Sobre el espacio $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E)$

Por MANUEL MAESTRE y JOSÉ BONET

Recibido: 6 octubre 1982

Presentado por el académico numerario Manuel Valdivia

Abstract

Let E be a separated locally convex topological vector space and Ω a non empty open subset of $\mathbb{R}$. In this paper we give a representation of the vector space of all the functions in $\mathscr{D}_+(\Omega, E)$ such that the function and its partial derivates vanish at $\Omega \cap F$, F being a closed subset of $\mathbb{R}$.

Resumen

Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo y separado y Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}$. En este artículo damos una representación del espacio vectorial de las funciones de $\mathscr{D}_+(\Omega, E)$ que se anulan, así como todas sus derivadas, en $\Omega \cap F$, siendo F un subespacio cerrado de $\mathbb{R}$.

Si A es un subconjunto de un espacio topológico X, denotaremos por $\mathring{A}$, $\overline{A}$ y ∂A el interior, la clausura y la frontera de A, respectivamente. Todos los espacios vectoriales que se usarán a lo largo del artículo están definidos sobre el cuerpo de los números complejos. Con la palabra espacio designaremos espacio vectorial topológico localmente convexo y separado. Si E y F son dos espacios topológicamente isomorfos, escribiremos $E \simeq F$. Diremos que un espacio E es localmente completo si todo acotado está incluido en un disco de Banach. Denotaremos por N al conjunto de los enteros positivos.

En lo que sigue usaremos esencialmente las notaciones debidas a L. Schwartz (véase [4] y [5]) y los espacios $\varepsilon(\Omega, E)$ y $\mathscr{D}(Q, E)$, donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}$, Q un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y E un espacio. Para un estudio de las propiedades del espacio $s(E)$, donde s es el espacio de Fréchet de las sucesiones de decrecimiento rápido, remitimos a Valdivia [6].

Si E es un espacio e I es un intervalo en $\mathbb{R}$ cerrado y acotado, con interior no vacío, denotaremos por $\varepsilon(I, E)$ el espacio vectorial de todas las funciones indefinidamente diferenciables en $\mathring{I}$ tales que la función y todas sus derivadas pueden extenderse continuamente a todo I. Se dota a dicho espacio de la topología definida por la siguiente familia de seminormas: si q es una seminorma continua en E y $m \in N$, entonces:

$$Q(q, m)(f) = \sum_{n \leqslant m} \sup \{q(f^{(n)}(x)) \,/\, x \in I\}$$

* Este trabajo ha sido realizado bajo la dirección del profesor Manuel Valdivia en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia.

para cada f de $\varepsilon(I, E)$. Por otra parte, si Ω es un abierto de $\mathbb{R}$, $\mathscr{B}_0(\Omega, E)$ es el espacio de todas las funciones de $\varepsilon(\Omega, E)$, tales que para cada $n \in N$ y cada seminorma continua q en E, la función $q \circ f^{(n)}$ se anula en el infinito en Ω. Se le dota de la topología definida por las seminormas siguientes: si $m \in N$ y q es una seminorma continua en E:

$$Q(q, m)(f) = \sum_{n \leqslant m} \sup \{q(f^{(n)}(x) \;/\; x \in \Omega\}$$

para cada f de $\mathscr{B}_0(\Omega, E)$. Es conocido que toda función de $\mathscr{B}_0(\Omega, E)$ puede considerarse como un elemento de $\varepsilon(\mathbb{R}, E)$ extendiéndola como 0 fuera del abierto Ω (ver [2]).

Los siguientes resultados serán necesarios en lo que sigue:

a) Sean E y F dos espacios, si existe $f: E \rightarrow F$ una aplicación lineal inyectiva y continua, y existe $g: F \rightarrow E$ una aplicación lineal y continua tal que $g \circ f$ coincide con la identidad de E, entonces $f(E)$ es un subespacio complementado de F topológicamente isomorfo a E ([3], pág. 123).

b) Sea E un espacio localmente completo e I un intervalo cerrado y acotado con interior no vacío en $\mathbb{R}$, entonces: $\varepsilon(I, E) \simeq \mathscr{D}(I, E) \simeq s(E)$ [1].

c) Sean I y J dos intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$ tales que $\phi \neq \mathring{I} \subset I \subset \mathring{J}$, entonces existe un operador lineal y continuo T: $\varepsilon(I, E) \rightarrow \mathscr{D}(J, E)$ tal que Tf coincide con f en I para cada f de $\varepsilon(I, E)$ [1].

d) Si Ω es un abierto en $\mathbb{R}$ relativamente compacto y E un espacio localmente completo, entonces $\mathscr{B}_0(\Omega, E) \simeq s(E)$ [2].

e) Sea E un espacio; sea I un conjunto de cardinal α infinito, denotamos por E^I y $E^{(I)}$ al producto y la suma directa topológica de α copias de E. Si G es isomorfo a un subespacio complementado de $s(E)$ (E^I, $E^{(I)}$) y contiene un subespacio complementado isomorfo a $s(E)$ (E^I, $E^{(I)}$), entonces $G \simeq s(E)$ ($G \simeq E^I$, $G \simeq E^{(I)}$) [6], [7].

En [9] Valdivia construye, dado un abierto no vacío cualquiera de $\mathbb{R}$, un recubrimiento localmente finito formado por intervalos cerrados con ciertas propiedades especiales. Lo denotaremos por $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ y haremos uso de él más adelante.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}$ no vacío y sea E un espacio. Si $z \in \Omega$, denotamos por $\mathscr{D}_+^z(\Omega, E)$ al subespacio de $\varepsilon(\Omega, E)$ cuyas funciones tienen su soporte en $[z, +\infty[\cap \Omega$ dotado con la topología inducida. Llamaremos $\mathscr{D}_+(\Omega, E)$ al espacio vectorial $\bigcup_{z \in \Omega} \mathscr{D}_+^z(\Omega, E)$ dotado con la topología inductiva respecto de esta familia. Sea F un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ tal que $\Omega \sim F \neq \phi$, denotamos por $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E)$ al subespacio de $\mathscr{D}_+(\Omega, E)$ formado por las funciones tales que se anulan, así como todas sus derivadas, en $\Omega \cap F$, dotado con la topología inducida por $\mathscr{D}_+(\Omega, E)$.

Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ el recubrimiento localmente finito de Ω formado por intervalos cerrados, dado por Valdivia en [9]. Obviamente existirá $n_0 \in N$ tal que $\mathring{A}_{n_0} \cap (\Omega \sim F) \neq \phi$. Determinamos $z_1 < z_0 < z_2$ tales que $[z_1, z_2] \subset \mathring{A}_{n_0} \cap$-$(\Omega \sim F)$. Denotamos por $\mathscr{B}_1$ a la sucesión de intervalos cerrados $\{A_n \cap]-\infty, z_0] \;/\; n = 1, 2, ...\}$, que escribiremos $(J_k)_{k=1}^{\infty}$, y por $\mathscr{B}_2$ a la sucesión de intervalos cerrados $\{A_n \cap [z_0, +\infty[\;/\; n = 1, 2, ...\}$, que escribiremos $(I_k)_{k=1}^{\infty}$. Llamamos $I_0 = [z_0, z_2]$.

Sea $L_2(z_0)$ el subespacio de $\varepsilon(\Omega \cap]z_0, +\infty[)$ formado por las funciones f tales que existe $\lim_{x \to z_0^+} f^{(n)}(x)$ para cada $n \in N \cup \{0\}$ y $f^{(n)}(x) = 0$ para cada $n \in N \cup \{0\}$ y cada $x \in \Omega \cap]z_0, +\infty[\cap F$. Denotamos a $L_2(z_0)$ de la topología definida por la siguiente familia de seminormas: si $m \in N$, q es una seminorma continua en E y K es un compacto de $\mathbb{R}$ incluido en $[z_0, +\infty[\cap \Omega$, entonces:

$$P(m, q, K)(f) = \sum_{n \leqslant m} \sup \{q(f^{(n)}(x)) \mid x \in K\}$$

para cada $f \in L_2(z_0)$, donde $f^{(n)}(z_0)$ es el $\lim_{x \to z_0^+} f^{(n)}(x)$.

Podemos determinar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $z_2 < \alpha$ y $[z_1, \alpha[\subset \Omega \sim F$. Por el resultado *c*) sabemos que existe un operador lineal y continuo de extensión T_1: $\varepsilon([z_0, z_2], E) \to \mathscr{D}([z_1, \alpha], E)$. Si $f \in L_2(z_0)$ podemos definir Tf: $\Omega \to E$ tal que:

$$Tf(x) = \begin{cases} 0 & x \in]-\infty, z_1[\cap \Omega \\ T_1 f(x) & x \in [z_1, z_0] \\ f(x) & x \in]z_0, +\infty[\cap \Omega \end{cases}$$

Evidentemente $Tf \in \mathscr{D}_{+F}(\Omega, E)$. $G_2(z_0) = T(L_2(z_0))$ es un subespacio de $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E)$ que, dotado con la topología inducida por este último espacio, es isomorfo a $L_2(z_0)$. Si denotamos por $G_1(z_0)$ al subespacio de $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E)$ formado por aquellas funciones cuyo soporte está incluido en $]-\infty, z_0] \cap \Omega$ dotado con la topología inducida por $\mathscr{D}_+(\Omega, E)$, entonces no es difícil comprobar que $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E)$ es la suma directa topológica de $G_1(z_0)$ y $G_2(z_0)$.

Sea:

$$L_1 = \{n \in N \cup \{0\} \mid \mathring{I}_k \subset \Omega \sim F\}$$

y

$$L_2 = \{n \in N \cup \{0\} \mid \mathring{I}_k \cap (\Omega \sim F) \neq \phi, \mathring{I}_k \cap F \neq \phi\}$$

Desde luego, $L_1 \cup L_2$ no es vacío, pues al menos $0 \in L_1$.

Proposición 1. El espacio $G_2(z_0)$ es isomorfo a $\prod_{1 \in L_1 \cup L_2} s_1(E)$, donde $s_1(E) = s(E)$ para cada $1 \in L_1 \cup L_2$, si E es un espacio localmente completo.

Demostración. Denotaremos por $\mathscr{H}$ al subespacio de $\varepsilon(I_0, E)$ formado por aquellas funciones que se anulan, así como todas sus derivadas, en z_2. Es conocido que $\mathscr{H} \simeq s(E)$ (ver [1]). Definimos:

$$R = \mathscr{H} \times \prod_{1 \in L_1 \sim \{0\}} \mathscr{D}(I_1, E) \times \prod_{1 \in L_2} \mathscr{B}_0(\mathring{I}_1 \cap (\Omega \sim F), E)$$

Sea $A : R \to L_2$ la aplicación tal que $A(f_0, (f_1)_{1 \in L_1 \sim \{0\}}, (g_1)_{1 \in L_2}) = f_0 + \Sigma f_1 + \Sigma g_1$. No es difícil comprobar que A es una aplicación lineal y continua.

Tomemos ahora $\varphi_0 \in \mathscr{D}([z_1, z_2])$ tal que $\varphi_0(x) > 0$ para cada $x \in]z_1, z_2[$ y $\varphi_k \in \mathscr{D}(I_k)$ tal que $\varphi_k(x) > 0$ para cada $x \in \mathring{I}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ y definimos:

$$\mu_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in [z_0, +\infty[$$

Sea B la aplicación de L_2 en R tal que $Bf = (f\mu_0, (f\mu_1)_{1 \in L_1 \sim \{0\}}, (f\mu_1)_{1 \in L_2})$. Esta aplicación es lineal, continua e inyectiva. Además $A \circ B$ coincide con la identidad de $L_2(z_0)$. R es isomorfo a $\prod_{1 \in L_1 \cup L_2} s_1(E)$, con $s_1(E) = s(E)$ para cada $1 \in L_1 \cup L_2$ en virtud de los resultados *b*) y *d*). Entonces, aplicando el resultado *a*), $L_2(z_0)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\prod_{1 \in L_1 \cup L_2} s_1(E)$.

Por otra parte, si $L_1 \cup L_2$ es finito, entonces $\prod_{1 \in L_1 \cup L_2} s_1(E) \simeq s(E)$. Ahora bien, por la construcción de z_0 podemos determinar dos intervalos cerrados I, J de $\mathbb{R}$ tales que $\phi \neq \mathring{J} \subset J \subset \mathring{I} \subset I \subset]z_0, +\infty[\cap (\Omega \sim F)$. Usando un operador lineal y continuo de extensión de $\varepsilon(J, E)$ en $\mathscr{D}(I, E)$, es fácil probar que $L_2(z_0)$ contiene un subespacio complementado isomorfo a $\varepsilon(J, E)$ y por tanto a $s(E)$. Supongamos finalmente que $L_1 \cup L_2$ sea infinito. En la sucesión $(I_k)_{k=0}^{\infty}$ a lo sumo cuatro elementos se cortan entre sí. Podemos extraer, pues, una sucesión $(l_j)_{j=1}^{\infty}$ en $L_1 \cup L_2$ tal que I_{l_i} es disjunto con $\mathring{I}_{l_i}$ si $i \neq j$. Determinamos intervalos cerrados M_j y H_j tales que $\phi \neq \mathring{H}_j \subset H_j \subset \mathring{M}_j \subset M_j \subset \mathring{I}_{l_j} \cap (\Omega \sim F)$. Sea T_1: $\varepsilon(H_j, E) \longrightarrow \mathscr{D}(M_j, E)$ un operador de extensión lineal y continuo. Definimos las siguientes aplicaciones:

$$U : \prod_{j=1}^{\infty} \varepsilon(H_j, E) \longrightarrow L_2(z_0) \quad \text{tal que } U((f_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j f_j$$

$$V : L_2(z_0) \longrightarrow \prod_{j=1}^{\infty} \varepsilon(H_j, E) \quad \text{tal que } Vf = (f|_{H_j})_{j=1}^{\infty}$$

Utilizando el resultado *a*) y razonando como se hizo anteriormente, se obtiene que $L_2(z_0)$ contiene una copia de $s(E)^N$ complementada.

La conclusión se sigue observando que $G_2(z_0)$ es isomorfo a $L_2(z_0)$ y aplicando el resultado *e*).

Diremos que un abierto no vacío Ω incluido en $\mathbb{R}$ es conexo por la izquierda si existe $x \in \Omega$ tal que $]-\infty, x] \cap \Omega$ es conexo.

Proposición 2. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ conexo por la izquierda y E un espacio localmente completo. Se cumplen las siguientes propiedades:

a) Si podemos escoger z_0 de modo que $]-\infty, z_0] \cap \Omega$ sea conexo, entonces $G_1(z_0)$ es isomorfo a $\bigoplus_{i \in W_1 \cup W_2} s_i(E)$, con $s_i(E) = s(E)$ para cada

$i \in W_1 \cup W_2$, donde $W_1 = \{n \in N \,/\, \mathring{J}_n \subset \Omega \sim F\}$ y $W_2 = \{n \in N \,/\, \mathring{J}_n \cap (\Omega \sim F) \neq \phi, \mathring{J}_n \cap F \neq \phi\}$.

b) Si para todo punto $z_0 \in \Omega \sim F$, $]-\infty, z_0] \cap \Omega$ es no conexo, entonces $G_1(z_0)$ es isomorfo a $\prod_{i \in W_1 \cup W_2} s_i(E)$, con $s_i(E) = s(E)$ para cada $i \in W_1 \cup W_2$, donde W_1 y W_2 significan lo mismo que en *a*).

Demostración. a) Sea S el espacio $\bigoplus_{i \in W_1} \mathscr{D}(J_i, E) \times \bigoplus_{h \in W_2} \mathscr{B}_0(\mathring{J}_h \cap (\Omega \sim F), E)$. La aplicación $X : S \to G_1(z_0)$ tal que $X((f_i)_{i \in W_1}, (g_h)_{h \in W_2}) = \Sigma f_i + \Sigma g_h$ es obviamente lineal y continua. Consideremos ahora $\alpha_k \in \mathscr{D}(J_k)$, tal que $\alpha_k(x) > 0$ para cada $x \in \mathring{J}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Definimos:

$$v_k(x) = \frac{\alpha_k(x)}{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)}, \quad \text{si} \quad z_0 \in J_k,\ v_k(z_0) = 1$$

Sea $Y : G_1(z_0) \to S$ la aplicación tal que $Yf = ((fv_i)_{i \in W_1}, (fv_i)_{i \in W_2})$. Y es lineal e inyectiva, su continuidad se sigue del hecho de que la aplicación $\tilde{Y}$: $\mathscr{D}_+(\Omega, E) \to \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathscr{D}(J_k, E)$ tal que $\tilde{Y}f = ((fv_k)_{k=1}^{\infty})$, de la cual Y es restricción, es continua. Observando que $X \circ Y$ es la identidad de $G_1(z_0)$ y que S es isomorfo a $\bigoplus_{i \in W_1 \cup W_2} s_i(E)$, con $s_i(E) = s(E)$ para cada $i \in W_1 \cup W_2$, por los resultados *b*) y *d*) se sigue que $G_1(z_0)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\bigoplus_{i \in W_1 \cup W_2} s_i(E)$, aplicando el resultado *a*). Finalmente, para probar que $\bigoplus_{i \in W_1 \cup W_2} s_i(E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $G_1(z_0)$ basta distinguir entre los casos en que $W_1 \cup W_2$, sea finito o infinito, como se hizo en la prueba de la proposición 1.

b) Sea ahora S_1 el espacio $\prod_{h \in W_1} \mathscr{D}(J_i, E) \times \prod_{h \in W_2} \mathscr{B}_0(\mathring{J}_h \cap (\Omega \sim F), E)$. Definimos la aplicación $X_1 : S_1 \to G_1(z_0)$ tal que $X_1((f_i)_{i \in W_1}, (g_h)_{h \in W_2}) = \Sigma f_i + \Sigma g_n$, que es lineal y continua. Por otra parte, la aplicación $Y_1 : G_1(z_0) \to S_1$, tal que $Y_1 f = ((fv_i)_{i \in W_1}, (fv_h)_{h \in W_2})$ es lineal e inyectiva. Su continuidad se obtiene observando que por Ω conexo por la izquierda existirá $u \in \Omega$ tal que $]-\infty, u] \cap \Omega$ es conexo, de donde $G_1(z_0)$ está incluido en $\mathscr{D}^u_+(\Omega, E)$ y tiene su topología inducida. Basta repetir la técnica de *a*) para terminar la demostración.

Teorema 1. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ conexo por la izquierda y E un espacio localmente completo, entonces, conservando las notaciones anteriores, se cumplen las siguientes propiedades:

a) Si existe $z_0 \in \Omega \sim F$ tal que $]-\infty, z_0] \cap \Omega$ es conexo, entonces $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E)$ es isomorfo a $\bigoplus_{i \in W_1 \cup W_2} s_i(E) \times \prod_{l \in L_1 \cup L_2} s_l(E)$, con $s_i(E) = s_l(E) = s(E)$ para cada $i \in W_1 \cup W_2$ y $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E) \in L_1 \cup L_2$.

b) Si para cada $z_0 \in \Omega \sim F$, $]-\infty, z_0] \cap \Omega$ es no conexo entonces $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E)$ es isomorfo a $\prod_{i \in W_1 \cup W_2} s_i(E) \times \prod_{1 \in L_1 \cup L_2} s_1(E)$, con $s_i(E) = s_1(E) = s(E)$ para cada $i \in W_1 \cup W_2$ y $1 \in L_1 \cup L_2$.

Observación 1. Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ conexo por la izquierda, entonces, en virtud del teorema anterior, obtendremos que si se da el caso *a*), $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E)$ puede ser isomorfo a $s(E)^{(N)}$, $s(E)^{(N)} \times s(E)^N$, $s(E)^N$ y $s(E)$, según los cardinales de $W_1 \cup W_2$ y de $L_1 \cup L_2$. Análogamente, en el caso *b*), $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E)$ puede ser isomorfo a $s(E)$ y $s(E)^N$.

Corolario 1.1. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ conexo por la izquierda y E un espacio localmente completo, entonces $\mathscr{D}_+(\Omega, E)$ es isomorfo a $s(E)^{(N)} \times s(E)^N$.

Demostración. Como $F = \phi$, estamos en el caso del teorema 1.*a*) con $W_1 \cup W_2$ y $L_1 \cup L_2$ infinitos, de donde se sigue lo pedido.

Supongamos ahora que Ω no es conexo por la izquierda. Determinado ya $z_0 \in \Omega$, podemos escoger $x_0 < z_0$, $x_0 \in \partial\Omega$, tal que $]x_0, z_0[\subset \Omega$. Hecho esto extraemos una sucesión de elementos de $\partial\Omega$ decreciente $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que converge al ínfimo de Ω en la recta real ampliada y tal que cumple que si $\Omega_0 =]x_0, z_0]$ y $\Omega_n =]x_{2n}, x_{2n-1}[\cap \Omega$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ son disjuntos dos a dos y $\Omega \cap]-\infty, z_0] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n$.

Sea:

$$W_n^1 = \{k \in N \,/\, \mathring{J}_k \subset \Omega_n \sim F\}$$

y

$$W_n^2 = \{k \in N \,/\, J_k \subset \Omega_n, \mathring{J}_k \cap (\Omega_n \sim F) \neq \phi \text{ y } \mathring{J}_k \cap F \neq \phi\}$$

Por construcción $W_0^1 \cup W_0^2 \neq \phi$. *Sea* $B = \{n \in N \,/\, W_n^1 \cup W_n^2 \neq \phi\}$.

Proposición 3. Si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ no conexo por la izquierda, entonces $G_1(z_0)$ es isomorfo a $\bigoplus_{n \in B} \prod_{i \in W_n^1 \cup W_n^2} s_i(E)$, con $s_i(E) = s(E)$ para cada $i \in W_n^1 \cup W_n^2$ y cada $n \in B$.

Demostración. Sea H el espacio $\bigoplus_{n \in B} \left(\prod_{i \in W_n^1} \mathscr{D}(J_i, E) \times \prod_{h \in W_n^2} \mathscr{B}_0(\mathring{J}_h \cap (\Omega_h \sim F), E)\right)$. La aplicación $V : H \to G_1(z_0)$ tal que $V\big(((f_i)_{i \in W_n^1}, (g_h)_{h \in W_n^2})_{n \in B}\big) = \sum_{n \in B} \left(\sum_{i \in W_n^1} f_i + \sum_{h \in W_n^2} g_n \right)$ definida en la prueba de la proposición 2, entonces la aplicación $W : G_1(z_0) \to H$, tal que $Wf = \big((fv_i)_{i \in W_n^1}, (fv_h)_{h \in W_n^2}\big)_{n \in B}$, es lineal e inyectiva. Además es continua como se comprueba demostrando que es continua la aplicación $\tilde{W} : \mathscr{D}_+(\Omega, E) \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} \prod_{i \in W_n} \mathscr{D}(I_i, E)$ tal que $\tilde{W}f = \big((fv_i)_{i \in W_n}\big)_{n=1}^{\infty}$, donde $W_n = \{k \in N \,/\, J_k \subset \Omega_n\}$. Finalmente $V \circ W$ coincide con la identidad sobre $G_1(z_0)$. Aplicando los resultados *b*), *c*) y *a*) se obtiene que $G_1(z_0)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\bigoplus_{n \in B} \prod_{i \in W_n^1 \cup W_n^2} s_i(E)$.

Por otra parte, $\bigoplus_{n \in B} \prod_{i \in W_n^1 \cup W_n^2} s_i(E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $G_1(z_0)$, lo que puede hacerse empleando la técnica de la demostración de la proposición 1, distinguiendo los siguientes casos:

a.1. B es finito y $W_n^1 \cup W_n^2$ es finito para cada $n \in B$. En este caso basta demostrar que $s(E)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $G_1(z_0)$

a.2. B es finito y al menos para algún $n \in B$, $W_n^1 \cup W_n^2$ es infinito. Es fácil ver en este caso que $s(E)^N$ es isomorfo a un subespacio complementado de $G_1(z_0)$.

b.1. B es infinito y $W_n^1 \cup W_n^2$ es finito para cada $n \in B$. Se prueba que $s(E)^{(N)}$ es isomorfo a un subespacio complementado de $G_1(z_0)$.

b.2. B es infinito y $W_n^1 \cup W_n^2$ es finito para cada $n \in B$ salvo un número finito. Este caso se puede reducir a b.1 sin más que trasladar z_0, que no influye en la representación de $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E)$.

b.3. B es infinito y $W_n^1 \cup W_n^2$ es infinito para un subconjunto de B infinito. Se prueba en este caso que $(s(E)^N)^{(N)}$ es isomorfo a un subespacio complementado de $G_1(z_0)$.

Teorema 2. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ no conexo por la izquierda y E un espacio localmente completo. Conservando las notaciones anteriores se tiene que $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E)$ es isomorfo a $\bigoplus_{n \in B} \left(\prod_{i \in W_n^1 \cup W_n^2} s_i(E) \right) \times \prod_{1 \in L_1 \cup L_2} s_1(E)$, donde $s_i(E) = s_1(E) = s(E)$ para cada $i \in W_n^1 \cup W_n^2$ y $n \in B$, y cada $1 \in L_1 \cup L_2$.

Demostración. Se sigue de las proposiciones 1 y 3, siempre que se elija z_0 para que no se de el caso b.2.

Observación 2.2.1. Con las notaciones que se han venido utilizando y elegido convenientemente z_0 en Ω para que no se de el caso b.2, pueden obtenerse las siguientes representaciones:

1) $L_1 \cup L_2$ finito, B finito, $W_n^1 \cup W_n^2$ finito par cada $n \in B$:

$$\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E) \simeq s(E)$$

2) $L_1 \cup L_2$ finito, B finito, al menos para un $n \in B$, $W_n^1 \cup W_n^2$ es infinito:

$$\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E) \simeq s(E)^N$$

3) $L_1 \cup L_2$ finito, B infinito, $W_n^1 \cup W_n^2$ finito para cada $n \in B$:

$$\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E) \simeq s(E)^{(N)}$$

4) $L_1 \cup L_2$ finito, B infinito, $W_n^1 \cup W_n^2$ infinito para un subconjunto de B infinito:

$$\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E) \simeq (s(E)^N)^{(N)}$$

5) $L_1 \cup L_2$ infinito, B finito, $W_n^1 \cup W_n^2$ finito para cada $n \in B$:

$$\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E) \simeq s(E)^N$$

6) $L_1 \cup L_2$ infinito, B finito, al menos para un $n \in B$, $W_n^1 \cup W_n^2$ es infinito:

$$\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E) \simeq s(E)^N$$

7) $L_1 \cup L_2$ infinito, B infinito, $W_n^1 \cup W_n^2$ finito para cada $n \in B$:

$$\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E) \simeq s(E)^{(N)} \times s(E)^N$$

8) $L_1 \cup L_2$ infinito, B infinito, $W_n^1 \bigcup W_n^2$ infinito para un subconjunto infinito de B:

$$\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E) \simeq (s(E)^N)^{(N)}$$

2.2. Nótese que $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E) \simeq s(E)$ si, y sólo si, $\Omega \sim F$ es acotado y $\overline{\Omega \sim F} \subset \Omega$.

Corolario 2.1. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}$ no conexo por la izquierda y E un espacio localmente completo. El espacio $\mathscr{D}_{+F}(\Omega, E)$ es isomorfo a $(s(E)^N)^{(N)}$.

Demostración. Se tiene que $F = \phi$ y estamos en el caso 8) de la observación 2.1.

Nota. Un estudio análogo podría hacerse del espacio $\mathscr{D}_-(\Omega, E)$ formado por las funciones $f \in \varepsilon(\Omega, E)$ tales que sop $f \subset]-\infty, z_0] - \Omega$ para algún $z_0 \in \Omega$.

Estos resultados extienden los obtenidos por Valdivia en [10].

BIBLIOGRAFIA

[1] BONET, J.: «Representaciones de los espacios $O_M(E)$ y $\mathscr{D}_{L}p(E)$», *Collectanea Matematica. 33* (1982), 23-41.

[2] ——, y MAESTRE, M.: «Representaciones de los espacios $\mathscr{B}_0(\Omega, E)$ y $\mathscr{B}_1(\Omega, E)$», *Rev. Real Acad. Ciencias Madrid. 77* (1983) 141-159.

[3] HORVATH, J.: *Topological vector spaces and distributions I*, Addison Wesley Publ. Comp. Reading Massachusetts (1966).

[4] SCHWARTZ, L.: *Théorie des distributions*, Hermann, París (1978).

[5] ——: «Espaces de functions differentiables a valeurs vectorielles», *J. Analyse Math.*, 4, 88-148 (1954-1955).

[6] VALDIVIA, M.: «Representaciones de los espacios $\mathscr{D}(\Omega)$ y $\mathscr{D}'(\Omega)$», *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Madrid*, 72, 385-414 (1978).

[7] ——: «Representaciones de los espacios $\mathscr{C}^m(V)$ y $\mathscr{D}^m(V)$», *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Madrid*, 75, 589-596 (1981).

[8] ——: «Una representación del espacio $\mathscr{D}_+(\Omega)$», *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Madrid*, 72, 559-571 (1978).
[9] ——: «Sobre el espacio $\mathscr{B}_0(\Omega)$», *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Madrid*, 74, 835-863 (1980).
[10] ——: «Sobre el espacio $\mathscr{D}_{+F}(\Omega)$», pendiente de publicación.
[11] MAESTRE, M.: «Representaciones de espacios de funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$ con valores vectoriales», Tesis doctoral, Valencia (1982).

Facultad de Matemáticas.
Universidad de Valencia