Una nota sobre la descomposición espectral de operadores acotados

Por LUCAS JÓDAR (*)

Recibido: 2 de marzo de 1983

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia Ureña

Abstract

In this paper are studied conditions under which bounded operators on Banach spaces, with countable spectrum, can be descomposed spectrally, extending known results.

Resumen

En este artículo se estudian condiciones bajo las que los operadores acotados sobre espacios de Banach, con espectro numerable pueden descomponerse espectralmente, extendiendo resultados conocidos.

En primer lugar, se demostrarán las fórmulas conocidas de descomposición de un operador con rango finito, por medio de una demostración directa y transparente que hace uso de un teorema de los residuos vectorial, que incluímos por estar ausente de la bibliografía por nosotros conocida.

LEMA 1 (Teorema de los residuos vectorial)

Sea X un espacio de Banach. Sea Ω un abierto del plano complejo C. Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función meromorfa, siendo $A = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset \Omega$ el conjunto de los polos de f. Si γ es un ciclo en Ω tal que $\gamma^* \in \Omega$ y $\mathrm{Ind}_\gamma(s) = 0$ para cada $s \notin \Omega$, entonces se verifica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(s)\, ds = \sum_{a \in A} \mathrm{Res}\,(f, a)\, \mathrm{Ind}_\gamma(a) \tag{1}$$

Demostración: Sea $u \in X'$ (el dual topológico de X ó conjugado). Entonces $u \cdot f$ es una función escalar, meromorfa en Ω con polos en A. Por el teorema de los residuos escalar (Teor. 10.42, pág. 241, [1]) se verifica la fórmula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (u \cdot f)(s)\, ds = \sum_{a \in A} \mathrm{Res}\,(u \cdot f, a)\, \mathrm{Ind}_\gamma\,(a) \tag{2}$$

(*) Este trabajo ha sido reallizado en el Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad de Valencia, formando parte de la Tesis Doctoral del autor, realizada bajo la dirección del Profesor Antonio Marquina.

Puesto que $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(s)\,ds$ existe y es un elemento de X, se tendrá que

$$u\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(s)\,ds\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (u\cdot f)(s)\,ds \tag{3}$$

para cada $u \in X'$.

Si vemos que para cada $u \in X'$ se cumple que Res $(u\cdot f, a) = u(\text{Res}\,(f,a))$, entonces por (2) y (3) se verificará que

$$u\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(s)\,ds\right) = u\left(\sum_{a\in A} \text{Res}\,(f,a)\ \text{Ind}\,(a)\right) \tag{4}$$

y por el teor. de Hahn–Banach (Pág. 111, [2]), y por (4), se tendrá (1).

Veamos que Res $(u\cdot f, a) = u(\text{Res}\,(f,a))$. Sea el desarrollo de Laurent de f en el polo A de la forma

$$f(z) = \frac{A_k}{(z-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{z-a} + B_0 + B_1(z-a) + \dots$$

Entonces si $u \in X'$ se verifica

$$u(f(z)) = \frac{u(A_k)}{(z-a)^k} + \frac{u(A_{k-1})}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{u(A_1)}{z-a} + u(B_0) + \dots$$

y de aquí se deduce que Res $(u\,f, a) = u(A_1) = u(\text{Res}\,(f,a))$. Q.E.D.

Sea X Banach, $T \in L(x)$ y sea s un punto aislado del espectro de T, $s \in \sigma(T)$ polo de orden $w(s)$ de T; es decir, polo de orden $w(s)$ de la función resolvente de T, que denotaremos por $R(\ ,T)$.

Teorema 1

Sea X Banach, $T \in L(X)$, $\sigma(T) = \{s_1, s_2, \dots .s_n\}$, Ω abierto con $\sigma(T) \subset \Omega$ y f holomorfa en Ω. Sea $w(s)$ el orden del polo s, entonces se verifica

$$f(T) = \sum_{s\in\sigma(T)} \sum_{i=0}^{w(s)-1} \frac{(T-sI)^i}{i!} f^{(i)}(s)\,E(s), \tag{5}$$

siendo $E(s)$ la proyección $e_s(T)$, imagen de T de la función holomorfa en Ω que vale 1 en un abierto V, 0 en un abierto V', con $V\cap V' = \phi$, y $\sigma(T)\subset V\cup V'$.

Demostración: Sean $r_1, r_2, \ldots, r_n$ números positivos tales que si B_j es la bola cerrada con centro s_j y radio r_j, se verifique $B_j \cap B_k = \phi$ si $k \neq j$. Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, sea el circuito $\gamma_j : [0, 2\pi] \longrightarrow C$, tal que $\gamma_j(t) = s_j + r_j e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$. Por construcción se tiene que $\gamma_j^* \cap \gamma_k^* = \phi$, si $k \neq j$.

Sea γ el ciclo $\gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} \gamma_i$, entonces por el cálculo funcional holomorfo, cap. 7.2, pág. 566, [3], y por el lema 1, se tiene que

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(s)\, R(s, T)\, ds = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}\,(f()\, R(\ , T), s_i)\, \operatorname{Ind}_\gamma(s_i) =$$

$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}\,(f()\, R(\ ,T), s_i)$, porque $\operatorname{Ind}_\gamma(s_i) = 1$ por construcción de γ.

Sea $w_i = w(s_i)$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ y $f(s) = \sum_{j \geqslant 0} b_j (s - s_i)^j$, con $b_j = f^{(j)}(s_j)/j!$, el desarrollo de Taylor de f, alrededor del punto s_i. El desarrollo de Laurent de la función resolvente $R(\ , T)$ en el polo s_i es

$$R(s, T) = \frac{B_{w_i}}{(s - s_i)^{w_i}} + \frac{B_{w_i - 1}}{(s - s_i)^{w_{i-1}}} + \ldots + \frac{B}{s - s_i} + \sum_{n \geqslant 0} A_n (s - s_i)^n$$

con $B_1 = E(s_1)$, $B_{n+1} = (T - s_i)^n E(s_i)$, por [3], pág. 572.

El desarrollo de Laurent de la función $s \longrightarrow f(s)\, R(s, T)$ en el polo s_i viene dado por

$$f(s) R(s,T) = \Big(\sum_{k \geqslant 0} b_k (s - s_i)^k\Big) \Big(\sum_{n \geqslant 0} A_n\, (s - s_i)^n + \frac{E(s_i)}{s - s_i} + \frac{T - s_i I}{(s - s_i)^2} E(s_i) + \ldots$$

$$+ \frac{(T - s_i I)^{w_i - 1}}{(s - s_i)^{w_i}} E(s_i) = \Big(\sum_{k \geqslant 0} b_k (s - s_i)^k + \frac{B_{w_i}}{(s - s_i)^{w_i}} + \ldots + \frac{B_1}{s - s_i} +$$

$$+ \sum_{n \geqslant 0} A_n (s - s_i)^n\Big) = \frac{1}{(s - s_i)^{w_i}} f(s_i) B_w + \frac{1}{(s - s_i)^{w_i - 1}} (b_0 B_{w_i - 1} + b_1\, B_{w_i - 2})$$

$$+ \ldots + \frac{1}{s - s_i} (b_{w_i - 1} B_{w_i} + b_{w_i - 2} B_{w_i - 1} + \ldots + b_0 B_1) + b_0 A_0 + \ldots \quad (6)$$

donde los cálculos se justifican por el teor. de Mertens para valores vectoriales o, débilmente y aplicando el teor. de Hahn–Banach. De (6) se tiene que

$$\operatorname{Res}\,(f()\, R(\ ,T), s_i) = b_{w_i - 1} B_{w_i} + b_{w_i - 2} B_{w_i - 1} + \ldots + b_0 B_1 =$$

$$=\frac{f^{(w_i-1)}(s_i}{(w_i-1)!}(T-s_iI)^{w_i-1}E(s_i)+\frac{f^{(w_i-2)}(s_i)}{(w_i-1)!}(T-s_iI)^{w_i-2}E(s_i)+\ldots+f(s_i)E(s_i)=$$

$$=E(si)\sum_{k=0}^{\omega_i-1}\frac{(T-s_iT)^k}{k!}f^{(k)}(s_i)$$

Luego se tiene que la relación (5) se verifica. Q.E.D.

COROLARIO 1

Si $f\in\mathcal{H}(\Omega)$, $\sigma(T)=\ s_1, s_2, \ldots, s_n$ y s_i polo simple de T para $1\leqslant i\leqslant n$, entonces se verifica que:

$$(a)\ f(T)=\sum_{i=1}^{n} f(s_i)E(s_i),\quad (b)\ T=\sum_{i=1}^{n} s_iE(s_i)$$

Demostración: Por ser cada s_i polo simple de T, y por el teor. 1, las igualdades (a) y (b) son inmediatas. Q.E.D.

COROLARIO 2

Sea X espacio de Hilbert, $T\in L(X)$, $\sigma(T)=\{s_i;\ 1\leqslant i\leqslant n\}\subset\Omega, f\in\mathcal{H}(\Omega)$ y supongamos que $T=T^*$, entonces se verifican las fórmulas (a) y (b) del corolario 1.

Demostración: Es inmediata por sert $T=T^*$ y ser X Hilbert, los polos s_i son simples. (Pág. 561 [3])

LEMA 2

Sea X Banach, $T\in L(X)$ tal que

$$\| R(z,T)\| =\frac{1}{d(z,\sigma(T))},\quad z\in\rho(T) \tag{7}$$

siendo $\rho(T)$ el conjunto resolvente de T. Entonces para cada z_0 punto aislado de $\sigma(T)$, se tiene $\|E(z_0)\|=1$, siendo $E(z_0)$ la proyección asociada a z_0.

Demostración: Sea

$$r=d(z_0,\sigma(T)\sim\{z_0\}),\ \gamma_0(t)=z_0+\frac{r}{2}e^{it},\ t\in[0,2\pi]$$

y sea W un entorno de $\sigma(T)\sim\{z_0\}$ tal que si $V=B(z_0,r/2)$, se verifique $V\cap W=\phi$. Consideremos la función holomorfa en $\Omega=W\cup V$, tal que

$$e_{z_0}(z)=\begin{cases}1, & z\in V\\ 0, & z\in W\end{cases}$$

y sea $\gamma = \gamma_0 \vee \gamma_1$ un circuito que contornea $\sigma(T)$, con $\gamma_1^* \in C \sim V$. Por el càlculo funcional holomorfo se tiene

$$e_{z_0}(T) = E(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e_{z_0}(z)\, R(z, T)\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(z, T)\, dz$$

Para $z \in \gamma_0^*$ se tiene que $d(z, \sigma(T)) = |z - z_0| = r/2$. Así, la proyección $E(z_0)$ verifica

$$\|E(z_0)\| = \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} R(z,T)\, dz \right\| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sup_{z\in\gamma_0} \|R\ (z,T)\|\ 2\pi(r/2) = r/2 \sup_{z\in\gamma_0^*} \|R(z,T)\|$$

y por (7) se tiene que $\| E(z_0) \| \leqslant (r/2)(2/r) = 1$. Q.E.D.

La condición (7) es verificada por los operadores normales y subnormales, (Pág. 2, [4]).

TEOREMA 2

Sea X Banach, $T \in L(X)$ compacto con $\sigma(T) = \{0\} \cup \{s_i,\ i \in N,\ i \geqslant 1\}$, de modo que

$$|s_1| \geqslant |s_2| \geqslant \ldots \geqslant |s_n| \geqslant \ldots$$

Supongamos que T verifique las condiciones

(a) Para cada $i \geqslant 1$, s_i es polo simple de T.

(b) Existe $s > -2$, tal que $\|R(z,T)\| = 0(|z|^s)$ para $0 < |z| < \epsilon$.

Entonces se tiene que:

(I) $T = \sum_{i\geqslant 1} s_i E(s_i)$ en la topología $\sigma(L(X), L(X)')$ de $L(X)$.

(II) T es límite en $\|\ \|$ de $L(X)$ de una sucesión de operadores de rango finito.

(III) Si $\{s_i\}_{i\geqslant 1} \subset l^1$ y $\exists\, M > 0$ tal que $\| E(s_i) \| \leqslant M$, entonces $T = \sum_{i\geqslant 1} s_i E(s_i)$ en $\|\ \|$ de $L(X)$.

Demostración: Sea $\{r_n\}_{n\geqslant 1}$ sucesión de números reales positivos, tales que $\lim_n r_n = 0$, $r_n < |s_n|$ para $n,m \in N$, $n \geqslant$, $m \geqslant 1$, $\gamma_n(t) = s_n + r_n e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ y $\gamma_n^* \cap \gamma_m^* = \phi$ para $n \neq m$. Sea el ciclo $\Gamma_n = \gamma_{x_n} \vee \bigoplus_{i=1}^{n} \gamma_n$, con $\gamma_{x_n}(t) = x_n e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, con $x_n \in R$, $x_n < |s_n| - r_n$.

Por el corolario 1 del teor. 1 tenemos

$$T = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} z\,R(z, T)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{x_n}} z\,R(z, T)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}}\gamma_i} z\,R(z, T)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{x_n}} z\,R(z, T)\,dz + \sum_{i=1}^{n} s_i\,E(s_i) \tag{8}$$

Sea $u \in L(X)'$, entonces por (8) tenemos que

$$u(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{x_n}} z\,u((R(z, T)) + \sum_{i=1}^{n} s_i\,u(E(s_i)) \tag{9}$$

Si probamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{x_n}} z\,u(R(z, T))\,dz = 0,$$

entonces tomando límites en (9), se tiene que $u(T) = \sum_{i\geqslant 1} s_i\,u(E(s_i))$ (10)

Por hipótesis (b), existe $N > 0$ tal que $\|R(z, T)\| \leqslant N\,|z|^s$, en $0 < |z| < \epsilon$, con $s > -2$.

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{x_n}} z\,u((R(z, T))\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_{x_n}} |z\,u(R(2z, \mathrm{T})|\,dz \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\sup_{|z|=x_n} |z\,u(R(z, T))|\,2\pi\,x_n \leqslant N\,\|u\|\,(x_n)^{2+s},$$

que tiende a cero si $n \to \infty$, porque $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Por (10) se tiene que $T = \sum_{i\geqslant 1} s_i\,E(s_i)$ en la topología débil $\sigma(L(X), L(X)')$ de $L(X)$. Por ser T compacto, cada proyección $E(s_i)$ tiene rango finito dimensional (Pág. 35, [3]). Sea $T_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} s_i E(s\ )$; por ser $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ débilmente en $L(X)$, y por el corolario 14, pág. 422 [3], existe una sucesión de combinaciones convexas de los operadores T_n, que converge a T en $\|\ \|$ de $L(X)$. Por ser T_n operador de rango finito, sus combinaciones convexas también lo son, y en consecuencia, T es el límite en $\|\ \|$ de $L(X)$, de una sucesión de operadores de rango finito. Esto demuestra la parte (II) del teorema.

(III) Por hipótesis la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |s_i| < +\infty$, y por ser $\|(E(s_i)\| \leqslant M$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| s_i E(s_i) \| < + \infty$$

Por ser L(X) Banach, la serie de operadores $\sum_{i=1}^{\infty} s_i E(s_i)$ converge en norma a un operador de $L(X)$, y por converger débilmente a T, se tiene que $T = \sum_{i \geqslant 1} s_i E(s_i)$ en $\| \ \|$ de $L(X)$.

TEOREMA 3

Sea X espacio de Hilbert, $T \in L(X)$ compacto, con $\sigma(T) = \{0\} \cup \{s_i, i \in N, i \geqslant 1\}$, $f \in C(\sigma(\sigma(T))$ con $f(0) = 0$. Entonces si $E(s_i) = E(s_i)^*$ se verifica:

(I) La serie $\sum_{i \geqslant 1} f(s_i) E(s_i)$ converge en $\| \ \|$ a un operador $V \in L(X)$.

(II) V es normal.

Demostración: Por ser X Hilbert y $E(s_i) = E(s_i)^*$, la proyección $E(s_i)$ es ortogonal por [3], pág. 482, y así, por el teor. 4, pág. 45 de [5], se tiene que $E(s_i)\ E(s_k) = 0$, para $i \neq k$. De aquí, la familia de subespacios $\{F_i = E(s_i)(X)\}_{i \geqslant 1}$ es ortogonal, luego es una familia hilbertiana de subespacios de X. Sea $x \in X$, por el teor. de Pitágoras (Pág. 14, [5]) tenemos que

$$\| \sum_{i=n}^{m} f(s_i)\, E(s_i) \|^2 = \sum_{i=n}^{m} |f(s_i)|^2\ \|E(s_i)(x)\|^2 = (\sup_{n \leqslant i \leqslant m} |f(s_i)|^2) \sum_{ii=n}^{m} \|E(s_i)(x)\|^2$$

Por la desigualdad de Bessel, pág. 15 de [5], sabemos que

$$\sum_{i=n}^{m} \|E(s_i)(x)\|^2 \leqslant \sum_{i \geqslant 0} \|E(s_i)(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

De donde se deduce que

$$\| \sum_{i=n}^{m} f(s_i) E(s_i)(x)\|^2 \leqslant (\sup_{n \leqslant i \leqslant m} |f(s_i)|^2) \|x\|^2 \tag{11}$$

Por ser $\lim_{i \to \infty} f(s_i = 0$, se deduce de (11) que la serie $\sum_{i \geqslant 1} f(s_i) E(s_i)(x)$ es de Cauchy en X, siendo por tanto convergente. Además el operador

$$x \longrightarrow \sum_{i \geqslant 1} f(s_i) E(s_i)(x)$$

verifica que

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \| \sum_{i=n}^{m} f(s_i) E(s_i)(x)\|^2 \leqslant \sup_{n \leqslant i \leqslant m} |f(s_i)|^2, \tag{12}$$

y por converger a cero la sucesión $\{f(s_i)\}_{i \geqslant 1}$, de (12) se deduce que la serie $\sum_{i\geq 1} f(s_i)E(s_i)$ es de Cauchy en $L(X)$, definiendo un operador acotado V. Es claro que $V^* = \sum_{i\geq 1} \overline{f(s_i)}E(s_i)E(s_i)^* = \sum_{i\geq 1}\overline{f(s_i)}E(s_i)$, y que por tanto se verifica

$$V\cdot V^* = (\sum_{i\geq 1} f(s_i)E(s_i))(\sum_{k\geq 1} \overline{f(s_k)}E(s_k)) = \sum_{i\geq 1} f(s_i)\left[\sum_{k\geq 1} \overline{f(s_k)}E(s_i)E(s_k)\right] =$$

$$= \sum_{i\geq 1} |f(s_i)|^2 E(s_i) = V^*\cdot V, \text{ porque } \sum_{k\geq 1} \overline{f(s_k)}E(s_i)E(s_k) = \overline{f(s_i)}\, E(s_i)^2$$

luego el operador V es normal. Q.E.D.

Así, podemos obtener el conocido teor. de descomposición espectral de operadores normales compactos, con polos simples ([7], pág. 207).

TEOREMA 4

Sea $T\in L(X)$ normal compacto, X Hilbert. Sea $\sigma(T) =\{0\}\cup\{s_i, i\in N, i\leqslant 1\}$ y supongamos que para cada $i\geqslant 1$, s_i es polo simple de T. Entonces si Ω es un abierto tal que $\sigma(T)\subset\Omega$ y $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ con $f(0) = 0$, se verifica $f(T) = \sum_{i\geq 1} f(s_i)E(s_i)$.

Demostración: Por ser T normal y por el ter. espectral de operadores normales en espacios de Hilbert, pág. 895, [3], existe una medida espectral autoadjunta $E_1 : \mathfrak{B}(\sigma(T)) \longrightarrow L(X)$, siendo $\mathfrak{B}(\sigma(T))$ la familia de los conjuntos de Borel de $\sigma(T)$, y verificando para cada $g\in C(\sigma(T))$ la relación

$$g(T) = \int_{\sigma(T)} g(s)\, E_1(ds) \tag{13}$$

Por el corol. IX.3.15, pág. 879, [3], si $g\in\mathcal{H}(\Omega)$ se tiene

$$g(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(s)\, R(s, T)\, ds = \int_{\sigma(T)} g(s)E_1(ds),$$

siendo γ un ciclo que contornea $\sigma(T)$. Sea $g = e_{s_i}$ la función definida en un abierto $V\cup W\supset\sigma(T)$, tal que V es un entorno abierto de s_i, y W es un entorno de $K = \sigma(T)\sim\{s_i\}$, tal que $V\cap W = \phi$.

Entonces se tiene que

$$g(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma(T)} g(s)\, R(\mathrm{s}, \mathrm{T})\, ds = E(s_i),$$

por el cálculo funcional holomorfo (Pág. 568, [3]). Por la existencia de la medida espectral citada, tenemos también que

$$g(T) = \int_{\sigma(T)} g(s)E_1(ds),$$

porque E_1 es una medida con soporte $\sigma(T)$, y g restringida a $\sigma(T)$ es la función característica del conjunto s_i . Así tenemos que para cada s_i se verifica $E(s_i) = E_1(s_i)$, y, en particular que $E(s_i) = E(s_i)^*$. Por el teor. 3, la serie de operadores

$$\sum_{i\geqslant 1} f(s_i)\, E(s_i)$$

converge en $\|\ \|$ de $L(X)$. Por ser los polos de s_i simples, y por el teor. 1, considerando el conjunto espectral $\sigma_n = \{s_1, s_2, \dots .s_n\}$, se tiene que

$$f(T)_{|_{\sigma_n}} = f(T)\, E_1(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)E(s_i)$$

Sea $F_i = E(s_i)(X)$, entonces tenemos que

$$f(T)|_{\overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i} = \sum_{i\geqslant 1}^{n} f(s_i)E(s_i), \text{ para cada } n \geqslant 1.$$

Sea $F_i = Cl(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i)$, entonces por ser $f(T)$ acotado, se tiene que

$$f(T)_{|_M} = \sum_{i\geqslant 1} f(s_i)E(s_i)$$

Por ser T normal compacto, y por el corol. X.4.5, pág. 905, [3], T admite una base ortogonal de vectores propios, y por tanto, que $M = X$. En consecuencia se tiene $f(T) = \sum_{i\geqslant 1} f((s_i)E(s_i)$.

COROLARIO

Sea X espacio de Hilbert, $T \in L(X)$ compacto, tal que $T = T^*$ y $\sigma(T) = \{0\} \cup \{s_i,\ i \geqslant 1\}$. Si Ω es un abierto con $\sigma(T) \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(0) = 0$, entonces se verifica

$$f(T)_{|_M} = \sum_{i\geqslant 1} f(s_i)\, E(s_i)$$

y define un operador normal compacto.

Demostración: Por el teor. 4, tenemos que $f(T) = \sum_{i\geqslant 1} f(s_i)\, E(s_i)$, porque al ser $T = T^*$, los polos s_i son simples, según vimos en el corol. 2 del teor. 1. Además $f(T)$ es compacto, por ser límite en norma de operadores de rango finito, como lo son las sumas parciales de la serie que define $f(T)$, por ser cada proyección de rango finito. Q.E.D.

LEMA 3

Sea S un espacio topológico compacto, $E: \mathfrak{B}(s) \longrightarrow L(X)$ función de conjuntos acotada, finitamente aditiva y regular que verifica la condición

$$\int_S f(s)\, E(ds) = 0, \quad \forall f \in C(S) \tag{14}$$

siendo X Banach. Entonces para cada $\delta \in \mathfrak{B}(S)$ se tiene $E(\delta) = 0$

Demostración: Para cada $x \in X$, $x^* \in X'$, la función de conjuntos $x^*E(\cdot)x$, es regular. Por (14) se tiene que

$$x^*\left[\int_S f(s)E(ds)\right]x = \int_S f(s)x^*E(ds)x = 0,$$

para cada $f \in C(S)$. Por IV. 6.2 pág. 262, [3], se tiene que $x^*E(\delta)x = 0$ para todo conjunto de Borel δ en S, y para todo $x \in X$, $x^* \in X'$. Por II.3.15, pág. 65, [3] el operador $E(\delta) = 0$. Q.E.D.

LEMA 4.

Sea Σ un anillo de conjuntos de un espacio topológico S, X espacio de Banach y $E\colon \Sigma \longrightarrow L(X)$ una función de conjuntos acotada y finitamente aditiva. Sean $f,g \in B(S,\Sigma)$ y $\mu\colon\Sigma \longrightarrow L(X)$ definida por $\mu(\delta) = \int_S f(s)E(ds\cap\delta)$, entonces se verifica

$$\int_S g(t)\int_S f(s)E(ds\cap dt) = \int_S g(t)f(s)E(dt) \tag{15}$$

Demostración: Sea $\delta \in \Sigma$ fijo, y sean las funciones de conjuntos μ_1 y μ_2 definidas para cada $\sigma \in \Sigma$, por las relaciones

$$\mu_1(\sigma) = E(\sigma\cap\delta), \int_S \mu_2(\sigma) = g(t)E(dt)$$

Sean

$$\int_S f(s)\, d\mu_1(s) = \int_S f(s)E(ds\cap\delta), \int_S f(s)\, d\mu_2(s) = \int_S f(s)\int_S g(t)E(dt)$$

Si

$$f = \chi_\delta, \int_S g(t)\, d\mu(t) = \int_S g(t)\int_S \chi_\delta(s)E(ds\cap dt) = \int_S g(t)E(dt\cap\delta) =$$
$$= \int_S g(t)\,\chi_\delta(t)E(dt) = \int_S g(t)f(t)E(dt) \tag{16}$$

Para $g \in B(S, \Sigma)$, ambos miembros de (16) son funciones lineales continuas de $f \in B(S, \Sigma)$, y así, por linealidad se verifica (15) para funciones simples y por continuidad, para cualquier $f \in B(S, \Sigma)$.

TEOREMA 5.

Sea X espacio de Hilbert, $T \in L(X)$, y supongamos que T verifica las condiciones siguientes:

(a) Para todo polinomio $p \in \mathcal{P}$, se tiene que $r(p(T) = \|p(T)\|$

(b) Si $\mathcal{L} = Cl_{C(\sigma(T))}\,\{p = p(s); s \in \sigma(T)\}$, es subálgebra complementada de $C(\sigma(T))$.

Entonces si denotamos $S = \sigma(T)$, existe $E\colon \mathfrak{B}(S) \longrightarrow L(X)$ medida espectral, que verifica:

(I) Para todo $x,y \in X$, la función de conjuntos $\delta \longrightarrow (E(\delta)x,y)$ definida en $\mathfrak{B}(S)$ es medida regular numerablemente aditiva.

(II) Para cada $\delta \in \mathfrak{B}(S)$, se tiene $T \cdot E(\delta) = E(\delta) \cdot T$.

(III) Para $f \in C(S)$, se verifica $f(T) = \int_S f(s)E(ds)$

Demostración: Sea $\mathfrak{A} = Cl_{L(T)} \langle T, I \rangle$ subálgebra conmutativa y cerrada de $L(X)$ y sea $\Gamma\colon \quad \longrightarrow C(S)$, la transformada de Gel'fand. Por hipótesis (a), se tiene que $r(p(T)) = \|p(T)\|$, $Vp \in \mathfrak{T}$ y por las propiedades de la transformada de Gel'fand, teor. 52.13, pág. 223, [2], tenemos que

$$\| \Gamma(p(T)) \| = r(p(T)) \tag{17}$$

De (17) y (a), se tiene que Γ es isometría de álgebras al restringirla a (T). Por continuidad de la norma y de la transformada, Γ es isometría también en $\mathcal{L}$.

Sea $\varphi = \Gamma^{-1}_{|\mathcal{L}} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathfrak{A}$, la inversa de Γ; por la hipótesis (b), existe $P\colon C(S) \longrightarrow \mathcal{L}$, proyección de álgebras, es decir, tal que para $f,g \in C(S)$, se tiene $P(f \cdot g) = P(f) \cdot P(g)$. Sea también $\psi = \Gamma^{-1}_{|\mathcal{L}} \cdot P\colon C(S) \longrightarrow \mathfrak{A}$, y sean $x,y \in X$. El funcional $\psi_{x,y}(f) = (\psi(f)x,y)$, con $f \in C(S)$ y $\psi_{x,y}\colon C(S) \rightarrow$ $\rightarrow C$, es contínuo y por el teor. 2, pág. 262, [1], determina de forma única una medida regular $\mu(\cdot,x,y)$ definida en $\mathfrak{B}(S)$, tal que

$$\begin{tikzcd} C(S) \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathcal{L} \arrow[d, "\Gamma^{-1}_{|\mathcal{L}}"] \\ & \mathfrak{A} \end{tikzcd}$$

$$(\psi(f)x, y) = \int_S f(s)\, \mu(ds,x,y) \tag{18}$$

$$|\mu(\delta,x,y)| \leqslant v(\mu(\cdot,x,y), \delta) \leqslant \| \psi \| \, \| x \| \, \| y \| \tag{19}$$

para cada $\delta \in \mathfrak{B}(S)$. Puesto que $\mu(\cdot,x,y)$ está determinada unívocamente por el funcional $\psi_{x,y}$, verificando $(\psi(f)(\alpha x), y) = \alpha(\psi(f)x, y)$, $\alpha \in C$, se deduce que

$$\int_S f(s)\, \mu(ds,x,y) = \int_S f(s)\, \alpha\, \mu(ds,x,y),$$

$$\mu(\delta, \alpha x, y) = \alpha\, \mu(\delta, x, y), \quad \forall \delta \in \mathfrak{B}(S)$$

Análogamente $\mu(\delta, x, \beta y) = \bar{\beta}\, \mu(\delta, x, y)$, $\beta \in C$, por las propiedades del producto escalar. En consecuencia, se deduce que $\forall \delta \in \mathfrak{B}(S)$ fijo, la aplicación definida para $x,y \in X$, por $(x, y) \longrightarrow \mu(\delta, x, y)$, es un funcional bilineal contínuo. Por el teor. 1, pág. 39, [5], existe un operador y sólo uno $E(\delta)$ tal que

$$\mu(\delta, x,y) = (E(\delta)x, y)$$

$$\| E(\delta) \| = \sup\{ |(E(\delta)x, y)|; \ \| x \| = 1, \ \| y \| = 1\}$$

Por (19) y por ser $\|\psi\| \leqslant \|P\|$, tenemos

$$|(E(\delta)x, y)| = |\mu(\delta, x, y)| \leqslant \|\psi\| \, \|x\| \, \|y\| \leqslant \|P\|$$

y de aquí $\|E(\delta)\| \leqslant \|P\|$. Se verifica que

$$(\psi(f)x, y) = \int f(s) \, \mu(ds, x,y) = \int f(s) E(ds, x, y)$$

y por el teor. de Hahn–Banach, pág. 111 de [2], se deduce que

$$\psi(f) = \int f(s)E(ds) = \hat{f(T)} \tag{20}$$

Veamos que la medida es espectral, es decir que $E(\delta)E(\sigma) = E(\delta \cap \sigma)$ Sean $f,g \in C(S)$. Por el lema 4, se tiene que

$$\int_S f(s) \int_S g(s)E(dt \cap ds) = \int_S f(s) \int_S g(t)E(dt) = \int_S f(s)g(s)E(ds) \tag{21}$$

Por (20) y por ser ψ homomorfismo de álgebras, tenemos que

$$\int_S f(s)g(s)E(ds) = \psi(f \cdot g) = \psi(f) \cdot \psi(g) = \int_S f(s) \int_S g(t)E(dt)E(ds) \tag{22}$$

Sea ahora $g \in C(S)$ fijada. Por (22) y por el lema 3, al ser $\|E(\delta)\| \leqslant \|P\|$, se tiene que

$$\int_S g(t)E(dt \cap \delta) = \int_S g(t)E(dt)E(\delta), \quad \delta \in \mathfrak{B}(S)$$

Por el lema (3) de nuevo, se deduce que $E(\sigma \cap \delta) = E(\sigma) \cdot E(\delta)$ (23)

Veamos que $f(T)E(\delta) = E(\delta)f(T)$, $\forall f \in C(S)$, siendo $\psi(f) = f(T)$.

$$f(T)E(\delta) = \left[\int_S f(s)E(ds)\right] E(\delta) = \int_S f(s)E(ds)E(\delta) = (\text{Por } (23)) =$$
$$= \int_S f(s)E(\delta)E(ds) = \mathrm{E}(\delta) \int_S f(s)E(ds) = E(\delta) \cdot f(T). \text{ Q.E.D.}$$

COROLARIO

Sea $T \in L(X)$ subnormal, tal que $\mathrm{int}(\sigma(T)) = \phi$ y $C \sim \sigma(T)$ conexo, X espacio de Hilbert. Entonces existe una y sólo una medida espectral E que verifica las condiciones del teorema.

Demostración: Si T es subnormal, entonces, $\forall p \in \mathfrak{T}$, el operador $p(T)$ es subnormal y por tanto hyponormal, pág. 104, [6], y por el probl. 162, de [6], pág. 106, la hipótesis (*a*) del teorema se verifica. Por la hipótesis del corol., y por el teor. de Mergelyan, pág. 423, [1], se tiene que $\mathcal{L} = C(S)$, y así, la única proyección de álgebras de $C(S)$ sobre $\mathcal{L}$ es la identidad, y además, en este caso $\|E(\delta)\| = 1$. Q.E.D.

Si T es normal, entonces las hipótesis (*a*) y (*b*) del teor. se verifican, siendo en este caso la medida espectral autoadjunta, teor. 1, pág. 895, [3].

COROLARIO 2.

Sea X Hilbert, $T \in L(X)$ normal, con $\sigma(T) = \{0\} \cup \{s_n, n \geqslant 1\}$, de modo que

$$|s_1| \geqslant |s_2| \geqslant \ldots \geqslant |s_n| \geqslant \ldots$$

Sea $f \in C(\sigma(T)), f(0) = 0$. Entonces se tiene que $f(T) = \sum_{i \geqslant 1} f(s_i)E(s_i)$.

Demostración: Por el teor. espectral para operadores normales, existe una y sólo una medida espectral autoadjunta E, que verifica $\forall g \in C(S)$

$$g(T) = \int_S g(s)E(ds), \quad \forall \delta \in \mathfrak{B}(S), \quad E(\delta) = E(\delta)^*$$

Por el desarrollo de la prueba del teor. 3, la serie $\sum_{i \geqslant 1} f(s_i)E(s_i)$ converge en $\| \ \|$ de $L(X)$.

Dada la función f, sean $\forall n \geqslant 1$

$$f_n(s) = \begin{cases} f(s), & s \in \{s_1, s_2, \ldots, s_n\} = S_n \\ 0, & s \in S \sim S_n \end{cases}$$

Es claro que $f_n \in C(S)$ y que la sucesión $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ converge puntualmente a f en S, verificando $|f_n(s)| \leqslant |f(s)|$, $\forall s \in S$.

Sean $x,y \in X$ fijos, por el teor. 7, pág. 124, [3], aplicado a la medida compleja $(E(\cdot)x, y)$ tenemos que

$$\int_S f(s)(E(ds)x, y) = \lim_{n \to \infty} \int_S f_n(s)(E(ds)x, y) \tag{24}$$

Por ser f_n una función simple tenemos que

$$\int_S f_n(s)(E(ds)x, y) = \sum_{i \geqslant 1} f(s_i)(E(s_i)x, y)$$

De (24) se tiene

$$\int_S f(s)(E(ds)x, y) = \sum_{i \geqslant 1} f(s_i)(E(s_i)x, y),$$

es decir, que la serie $\sum_{i \geqslant 1} f(s_i)E(s_i)$ converge a $f(T)$ en la topología operador débil, y por converger en norma en $L(X)$, se tiene $f(T) = \sum_{i \geqslant 1} f(s_i)E(s_i)$. Q.E.D.

REFERENCIAS

[1] RUDIN, W.: Real and complex analysis. MnGraw-Hill (1978).

[2] BERBERIAN, S. K.: Lectures on functional analysis and operator theory. Springr, G. T, M. New York (1974).

[3] DUNDFORD-SCHWARTZ.: Linear Operators, Vol. I y II Interscience Pub. Co., New. York (1963).

[4] CONWAY, J. B. AND OLIN, R. F.. A functional calculu for subnormal operators II Memoirs A. M. S., Vol 1o. Number 184. (1977).

[5] HALMOS, P. R.: Introduction to Hilbert Space., Chelsea Publishng Company, New York (1972).

[6] HALMOS, P. R.. A Hilbert Space Problem Book., Van Nostrand Co., Princeton (1967).

[7] HELMBERG, G.. Introduction to spectral theory in Hilbert space. North-holland (1969).