_1\rangle) \approx \Sigma_3$. $\langle x_1\rangle$ actúa s.p.f. sobre $S(G)$, luego $S(G)$ es abeliano y ó $S(G) \approx C_2 \times C_2$ y $G \approx \Sigma_4$, ó $S(G) \approx C_2 \times C_2 \times H$ con H del tipo (*), este caso no puede originarse aquí, ya que en otro caso tendríamos que $D = [H]N_G(\langle x_1\rangle)$ sería un grupo de Frobenius con complemento isomorfo a Σ_3, imposible.

4) Supongamos que $|G/S(G)| = 4$. Entonces $|C_G(x_i)| = 4$ $\forall i$. Sea $P \in \in \mathrm{Syl}_2(G)$ tal que $C_G(x_1) \leqslant P$. Si $|P| = 4$, entonces $G = [S(G)]P$ y P actúa s.p.f. sobre $S(G)$, luego $P \approx C_4$. Sea $P = \langle x_1\rangle$. Si $Q \in \mathrm{Syl}_q(S(G))$, entonces Q es producto directo de algunos q–subgrupos normales minimales. Sea $q \equiv \equiv 1(\text{mód } 4)$, entonces cada normal minimal q–grupo es isomorfo a C_q y G es el grupo *c)i)*. Si $q \not\equiv 1(\text{mód. } 4)$, fácilmente verificamos que $L_k \approx C_q \times C_q$ para cada L_k q–subgrupo normal minimal y G es el grupo *c) ii)*. Si $|P| > 4$, entonces $P \in \{D_{2^n}, Q_{2^n}, SD_{2^n}\}$. Tenemos de nuevo que existe $\langle a\rangle$ subgrupo normal de P tal que $P/\langle a\rangle \approx C_2$ y se deduce directamente que $P \approx D_8$ ó Q_8. En consecuencia $S(G) \approx C_2$ ó $C_2 \times H$ con H del tipo (*). Finalmente verificamos que la última afirmación no puede darse. En efecto, considerando, la acción s.p.f. de los elementos de $P - Z(P)$ sobre H, concluimos que si $P = \langle a,b\rangle$ y $Z(P) = \langle a^2\rangle$, entonces $h^{ab} = h$ $\forall h \in H$, luego $H \leqslant C_G(ab)$ y ab no está en $S(G)$, lo cual es una contradicción. De este modo $S(G) \approx C_2$ y G es isomorfo a D_8 ó $Q8$.

5) $G/S(G)$ no puede ser isomofo a D_{10} por Lema 1.

6) Finalmente argumentamos que $G/S(\mathrm{G}) \not\approx A_4$. Supongamos lo contrario, entonces $\Delta = (3, 3, 4)$ y $Z(G) = 1$. Sea $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ tal que $C_G(x_3) \leqslant P$. Entonces $|C_G(x_3)| = 4$ y consecuentemente $|P| = 4$. De este modo $G = = [S(G)]A_4$ y A_4 actúa s.p.f. sobre $S(G)$ una contradicción.

Ahora puede probarse fácilmente que cada una de las posibles estructuras de G, verifican que $\alpha(G) = 3$.

Teorema 4: Sea G un grupo verificando $\alpha(G) = 4$ y $S(G)$ resoluble. Entonces G es uno de los grupos siguientes:

a) $H \times_{\iota_1} (C_2 \times C_2 \times C_2) = H \times_{\iota_1} (\langle y_1\rangle \times \langle y_2\rangle \times \langle y_3\rangle)$ con ι_1 dado por

$$h^{y_1} = h, \quad h^{y_2} = h, \quad h^{y_3} = h^{-1} \quad \forall h \in H.$$

b) $H \times_{\iota_2} (C_4 \times C_2) = H \times_{\iota_2} (\langle z_1\rangle \times \langle z_2\rangle)$ con ι_2 dado por

$$h^{z_1} = h^{-1}, \quad h^{z_2} = h \quad \forall h \in H.$$

$$c)\ (C_2\times(C_2\times C_2)\times \ldots \times(C_2\times C_2)\times E)\times_{\iota_3} C_3 =$$

$$(\langle z\rangle\times\langle x_1\rangle\times\langle y_1\rangle\times \ldots \times\langle x_t\rangle\times\langle y_t\rangle\times E)_{\iota_3}\langle g\rangle$$

donde $t \geqslant 0$, $E = 1$ ó H, $(t, E) \neq (0, 1)$, ι_3 se define por $z^g = z$, $x_i^g = y_i$, $y_i^g = x_i y_i$, y g actúa s.p.f. como en el Teorema 2*a*).

d) $C_9 \times_{\iota_4} C_2 = \langle a\rangle\times_{\iota_4} b\rangle$ con ι_4 dado por $a^b = a^{-1}$.

e) $S(G)\times_{\iota_5} C_5$ un núcleo de Frobenius con núcleo $S(G)$ y complemento isomorfo a C_5.

f) $S(G)\times_{\iota_6} Q_8$ un grupo de Frobenius con núcleo $S(G)$ y complemento isomorfo a Q_8.

g) $C_4\times C_2$.

Demostración: $\alpha(G) = 4$ implica $r(G/S(G)) \leqslant 5$, luego $G/S(G)$ es uno de los grupos siguientes: C_2, C_3, Σ_3, C_4, $C_2\times C_2$, D_{10}, A_4, C_5, D_{14}, $C_7\times_{\theta_1} C_3$, Σ_4, D_8, Q_8, HolC_5, A_5. (cf. [1] p. 462).

Sea

$$G = S(G) \dot{\cup} Cl(x_1) \dot{\cup} Cl(x_2) \dot{\cup} Cl(x_3) \dot{\cup} Cl(x_4) \qquad (1)$$

y Δ definido por

$$\Delta = (|C_G(x_1)|, |(C_G(x_2)|, |C_G(x_3)|, |C_G(x_4)|) = (d_1, d_2, d_3, d_4)$$

con $d_1 \leqslant d_2 \leqslant d_3 \leqslant d_4$.

Si G es un grupo nilpotente, entonces $S(G) \leqslant Z(G)$ y $G/S(G)$ es un grupo nilpotente cuyo número de clases de conjugación es menor o igual que 5. Estas condiciones fuerzan $G \approx C_4\times C_2$. De este modo podemos suponer que G es un grupo no nilpotente.

1) Supongamos $G/S(G) \approx C_2$.

Sea $P\in \mathrm{Syl}_2(G)$. Tenemos $2|d_i\ \forall i$ y $1/2 = \sum_{i=1}^{4} 1/d_i$. Si $|P| = 4$, entonces $C_2 \approx O_2(S(G)) \leqslant Z(G)$. Sea g un elemento de $P-S(G)$. Si $h^g = h' \notin \langle h\rangle$ para algún $h \in O_2(S(G))^*$, entonces $(hh')^g = hh'$ implica $hh'\in Z(G)$, en consecuencia $|Z(G)| \geqslant 6$, $d_i \geqslant 12$ y $1/2 \leqslant 4/12$, imposible. De este modo tenemos $h^g = h^{-1}$ para cada $h\in O_2(S(G))$ y $\alpha(G) = 2$, una contradicción. Por tanto, $|P| \geqslant 8$. Si L_k es un 2–subgrupo normal minimal de G tal que $L_k \cap Z(G) = 1$, entonces $|Cl(x)| = 2\ \forall x\in L_k - \{1\}$, luego $|L_k| = 1 + 2$, imposible. Así pues $O_2(S(G)) \leqslant Z(G)$ y P es abeliano. De este modo tenemos $d_i > 4\ \forall i$ y $\Delta =$ $= (8, 8, 8, 8)$. Tomemos $g\in P-S(G)$, entonces $|C_G(g)| = 8$, luego $|P| = 8$ y G es el grupo *a*) ó *b*) según sea $P \approx C_2\times C_2\times C_2$ ó $P \approx C_4\times C_2$ respectivamente.

2) Supongamos $G/S(G) \approx C_3$.

En este caso $\Delta = (6, 6, 6, 6)$. Sea $P \in \mathrm{Syl}_3(G)$ y $g \in P - S(G)$, entonces $|C_G(g)| = 6$ implica $|G| = 3m$ con $(3, m) = 1$. Sea z un elemento que centraliza a g y de orden 2, entonces $z \in Z(G)$ y $Z(G)$ es isomorfo a C_2. En consecuencia G es el grupo dado en c).

3) Supongamos $G/S(G) \approx \Sigma_3$.

Como $5/6 \nleq 4/6$, tenemos $d_1 \in \{2, 3, 4\}$, pues los d_i son divisibles por 2 ó 3. Sea $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ y $Q \in \mathrm{Syl}_3(G)$. Si $d_1 = 2$, entonces G es un grupo de Frobenius con núcleo N abeliano y complemento isomorfo a C_2. Sea $o(g) = 2$. Entonces $|Cl(g)| = |N|$ y $\alpha(G) = 4$ implican $3|S(G)| = |N| = |S(G)| + 2 + 2 + 2$, luego $S(G)$ es isomorfo a C_3 y G es el grupo dado en d). Si $d_1 = 4$, entonces $\Delta = (4, 4, 6, 6)$ ó $(4, 4, 4, 12)$. Considerando $u \in Q - S(G)$, tenemos $|C_G(u)| = 6$ ó 12 y en consecuencia $|G| = 3m$ con $(3, m) = 1$. Sea z un elemento de orden 2 que conmuta con u, entonces $z \in S(G)$ y $S(G)\langle u\rangle \leqslant C_G(z)$, luego $|Cl(z)| \leqslant 2$. Como $d_1 = 4$, tenemos $|P| = 4$ ó $P \approx D_8$.

Si $P \approx D_8$, entonces $|Cl(z)| \leqslant 2$, y $O_2(S(G)) \approx C_2 \times C_2$ fuerza $O_2(S(G)) = Z(G)$, imposible. Si $|P| = 4$, entonces $O_2(S(G)) \approx C_2$. $G/O_2(S(G)) \approx \overline{O_{2'}(S(G))}\Sigma_3$ y Σ_3 actúa s.p.f. sobre $\overline{O_{2'}(S(G))}$ implica que $O_{2'}(S(G)) \approx 1$ y $|G| = 12$, imposible. Si $d_1 = 3$, entonces $d_i = 3t$ implica $t = 1$, por tanto $\Delta = (3, 4, 8, 8)$. $d_2 = 4$ implica $|P| = 4$ ó $P \approx D_8$, pero $Z(G) = 1$, luego $P \approx D_8$. Tenemos $|C_G(x_3)| = 8$, luego $C_G(x_3) = O_2(S(G))\langle x_3\rangle$ abeliano, lo cual es una contradicción.

Supongamos $G/S(G) \approx D_{10}$.

Como $9/10 \nleq 4/5$. tenemos $d_1 < 5$, luego $d_1 \in \{2,4\}$. Si $d_1 = 2$ entonces G es un grupo de Frobenius con núcleo N y complemento isomorfo a C_2. $N - S(G)$ es unión de tres clases de conjugación, luego $5|S(G)| = |S(G)| + 6$, imposible. Por tanto, $d_1 = 4$, y en consecuencia $\Delta = (4, 4, 5, 5)$. Sea $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Entonces $|P| = 4$ ó $P \approx D_8$, como $Z(G) = 1$, tenemos $P \approx D_8$, $O_2(S(G)) \approx C_2 \times C_2$ y C_5 actúa s.p.f. sobre $O_2(S(G))$, imposible. De este modo $G/S(G) \not\approx D_{10}$.

5) Supongamos $G/S(G) \approx A_4$.

En este caso es $d_1 < 6$, luego $d_1 \in \{3,4\}$. Si $d_1 = 3$ y $G/N \approx C_3$, entonces $G - N$ es unión de dos clases de conjugación de cardinalidad $\leqslant 6$, por tanto, $4|S(G)| \leqslant |S(G)| + 6 + 6$ y $S(G)$ es isomorfo a $C_2 \times C_2$. Así pues tenemos $d_i \neq 4$ y $11/12 \leqslant 1/3 + 3/8$ imposible. Si $d_1 = 4$, entonces $\Delta = (4, 4, 4, 6)$. Sea $Q \in \mathrm{Syl}_3(G)$ y $u \in Q - S(G)$, entonces $|C_G(u)| = 6$, $o(u) = 3$ y $|G| = 3m$ con $(3, m) = 1$. Sea $z \in C_G(u)$ de orden 2, entonces $z \in S(G)$, $zu \notin S(G)$ y $o(u) = 6$, luego 6 divide a $|C_G(u)|$ y $zu \not\sim u$, esto es una contradicción.

6) Supongamos $|G/S(G) = 4$.

En este caso, $d_1 = 4$. Además, como $G/S(G)$ es un 2–grupo, tenemos $O_2(S(G)) \leqslant Z(G) < C_G(x_1)$, luego $O_2(S(G)) = C_2$. Por tanto $d_i \neq 8$ $\forall i$ y $\Delta = (4, 6, 6, 6)$. Sea $z \in C_G(x_2)$ de orden 2. Entonces $z \in S(G)$ y $|C_G(z)| = 6$, luego $|G| = 2m'$ con $(2, m') = 1$, imposible.

Los casos $G/S(G) \approx D_{14}$ ó $C_7 \times_\theta C_3$ se desechan, por el Lema 1.

Si $G/S(G) \approx C_5$, $d_i = 5$ $\forall i$ y G es un grupo de Frobenius con núcleo $S(G)$ y complemento isomorfo a C_5.

Si $G/S(G) \approx \Sigma_4$, entonces $\Delta = (3, 4, 4, 8)$. Sea $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$. $d_2 = 4$ y $\exp.P \leqslant 8$ implican $|P| \leqslant 16$. $d_1 = 3$ implica $Z(G) = 1$ luego $O_2(S(G)) = 1$ y $G = [S(G)]\Sigma_4$ es un grupo de Frobenius con complemento isomorfo a Σ_4, imposible.

Supongamos $G/S(G) \approx D_8$ ó Q_8. Entonces $\delta = (4, 4, 4, 8)$ y $O_2(S(G)) \leqslant Z(G)$. Además $d_1 = 4$ implica $O_2(S(G)) = C_2$. Si $O_2(S(G))$ es trivial, entonces G es un grupo de Frobenius con núcleo $S(G)$ y complemento isomorfo a Q_8. Si $O_2(S(G)) \approx C_2$ y $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$, entonces existe $\langle a \rangle \lhd P$ tal que $P/\langle a \rangle \approx C_2$. Tenemos pues que a^2 y a son elementos de $G-S(G)$ necesariamente conjugados con x_4, pues $\Delta = (4, 4, 4, 8)$, esto es una contradicción.

Supongamos $G/S(G) \approx \mathrm{Hol}C_5$. En este caso, $\Delta = (4, 4, 4, 5)$. Sea $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ y $\langle a \rangle \lhd P$ tal que $P/\langle a \rangle \approx C_2$.. Si $a \in S(G)$, tenemos $o(a) = 2$, y si $a \notin S(G)$, entonces $o(a) \leqslant 4$, luego en cualquier caso, tenemos $|P| \leqslant 8$. Si $O_2(S(G)) = 1$, entonces G es un grupo de Frobenius con complemento isomorfo a $\mathrm{Hol}C_5$, imposible. Si $O_2(S(G)) = C_2$, entonces $P/Z(P) \approx C_4$, imposible.

Finalmente supongamos que $G/S(G) \approx A_5$. Entonces $\Delta = (3, 4, 5, 5)$, luego $|S(G)|$ no es divisible por 3 ó 5. Sea P un 2–subgrupo de Sylow de G, $d_2 = 4$ y $\exp.P \leqslant 4$ implican $|P| \leqslant 8$. Si $|P| = 4$, entonces G es un grupo de Frobenius con complemento isomorfo a A_5 , imposible. De este modo, $|P| = 8$ y $C_2 = O_2(S(G)) = Z(G) < C_G(x_1)$ isomorfo a C_3, esto es una contradicción, lqd.

BIBLIOGRAFIA

[1] BURNSIDE, W : . Theory of Group of Finite Order", 2nd. Ed. Dover (1955)

[2] GORENSTEIN, D.: "Finite Groups '. Harper and Row, New-York (1968).

Departamento de Algebra y Fundamentos

Universidad L de Valencia
Burjassot. (Valencia)