# *Una nota sobre espacios angélicos*

Por DOMINGO GARCÍA RODRÍGUEZ

Recibido: 8 noviembre 1982

*Presentado por el académico numerario Manuel Valdivia*


## Abstract

In this article some results on compactness and completeness are extended to locally convex spaces whose weak dual is angelic.

## Resumen

En este artículo algunos resultados sobre compacidad y completitud son extendidos a espacios localmente convexos cuyo dual débil sea angélico.


Los espacios vectoriales que utilizamos aquí están definidos sobre el cuerpo de los números reales o complejos. Todos los espacios topológicos que usaremos serán de Hausdorff. En lo que sigue, emplearemos el término «espacio» para referirnos a «espacio localmente convexo», a menos que se indique específicamente el tipo de espacio. Si $E$ es un espacio, denotamos por $E'$ su dual topológico y por $E^*$ su dual algebraico. Consideramos $E$ sumergido en su bidual $E''$. Dado un par dual $\langle E, F\rangle$, representamos por $\sigma(E, F)$ y $\beta(E, F)$ las topologías en $E$ débil y fuerte, respectivamente. Para un subconjunto $A$ de un espacio $E$, acotado, absolutamente convexo y cerrado, representamos por $E_A$ la envoltura lineal de $A$, con la norma asociada a $A$. Si $\mathscr{A}$ es una clase de subconjuntos de $E$, acotados, absolutamente convexos y cerrados, decimos que $\mathscr{A}$ es saturada si se cumplen las siguientes condiciones: 1) si $A \in \mathscr{A}$ y $B$ es un subconjunto de $A$, absolutamente convexo y cerrado, entonces $B$ pertenece a $\mathscr{A}$; 2) si $A \in \mathscr{A}$, entonces $\lambda A \in \mathscr{A}$, para cada escalar $\lambda$; 3) si $A_1$ y $A_2$ pertenecen a $\mathscr{A}$, existe un $A$ en $\mathscr{A}$ tal que $A_1 \cup A_2 \subset A$. Un espacio topológico se dice angélico si cualquier subconjunto $A$ relativamente numerablemente compacto es relativamente compacto y para cada $x$ en la clausura de $A$ existe una sucesión en $A$ que converge a $x$. En un espacio $E$, se dice que un conjunto $A$ es $\sigma(E, E')$-acotante si cada función real y continua sobre $E[\sigma(E, E')]$ está acotada en $A$. Dado un subconjunto $A$ de un espacio topológico $E[\mathscr{T}]$, denotamos por $\bar{A}^{\mathscr{T}}$ la sucesiónal clausura de $A$ respecto de la topología $\mathscr{T}$.

* Este trabajo se ha realizado con una ayuda concedida por la «Fundación Juan March» y bajo la dirección del profesor Manuel Valdivia.

Los espacios cumpliendo la condición de tener una sucesión de subconjuntos absolutamente convexos y débilmente compactos cuya unión sea densa son un caso particular de los espacios cuyo dual débil es angélico. Nuestro teorema 1 incluye resultados dados por Pták [3] y Montesinos [2].

*Teorema* 1. Sea $E$ un espacio. Sea $\mathscr{A}$ una familia saturada de subconjuntos acotados, absolutamente convexos y cerrados de $E'[\sigma(E', E)]$ que cubre a $E'$. Sea $\mathscr{T}_{\mathscr{A}}$ la topología en $E$ de la convergencia uniforme sobre los elementos de $\mathscr{A}$. Si $F$ es el dual topológico de $E[\mathscr{T}_{\mathscr{A}}]$, suponemos que $G[\sigma(G, E)]$ es un espacio angélico, siendo $G$ un espacio tal que $F \subset G \subset E^*$. Entonces, toda forma lineal sucesionalmente continua sobre $E'[\sigma(E', E)]$ es $\sigma(E', E)$-continua restringida a cada elemento de $\mathscr{A}$.

*Demostración.* Sea $A \in \mathscr{A}$ y $z$ una forma lineal sucesionalmente continua sobre $E'[\sigma(E', E)]$. Veamos que $z$ es continua al restringirla a $A[\hat{\sigma}(E', E)]$, siendo $\hat{\sigma}(E', E)$ la topología restringida de $\sigma(E', E)$ a $A$. Para ello, basta ver que $z(\bar{M}^{\hat{\sigma}(E', E)}) \subset \overline{z(M)}$, para cualquier subconjunto $M$ de $A$.

La clausura de $A$ en $G[\sigma(G, E)]$ es un conjunto $\sigma(G, E)$-compacto; así $M$ es un conjunto $\sigma(G, E)$-relativamente compacto, con lo que la clausura y sucesional clausura de $M$ en $G[\sigma(G, E)]$ coinciden, ya que estamos suponiendo que $G[\sigma(G, E)]$ es un espacio angélico.

Puesto que $\bar{M}^{\hat{\sigma}(E', E)} = \bar{M}^{\sigma(E', E)} \subset \bar{M}^{\sigma(G, E)} = \ddot{M}^{\sigma(G, E)}$, dado $x \in \bar{M}^{\hat{\sigma}(E', E)}$, existe una sucesión $(x_n) \subset M$, tal que $(x_n)$ converge a $x$ en $G[\sigma(G, E)]$. Pero como $x$ y $x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, son elementos de $E'$, se tiene que $(x_n)$ converge a $x$ en $E'[\sigma(E', E)]$, y así $(zx_n)$ converge a $zx$, pues $z$ es sucesionalmente continua en $E'[\sigma(E', E)]$. Resulta, por tanto, que $zx \in \overline{z(M)}$, y con ello concluimos la demostración.

Las demostraciones dadas por Valdivia en [6], pueden ser adaptadas para proporcionar las siguientes extensiones:

*Proposición* 2. Sea $E$ un espacio, tal que existe una topología $\mathscr{T}$ más fina que la inicial, de manera que se cumple: 1) $E[\mathscr{T}]$ es un espacio $B_r$-completo; 2) si $F$ es el dual topológico de $E[\mathscr{T}]$, $F[\sigma(F, E)]$ es un espacio angélico; 3) $F[\sigma(F, E)]$ es un espacio sucesionalmente completo. Entonces $T(E')$, el mínimo subespacio de $E^*[\sigma(E^*, E)]$ que contiene a $E'$ y que es sucesionalmente completo, coincide con $F$.

*Teorema* 3. Sea $A$ un subconjunto $\sigma(E, E')$-acotante del espacio $E$. Sea $B$ la envoltura absolutamente convexa y cerrada de $A$. Si $E_B$ es un espacio de Banach tal que $(E_B)'[\sigma((E_B)', E_B)]$ es un espacio angélico, entonces $B$ es $\sigma(E, E')$-compacto.

Con el siguiente teorema, generalizamos resultados sobre completitud de [4]. Para la prueba de éste, necesitamos la proposición 4. De ésta omitimos la demostración, que se puede obtener con modificaciones naturales de la ofrecida por Valdivia ([4], teorema 1).

*Proposición* 4. Sea $E$ un espacio y $\mathscr{A}$ una familia saturada de subconjuntos absolutamente convexos, acotados y cerrados de $E'[\sigma(E', E)]$ que cubre a

$E'$, y tal que para cada $A \in \mathscr{A}$, $E'_A$ es un espacio de Banach. Sea $\mathscr{T}_{\mathscr{A}}$ la topología en $E$ de la convergencia uniforme sobre los elementos de $\mathscr{A}$. Sea $T$ la topología en $E$ de la convergencia uniforme sobre los conjuntos $\sigma(E', E)$-compactos que pertenecen a $\mathscr{A}$. Si $F$ es el dual topológico de $E[\mathscr{T}_{\mathscr{A}}]$, suponemos que $F[\sigma(F, E)]$ es un espacio angélico. Entonces, si $E[\mathscr{T}_{\mathscr{A}}]$ es completo, también $E[T]$ es completo.

*Teorema* 5. *Sea $E$ un espacio completo, tal que $E'[\sigma(E', E)]$ sea un* espacio angélico. Si $F$ es un subespacio de $E''$ que contiene a $E$, sea $\mathscr{T}$ la topología en $F$ de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos absolutamente convexos y $\sigma(E', F)$-compactos de $E'$ que son equicontinuos en $E$. Entonces $F[\mathscr{T}]$ es completo, si $E$ es de codimensión finita en $F$.

Antes de demostrar este teorema, damos el siguiente lema previo:

*Lema* 6. Sea $E$ un espacio topológico angélico y $F$ un espacio topológico metrizable. Entonces $E \times F$ es un espacio topológico angélico.

*Demostración.* Si $A$ es un subconjunto de $E \times F$ relativamente numerablemente compacto, entonces las proyecciones de $A$ sobre $E$, $A_1$, y sobre $F$, $A_2$, son conjuntos relativamente numerablemente compactos, luego relativamente compactos, pues tanto $E$ como $F$ son angélicos. Como $A \subset A_1 \times A_2$, se tiene que $A$ es relativamente compacto.

Sea ahora $x \in \bar{A}$, y veamos que existe una sucesión $(z_n) \subset A$, tal que converge a $x$. Si $x = (x_1, x_2)$ con $x_1 \in A_1$ y $x_2 \in A_2$, sea $(U_n)$ una sucesión básica decreciente de entornos de $x_2$, que existe por ser $F$ metrizable. Tomamos $U_1$; su antiimagen por la proyección de $E \times F$ sobre $F$, $W_1$, es entorno de $x$, luego $W_1 \cap A$ es un conjunto no vacío. Al ser éste relativamente compacto, su proyección sobre $E$ es también relativamente compacto, y puesto que $x \in \overline{W_1 \cap A}$, $x_1$ pertenece a la clausura en $E$ de la proyección de $W_1 \cap A$ sobre $E$. Teniendo en cuenta que $E$ es un espacio angélico, es posible dar una sucesión $(y_n^1)$ contenida en la proyección sobre $E$ de $W_1 \cap A$, tal que converge a $x_1$. Si $(t_n^1)$ es tal que $(y_n^1, t_n^1) \in W_1 \cap A$, se tiene que $(t_n^1) \subset U_1$. Haciendo este proceso con todo $U_n$, $n = 1, 1, \ldots$, y tomando $z_n = (y_n^n, t_n^n)$, $n = 1, 2, \ldots$, resulta que esta sucesión, contenida en $A$, converge a $x$.

Demostración del teorema 5. Sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los subconjuntos absolutamente convexos y $\sigma(E', E)$-cerrados de $E'$ que son equicontinuos en $E$. Sea $\mathscr{T}_{\mathscr{A}}$ la topología en $F$ de la convergencia uniforme sobre los elementos de $\mathscr{A}$. Puesto que $E$ es un subespacio complemento topológico, de codimensión finita en $F$, se tiene que $F[\mathscr{T}_{\mathscr{A}}]$ es completo. Si llamamos $G$ al dual topológico de $F[\mathscr{T}_{\mathscr{A}}]$, como sabemos que se verifica $F = E \oplus M$, donde $M$ es un espacio de dimensión finita, entonces $G[\sigma(G, F)] = E'[\sigma(E', E)] \times M'[\sigma(M', M)]$ y por lema anterior, $G[\sigma(G, F)]$ es un espacio angélico. Aplicando, por último, la proposición 4, se concluye la demostración.

*Ejemplo* 7. Construimos seguidamente un espacio, tal que no existe ninguna sucesión de subconjuntos de él, absolutamente convexos y débilmente compactos, cuya unión sea densa; mientras que su dual débil es un espacio angélico. De esta manera, las extensiones anteriores no son supérfluas.

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y sea el espacio de Banach reflexivo:

$$l^2(\mathbb{R}) = \{\bar{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}} : \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} |x_\alpha|^2 < +\infty\}$$

con la norma usual:

$$||\bar{x}||_2 = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{R}} |x_\alpha|^2\right)^{1/2}$$

En Valdivia [5] se construye, dado un espacio $E$ ultrabornológico cuya topología no sea la topología localmente convexa más fina, un hiperplano no ultrabornológico. Además, si la dimensión de $E$ ($\dim E$) coincide con el cardinal de $E$ ($\operatorname{card} E$) y $\dim E = \operatorname{card} E = 2^{N_0}$; en dicho hiperplano construido, los subconjuntos absolutamente convexos compactos no pueden generar espacios vectoriales de dimensión infinita. La misma construcción dada por Valdivia, cambiando los términos «compacto» por «débilmente compacto», sirve para encontrar un hiperplano en el que los subconjuntos absolutamente convexos y débilmente compactos no pueden generar espacios vectoriales de dimensión infinita.

Por el teorema de Baire, $\dim l^2(\mathbb{R}) \geqslant 2\ {}^{\circ}$. Además, cada elemento de $l^2(\mathbb{R})$ es una familia numérica $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ tal que tiene a lo sumo un conjunto numerable de componentes $x_\alpha$ distintas de cero, luego:

$$\operatorname{card} l^2(\mathbb{R}) \leqslant \operatorname{card} \mathscr{P}(\mathbb{N}) \cdot \operatorname{card} \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = 2^{N_0} \cdot 2^{N_0} = 2^{N_0}$$

donde por $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ indicamos las partes del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y por $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ indicamos las partes numerables de $\mathbb{R}$. Así $\dim l^2(\mathbb{R}) = \operatorname{card} l^2(\mathbb{R}) = 2^{N_0}$ y, por tanto, en $l^2(\mathbb{R})$ podemos encontrar un hiperplano $H$ denso, en el que los subconjuntos absolutamente convexos $\sigma(H, l^2(\mathbb{R}))$-compactos no pueden generar espacios vectoriales de dimensión infinita.

$H$ no es separable por no serlo $l^2(\mathbb{R})$, luego en $H$ no puede existir una sucesión de subconjuntos absolutamente convexos y débilmente compactos cuya unión sea densa. Veamos, para terminar, que $H' = l^2(\mathbb{R})$ es un espacio $\sigma(l^2(\mathbb{R}), H)$-angélico.

Sea $A$ un subconjunto de $l^2(\mathbb{R})$, $\sigma(l^2(\mathbb{R}), H)$-relativamente numerablemente compacto. Este es $\sigma(l^2(\mathbb{R}), H)$-acotado y, así, su polar en $H$, $A^0$, es un tonel. Pero $H$, con la topología inducida por $\beta(l^2(\mathbb{R}), l^2(\mathbb{R}))$ es un espacio tonelado, por ser subespacio de codimensión finita de un espacio tonelado. Por tanto, la topología inducida por $\beta(l^2(\mathbb{R})), l^2(\mathbb{R}))$ sobre $H$ es $\beta(H, l^2(\mathbb{R}))$ y se tiene que $A^0$ es un $\beta(H, l^2(\mathbb{R}))$-entorno de cero, con lo que $\overline{A^0}^{\beta(l^2(\mathbb{R}), l^2(\mathbb{R}))}$ es un $\beta(l^2(\mathbb{R})), l^2(\mathbb{R}))$-entorno de cero en $l^2(\mathbb{R})$. Además $(\overline{A^0}^{\beta(l^2(\mathbb{R}), l^2(\mathbb{R}))})^0 = A^{00}$, luego $A^{00}$, y consecuentemente $A$, es $\sigma(l^2(\mathbb{R}), l^2(\mathbb{R}))$-acotado. Como $l^2(\mathbb{R})$ es reflexivo, $A$ es $\sigma(l^2(\mathbb{R}), l^2(\mathbb{R}))$-relativamente compacto y así $\sigma(l^2(\mathbb{R}), H)$-relativamente compacto.

Observando que en la $\sigma(l^2(\mathbb{R}), H)$-clausura de $A$ coinciden las topologías $\sigma(l^2(\mathbb{R}), l^2(\mathbb{R}))$ y $\sigma(l^2(\mathbb{R}), H)$, y al ser $l^2(\mathbb{R})[\sigma(l^2(\mathbb{R}), l^2(\mathbb{R}))]$-angélico, se puede concluir que $l^2(\mathbb{R})$ es también $\sigma(l^2(\mathbb{R}), H)$-angélico.

## BIBLIOGRAFIA

[1] KÖTHE, G.: *Topological vector spaces I*, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg-Nueva York (1969).

[2] MONTESINOS, V.: *Compacidad débil en espacios localmente convexos*, Tesis doctoral, Valencia (1976).

[3] PTÁK, V.: «On a theorem of W. F. Eberlein», *Studia Math.*, 14, 276-284 (1954).

[4] VALDIVIA, M.: «Algunos resultados sobre completitud en espacios localmente convexos», *Collect. Math.*, vol. XXVI, 2.º, 1-10 (1975).

[5] ——: «Sur certains hiperplans qui ne sont pas ultra-bornologiques dans les espaces ultra-bornologiques», *C. R. Acad. Sc. París*, t. 284, serie A, 935-937 (1977).

[6] ——: «Sobre ciertas clases de conjuntos en espacios localmente convexos», *Collect. Math.*, vol. XXXI, 3.º, 1-14 (1980).

Facultad de Matemáticas.
Departamento de Teoría de Funciones