El espacio QBU (1)

por R. SIVERA VILLANUEVA

Recibido: 19 enero 1983

Presentado por el académico de número Manuel Valdivia Ureña

ABSTRACT

In this note we prove several properties of the infinite loop space $QBU(1)$. In the first paragraph, we look for a relation with the classifying space of the groups $\Sigma_n \int U(1)$, finding that $B\Sigma_n \int U(1)$ has the homotopy type of $F(\mathbb{R}^\infty, n) x_{\Sigma_n} BU(1)^n$.

In the second paragraph we get two stable decompositions of $QBU(1)$ namely

$$1)\ QBU(1) \simeq \bigvee_{n=1}^{\infty} \frac{B\Sigma_n \int U(1)}{B\Sigma_{n-1} \int U(1)}$$

$$2)\ QBU(1) \simeq \bigvee_{n=1}^{\infty} T\gamma^{(n)}$$

Resumen

En esta nota se prueban varias propiedades del espacio de lazos infinitos $QBU(1)$. En el primer apartado se relaciona con los espacios clasificantes de los grupos $\Sigma_n \int U(1)$, hallado que $B\Sigma_n \int U(1)$ tiene el tipo de homtopía de $F(\mathbb{R}^\infty, n) x_{\Sigma_n} BU(1)^n$.

En el segundo se obtienen dos descomposiciones de $QBU(1)$ salvo homotopía estables

$$1)\ QBU(1) \simeq \bigvee_{n=1}^{\infty} \frac{B\Sigma_n \int U(1)}{B\Sigma_{n-1} \int U(1)}$$

$$2)\ QBU(1) \simeq \bigvee_{n=1}^{\infty} T\gamma^{(n)}$$

1. INTRODUCCION

Sea X un espacio topológico punteado. Se denota por ΣX su suspensión y por ΩX el espacio de lazos sobre él. Es conocido que ambos son funtores adjuntos, por lo que para todo espacio X existe una aplicación $X \longrightarrow \Omega\Sigma X$ que es la adjunta de la inclusión.

Se define como QX el límite inductivo de los espacios $\Omega^n\Sigma^nX$ con respecto a las aplicaciones

$$\Sigma^n\Sigma^nX \longrightarrow \Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X$$

dadas por la aplicación

$$\Sigma^nX \longrightarrow \Omega\Sigma(\Sigma^nX)$$

definida arriba.

El objetivo de esta nota es estudiar ciertas propiedades del espacio QBU(1) que se ha demostrado de gran interés ([5]), [7], [8]) Recuérdese que $BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$ es el espacio proyectivo infinito.

1. RELACION CON $B\Sigma_\infty \int U(1)$

En este apartado se sustituye el espacio $QBU(1)$ por el espacio filtrado $F(\mathbb{R}^\infty)(BU(1))$ ya que tienen el mismo tipo de homotopía débil ([2]) y se relaciona su filtración n-ésima $F_n(F(\mathbb{R}^\infty))(BU(1))$ con los espacios clasificantes de ciertos grupos $B\Sigma_n\int U(1)$.

Se comienza con breve repaso de la notación y resultados generales usados.

Un sistemas de coeficientes $\mathscr{C}$ viene dado por una sucesión de espacios $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $\mathscr{C}_0$ es contractible, una acción del grupo simétrico Σ_n sobre $\mathscr{C}_n$ y aplicaciones de degeneración $\sigma_{q,n}:\mathscr{C}_n \longrightarrow \mathscr{C}_{n-1}$, $1 \leqslant q \leqslant n$.

Obviamente, todas las operadas en el sentido de [4] son sistemas de coeficientes. Además existen varios sistemas de coeficientes de interés, siendo particularmente importante para este trabajo el sistema de coeficientes $\mathscr{F}(\mathbb{R}^\infty)$ de configuraciones de puntos en $\mathbb{R}^\infty$ que se define a continuación:

La sucesión de espacios viene dada por n-tuplas de puntos distintos

$$\mathscr{F}(\mathbb{R}^\infty)_n = F(\mathbb{R}^\infty, n) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}^\infty)^n : x_i \neq x_j \text{ para todo } i \neq j\}$$

Es conocido que para todo *n, $F(\mathbb{R}^\infty, n)$, es contractible* ([3]).

La acción de Σ_n

$$\psi: \Sigma_n \times F(\mathbb{R}^\infty, n) \longrightarrow F(F(\mathbb{R}^\infty, n))$$

se define por la fórmula $\psi(\sigma,(x_1,\ldots,x_n)) = (x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$.

Igualmente las aplicaciones de degeneración

$$\sigma_{q,n}: F(\mathbb{R}^\infty, n) \longrightarrow F(\mathbb{R}^\infty, n-1)$$

se definen como $\sigma_{q,n}(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$.

Para todo sistema de coeficientes $\mathscr{C}$, se define el espacio

$$cX = \frac{\coprod_{n \geqslant 0} \mathscr{C}_n \times_{\Sigma_n} X^n}{\sim}$$

donde la relación $\sim$ está generada por las aplicaciones de degeneración. Sobre cX se define la topología cociente de la reunión disjunta.

Considerando

$$F_n cX = \mathrm{Im}\,\Big(\coprod_{n=0}^{n} \mathscr{C}_r \times_{\Sigma_r} X^r \longrightarrow cX\Big)$$

se obtiene una filtración natural sobre cX siendo la topología de cX el límite inductivo de las topologías sobre $F_n cX$.

En [2] se prueba que para cualquier sistema de coeficientes separado, $\mathscr{C}$, y para cualquier espacio conexo por arcos, X, el espacio cX tiene el tipo de homotopía débil del espacio QX. Por tanto $QBU(1)$ tiene el tipo de homotopía débil del espacio $F(\mathbb{R}^\infty)(BU(1))$. Vamos a tratar de identificar los espacios $F_n(F(\mathbb{R}^\infty))(BU(1))$ en función de los espacios clasificantes de ciertos grupos $\Sigma_n \int U(1)$.

Definición.— Sea G un grupo, se define $\Sigma_n \int G$ como el grupo de matrices $n \times n$ con elementos en G de forma que sólo hay un elemento distinto de cero en cada fila o columna. La ley de composición viene dada por el producto de matrices y el producto en G.

En particular, si $G = U(1)$ hay una obvia inclusión de $\Sigma_n \int U(1)$, usándola se interpretan los elementos de $\Sigma_n \int U(1)$ como las aplicaciónes unitarias cuya acción consiste en permutar los elementos de la base canónica de $\mathbb{C}^n$ multiplicando cada uno de ellos por un número complejo de módulo uno.

Entonces se define

$$B\Sigma_n \int U(1) = \frac{U(n, \infty)}{\Sigma_n \int U(1) \times U(\infty)} = \text{lím.}\ \frac{U(n, k)}{U(n) \times U(k)}$$

donde $U(n, k)$ es conjunto de automorfismo unitarios de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$.Como se vio en [6] se puede definir

$$BU(n) = \frac{U(n, \infty)}{U(n) \times U(\infty)} = \text{lím}\ \frac{U(n, k)}{U(n) \times U(k)}$$

y el limite de las proyecciones

$$\frac{U(n, k)}{\Sigma_n \int U(1) \times U(k)} \longrightarrow \frac{U(n, k)}{U(n) \times U(k)}$$

da la aplicación

$$p_n \colon B\Sigma_n \int U(1) \longrightarrow BU(n)$$

que obviamente es una fibración de fibra $U(n)/\Sigma_n \int U(1)$.

Teorema.– $B\Sigma_n \int U(1)$ es un espacio clasificante de fibrados principales con grupo estructural $\Sigma_n \int U(1)$.

Demostración.– $EU(n)$ el espacio total del fibrado universal sobre $BU(n)$. Con la definición dada, $B\Sigma_n \int U(1)$ es el cociente de $EU(n)$ respecto a la acción de $\Sigma_n \int U(1)$ sobre él dada por la inclusión de $\Sigma_n \int U(1)$ en $U(n)$ y la acción de este sobre $EU(n)$.

Como $EU(n)$ es contractible y la acción de $\Sigma_n \int U(1)$ sobre él es libre, el cociente debe ser un espacio clasificante de los fibrados principales con grupos $\Sigma^n \beta\, U(1)$ [6].

Sea

$$q_n : F(\mathbb{R}^\infty, n)\, x_{\Sigma_n}\ BU(1)^n \longrightarrow B(\Sigma_n \int U(1))$$

una aplicación clasificante del fibrado ξ con grupo estructural $\Sigma_n U(1)$ dado por la aplicación cociente

$$p_\xi : F(\mathbb{R}^\infty, n) \times EU(1)^n \longrightarrow F(\mathbb{R}^\infty, n)\, x_{\Sigma_n} BU(1)^n$$

Entonces se tiene

Propiedad.– La aplicación q_n es una equivalencia de homotopía.

Demostración.– Ya que tanto $EU(1)$ como $F(\mathbb{R}^\infty, n)$ son contractibles, $F(\mathbb{R}^\infty, n)\ x\ EU(1)^n$ es contractible. Asimismo la acción de $\Sigma_n \int U(1)$ es libre, por lo que el espacio cociente $F(\mathbb{R}^\infty, n)\, x_{\Sigma_n}\, BU(1)^n$ es un espacio clasificante para fibrados principales con grupo estructural $\Sigma_n \int U(1)$ y el fibrado ξ es el fibrado universal asociado ([6]) luego la aplicación que lo clasifica tiene que ser una equivalencia de homotopía.

Usando la inclusión $\Sigma_{n-1} \int U(1) \subset \Sigma_n \int (1)$ inducida por la inclusión $U(n-1) \subset U(n)$ se obtiene la aplicación

$$Bi_{n-1} : B\Sigma_{n-1} \int U(1) \longrightarrow B\Sigma_n \int U(1)$$

como límite de las inclusiones

$$\frac{U(n-1, k)}{\Sigma_{n-1} \int U(1) \times U(x)} \longrightarrow \frac{U(n, k)}{\Sigma_n \int U(1) \times U(k)}$$

Las aplicaciones Bi_{n-1} conmutan con las q_n en el sentido de la siguiente

Propiedad.– El diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbb{R}^\infty, n)\, x_{\Sigma_n}\, BU(1)^n \arrow[r, "q_n"] & B(\Sigma_n \int U(1)) \\
F(\mathbb{R}^\infty, n-1) x_{\Sigma_{n-1}} BU(1)^{n-1} \arrow[r, "q_{n-1}"'] \arrow[u, "i_n"] & B(\Sigma_{n-1} \int U(1)) \arrow[u, "Bi_n"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde la aplicación i_n está dada por una inclusión de $F(\mathbb{R}^\infty, n-1)$en $F(\mathbb{R}^\infty, n)$ equivariante con respecto a la acción de Σ_{n-1}.

Demostración.– Es inmediata ya que el fibrado principal con grupo $\Sigma_n \int U(1)$ clasificado por la aplicación $q_n \cdot i_n$ admite una reducción al pull-back del fibrado principal universal con grupo $\Sigma_{n-1} \int U(1)$ mediante q_{n-1}.

Por lo tanto inductivamente escogemos aplicaciones

$$q_n : B(\Sigma_n \int U(1)) \longrightarrow F(\mathbb{R}^\infty, n)\, x_{\Sigma_n}\, BU(1)^n$$

que son inversas homotópicas de q_n y conmutan el diagrama de la propiedad anterior.

Con ello, las aplicaciones j_n definidas como la composición

$$B(\Sigma_n \int U(1)) \xrightarrow{q_n} F(\mathbb{R}^\infty, n) x_{\Sigma_n}\; BU(1)^n \longrightarrow F_n(F(\mathbb{R}^\infty)(BU(1)))$$

hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
B(\Sigma_n \int U(1)) \arrow[r, "j_n"] & F_n(F(\mathbb{R}^\infty)(BU(1))) \\
B(\Sigma_{n-1} \int U(1)) \arrow[u, "Bi_n"] \arrow[r, "j_{n-1}"'] & F_{n-1}(F(\mathbb{R}^\infty)(BU(1))) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

dando en el límite una aplicación

$$i_\infty : B\Sigma_\infty\; U(1) \longrightarrow F(\mathbb{R}^\infty)(BU(1))$$

2. DESCOMPOSICION DEL ESPACIO $QBU(1)$

Para todo espacio topológico X, se define su espectro de suspensión $\Sigma^\infty X$ y se llaman aplicaciones estables entre dos espacios, a las aplicaciones entre los espectros de sucesión asociados [1].

Sea X un espacio topológico y $\mathscr{C}$ un sistema de coeficientes. Se define

$$D_n(\mathscr{C}, X) = \frac{F_n cX}{F_{n-1}\, cX}$$

Para todo sistema de coeficientes separado (en particular para $F(\mathbb{R}^\infty)$) y para todo X conexo por arcos, Cohen, May y Taylor en [2] probaron que $F_n cX$ tiene el tipo de homotopía estable de $\bigvee_{k=1}^{\infty} D_k(\mathscr{C}, X)$ para todo n.

En partitcular, si $D_k(X)=D_k(\mathcal{F}(\mathbb{R}^\infty), X)$ se tiene

$$QX \cong \mathcal{F}(\mathbb{R}^\infty)(X) \cong \bigvee_{k=1}^{\infty} D_k(X)$$

El objetivo de este apartado es identificar $D_k(BU(1))$ con dos nuevos espacios, con lo que se obtiene dos nuevas descomposiciones del espacio $QBU(1)$.

Definición.– Sea X un espacio topológico punteado. Se define el subespacio de X^n

$$\sigma_n(X) = \bigcup_{i=1}^{n} X^{i-1} \times \{*\} \times X^{n-1}$$

La acción de Σ_n sobre X^n dada por permutación de factores induce una acción sobre $\sigma_n(X)$ y se tiene

Propiedad.– El espacio $D_n(\mathcal{C}, X)$ es homeomorfo al cociente

$$\frac{\mathcal{C}_n \, x_{\Sigma_n} X^n}{\mathcal{C}_n \, x_{\Sigma_n} \sigma_n(X)}$$

Demostración.– La aplicación

$$\mathcal{C}_n x_{\Sigma_n} X_n \longrightarrow F_n\, cX \longrightarrow D_n(\mathcal{C}, X)$$

envia todo $\mathcal{C}_n \, x_{\Sigma_n} \, \sigma_n(X)$ sobre el punto base de $D_n(\mathcal{C}, X)$, induciendo, por tanto, una aplicación

$$\frac{\mathcal{C}_n \, x_{\Sigma_n} X^n}{\mathcal{C}_n \, x_{\Sigma_n} \sigma_n(X)} \longrightarrow D_n(\mathcal{C}, X)$$

la cual es obviamente un homomorfismo.

Sea

$$q'_{n-1}: F(\mathbb{R}^\infty, n)\, x_{\Sigma_n} \sigma_n(BU(1)) \longrightarrow B(\Sigma_n \int U(1))$$

la aplicación clasificante del fibrado

$$\zeta: F(\mathbb{R}^\infty, n) \times \sigma_n(EU(1)) \longrightarrow F(\mathbb{R}^\infty, n)\, x_{\Sigma_n} \sigma_n(BU(1)).$$

Se verifica

Propiedad.– q'_{n-1} es una equivalencia de homotopía.

Demostración.— Como en el caso de q_n, basta ver que ζ es un fibrado universal con grupo $\Sigma_n \int (1)$.Lo cual se cumple por ser $F(\mathbb{R}^\infty, n) \times \sigma_n(EU(1))$ contractible y con una acción libre de $\Sigma_n \int U(1)$.

Asimismo se cumple

Propiedad.— El diagrama

$$\begin{array}{ccc}
F(\mathbb{R}^\infty, n) \times_\Sigma \ \sigma_n(BUU(1)) & \longrightarrow & B(\Sigma_{n-1} \int U(1)) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow Bi_n \\
F(\mathbb{R}^\infty, n) \times_{\Sigma_n} \ BU(1)^n & \xrightarrow{\quad q_n \quad} & B(\Sigma_n \int U(1))
\end{array}$$

es conmutativo salvo homotopía.

La demostración es inmediata ya que ambas composiciones clasifican el mismo fibrado.

Corolario.— $D_n(BU(1))$ es del mismo tipo de homotopía que

$$\frac{B(\Sigma_n \int U(1))}{B(\Sigma_{n-1} \int U(1))} \ .$$

Nota.— Por lo tanto se obtiene la descomposición, salvo homotopía estable

$$QBU(1) \simeq \bigvee_{n=1}^{\infty} \frac{B(\Sigma_n \int U(1))}{B(\Sigma_{n-1} \int U(1))}$$

Se denota por $X^{(n)}$ el espacio $\bigwedge_1^n X$ producto reducido de X por si mismo n veces.

Propiedad.— $D_n\,(\mathscr{C}, X)$ es homeomorfo al cociente

$$\frac{\mathscr{C}_n \times_{\Sigma_n} X^{(n)}}{\mathscr{C}_n \times_{\Sigma_n} \{*\}}$$

Demostración.— La aplicación

$$\mathscr{C}_n \times_{\Sigma_n} X^n \longrightarrow \mathscr{C}_n \times_{\Sigma_n} X^{(n)}$$

induce un homeomorfismo

$$\frac{\mathscr{C}_n \times_{\Sigma_n} X^n}{\mathscr{C}_n \times_{\Sigma_n} \sigma_n(X)} \longrightarrow \frac{\mathscr{C}_n \times_{\Sigma_n} X^{(n)}}{\mathscr{C}_n \times_{\Sigma_n} \{*\}}$$

y el primer espacio ya se probó con anterioridad que es homeomorfo a $D_n(\mathscr{C}, X)$.

Teorema.– Si $X = T(\xi)$ es el espacio de Thon del fibrado ξ, $D_k(X)$ es homeomorfo al espacio de Thom del fibrado

$$\xi^{(k)} = F(\mathbb{R}^\infty, k)\, x_{\Sigma_k} \xi^k \ \cdot$$

Demostración.– Sea una métrica de Riemann en ξ y sea $D(\xi)$, $S(\xi)$ los fibrados disco y esfera asociados.

Sobre $\xi^{(k)}$ se dota la métrica de Riemann inducida por la de ξ. Con Respecto a ella se tiene

$$D(\xi^{(k)}) = F(\mathbb{R}^\infty, k)\, x_{\Sigma_k} D(\xi)^k$$

$$S(\xi^{(k)}) = F(\mathbb{R}^\infty, k)\, x_{\Sigma_k} \left(\bigcup_{i=1}^{k} D(\xi)^{i-1} \times S(\xi) \times D(\xi)^{k-i} \right) \cdot$$

Como en la propiedad anterior, la aplicación

$$F(\mathbb{R}^\infty, k)\, x_{\Sigma_k} D(\xi)^k \longrightarrow \frac{F(\mathbb{R}^\infty, k) x_{\Sigma_k}\ T(\xi)^k}{F(\mathbb{R}^\infty, k) x_{\Sigma_k} \{*\}} = D_k(T(\xi))$$

induce el homeomorfismo entre $T(\xi^{(k)})$ y $D_k(T(\xi))$ $\cdot$

Sea γ el fibrado universal sobre $BU(1)$.

Corolario.– $D_k(BU(1))$ tiene el tipo de homotopía de $T(\gamma^{(k)})$.

Demostración. $BU(1)$ tiene el tipo de homotopía de $T(\gamma)$[1], por lo que $D_k(BU(1))$ tiene el tipo de homotopía de $D_k(T(\gamma))$ que por la propiedad anterior es $T(\gamma^{(k)})$.

Nota.– Asímismo, salvo homotopía estable. obtenemos

$$QBU(1) \simeq \bigvee_{k=1}^{\infty} T\gamma^{(k)}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] ADAMS, J. F.: "Stable homotopy and generalised homology" Chicago Lectures Notes in Mahematics. Chicago U. P. (1974)

[2] COHEN, F. R., MAY J. P. AND TAYLOR L. : "The splitting of certain spaces cX" *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 84:465-496 (1978).

[3] FADELL E. AND NEUWIRTH L.: "Configutation spaces" *Math. Scand.* 10:111-118 (1962).

[4] MAY, J. P.: "The geometry of iterated loop spaces' *Lectures Notes in Math.* 271, Springer Verlag (1972).

[5] SEGAL, G.: "The stable homotopy of complex proyective space" *Quart. Jour. of Mat.* 24: 1-5 (1973).

[6] SIVERA R.. "The geometry of the map $\eta: QBU(1) \longrightarrow BU$" *Ph. D. Thesis Warwick* (1981).

[7] SIVERA, R. : "A geometric interpretation of the Chern classes". *Trans.Amer.Math.Soc.* 276: 193-200 (1983).

[8] SNAITH, V. P.: "Algebraic cobordism and K-theory" Memoirs *Amer. Math. Soc.* 221 (1979).

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad de Valencia