Dos propiedades relativas al problema de la clasificación de los grupos finitos por el número de clases de conjugación y el de normales minimales

Por ANTONIO VERA LÓPEZ

Recibido: 5 mayo 1982

Presentado por el académico numerario Manuel Valdivia Ureña

Abstract

Existen dos problemas que están estrechamente relacionados con el problema de la clasificación de los grupos finitos de las familias $\mathscr{A}_t = \{G \mid \beta(G) = r(G) - t\}$, $t \in \mathbb{N}$, donde $\beta(G)$ es el número de normales minimales de G y $r(G)$ el número de clases de conjugación de G. Uno es la obtención de propiedades de los grupos finitos que verifican la relación $\beta(G) = r(G) - \alpha(G) - 1$ (*) donde $\alpha(G)$ es el número de clases de conjugación de G fuera de $S(G)$. El otro, que parcialmente completa al anterior, es el estudio de los grupos con $S(G)$ no resoluble. Probamos en este sentido, que todos los normales minimales de un grupo que verifica (*) tienen el mismo orden. Por otro lado, si $G \in \mathscr{A}_t$ y $S(G)$ es no resoluble, entonces $t \geqslant 1 + 3(\beta(G) - 1) + \alpha(G)$. Como consecuencia, se obtiene que G es un grupo con $S(G)$ no resoluble y $\beta(G) = r(G) - a$, con $a \leqslant 8$, si y sólo si $G \in \{A_5, PSL(2,7), PSL(2,9), SL(2,11), SL(2,8), \Sigma_5, PGL(2,7), A_5 \times C_2, M_9, A_7, PSL(2,13)\}$.

Abstract

There are two problems which are closely related to the problem of the classification of the finite groups of the families $\mathscr{A}_t = \{G \mid \beta(G) = r(G) - t\}$, $t \in \mathbb{N}$, where $\beta(G)$ is the number of distinct minimal normal subgroups of G and $r(G)$ is the number of conjugacy classes of G. Firstly we need to get some properties of the finite groups that verify the relation:

$$\beta(G) = \mathrm{r}(G) - \alpha(G) - 1 \qquad (*)$$

where $\alpha(G)$ is the number of conjugacy classes of G out of the socle $S(G)$. The second, which partially complements the former, is the study of the groups with $S(G)$ non solvable. We proof that all the minimal normal subgroups of a group that verifies (*), have the same order. Also if $G \in \mathscr{A}_t$ and $S(G)$ is non solvable, then:

$$t \geqslant 1 + 3(\beta(G) - 1) + \alpha(G)$$

A consequence of that is the following corollary: $S(G)$ is non solvable and $\beta(G) = r(G) - a$, $a \leqslant 8$, if and only if G is one the following groups: A_5, $PSL(2,7)$, $PSL(2,9)$, $PSL(2,11)$, $SL(2,8)$, Σ_5, $PGL(2,7)$, $A_5 \times C_2$, M_9, A_7, $PSL(2,13)$.

1. GRUPOS VERIFICANDO LA CONDICIÓN (*)

Teorema 1: *Sea G un grupo tal que $\beta(G) = r(G) - \alpha(G) - 1$. Entonces los normales minimales de G tienen todos el mismo cardinal.*

Demostración: Sea $\{L_k \mid k \in I\}$ el conjunto de normales minimales de G. La condición (*) equivale a que $S(G) = \cup L_k$ y $L_k = \{1\} \cup CL(g_k)$ (#) para ciertos elementos g_k del grupo G.

Sean L_{k_1} y L_{k_2} dos normales minimales distintos, entonces $N = L_{k_1}L_{k_2} = L_{k_1} \times L_{k_2}$ es un subgrupo normal de G dentro de $S(G)$, luego por (#) N es unión de algunos normales minimales. Sea:

$$a = \text{máx } \{|L_k| \mid L_k \leqslant N\} \quad (^\circ)$$

y $L_{k'} \leqslant N$ tal que $|L_{k'}| = a$. Tomemos $x \in N - L_{k'}$, entonces $L = \{1\} \cup CL(x) \leqslant N$ es un normal minimal y $L_{k'}L = L_{k'} \times L$ (''). Claramente, $xg_{k'} \in N - L_{k'}$ y por tanto, $L_{k''} = \{1\} \cup CL(xg_{k'})$ es un normal minimal de G contenido en N y distintos de $L_{k'}$. Además, si $(xg_{k'})^g = (xg_{k'})^h$, entonces, $x^g(g_{k'})^g = x^h(g_{k'})^h$, y por ('') es $x^g = x^h$ y $(g_{k'})^g = (g_{k'})^h$. Así pues, si:

$$CL(g_{k'}) = \{(g_{k'})^{h_1}, \ldots, (g_{k'})^{h_{a-1}}\}$$

entonces $(xg_{k'})^{h_i} \neq (xg_{k'})^{h_j}$, $\forall\, i \neq j$, en consecuencia, $|CL(xg_{k'})| \geqslant a - 1$ y $|L_{k''}| = a$ por ($^\circ$). Finalmente tomando cardinales en $L_{k''} \times L_{k'} \leqslant N = L_{k_1} \times L_{k_2}$ es $a^2 = |N| = |L_{k_1}||L_{k_2}|$ y $|L_{k_i}| \leqslant a$, $i = 1, 2$, Luego $|L_{k_1}| = a = |L_{k_2}|$, c.s.q.d.

Observación (seguimos la notación de (2)): *Sea G un grupo verificando la condición* (*). *Supongamos que $C_G(S(G)) = S(G)$. $Q \in Syl_q(G)$, con q un primo $\neq p$, donde $p^s = |S(G)|$. Entonces, si* (**)$|\{g^b \mid b \in Q\}| = cte$, $\forall\, g \in S(G)^*$ *se tiene una de las posibilidades siguientes:*

i) *Q es cíclico o cuaternio generalizado y Q actúa semirregularmente, o sea:*

$$|\{g^b \mid b \in Q\}| = |Q|, \ \forall\, g \in S(G)^*$$

ii) $n = 2$, $p = 2^m - 1$ *es un primo Mersenne y Q es diédrico de orden 2^{m+1} o semidiédrico de orden 2^{m+2}.*

iii) $n = 2$, $p = 2^m + 1$ *es primo de Fermat y* $Q = T_0(p)$.

iv) $n = 4$, $p = 3$ *y* $Q \in \{T_0(3^2), (D_8Q_8)_{C_2}\}$.

En efecto, la condición (*) implica que $S(G) \simeq C_p \times \overset{s}{\cdots} \times C_p$ para un cierto primo p. Dado $Q \in Syl_q(G)$, con $q \neq p$, Q actúa por conjugación sobre $S(G)^*$ fielmente, pues $C_G(S(G)) = S(G)$. La condición $|\{g^b \mid b \in Q\}| = \text{cte}$, $\forall\, g \in S(G)^*$ equivale a decir que dicha actuación es 1/2-transitiva (del Teorema 1 se deduce que G actúa por conjugación sobre $S(G)^*$ 1/2-transitivamente, pues $|CL(g)| = \text{cte}$, $\forall\, g \in S(G)^*$, pero esta condición no implica la (**), si bien la sugiere), ahora el resultado es consecuencia inmediata del Teorema 19.6 de (2).

2. GRUPOS CON SOCLE NO RESOLUBLE

En el teorema siguiente obtenemos una acotación superior para una función lineal en $\beta(G)$ y $\alpha(G)$, donde $G \in \mathscr{A}_t$ tiene $S(G)$ no resoluble.

Teorema 2: *Sea $G \in \mathscr{A}_t$ tal que $S(G)$ no es resoluble. Entonces:*

$$t \geqslant 1 + (\beta(G) - 1)3 + \alpha(G)$$

Demostración: Como $S(G)$ no es resoluble, existe L_1 normal minimal no resoluble. Sean $L_2, \ldots, L_{\beta(G)}$ los restantes normales minimales de G.

Afirmamos que para $i > 1$, los únicos normales de G contenidos en $L_1L_i = L_1 \times L_i$ son 1, L_1, L_i y $L_1 \times L_i$ [1]. En efecto, si $N \lhd G$ es tal que $N \neq L_1 \times L_i$, entonces $[N, L_j] \leqslant N \cap L_j = 1$, para $j = 1, i$, luego $N \leqslant C_G(L_j)$, $j = 1, i$, y $N \leqslant C_G(L_1 \times L_i) \cap (L_1 \times L_i) = Z(L_1 \times L_i) = Z(L_1) \times Z(L_i) = Z(L_i) = L_i$ o 1, según sea o no abeliano, así $N \neq L_i$ y L_i minimal implica $N = 1$. Claramente [1] implica:

$$(L_1 \times L_i) \cap (L_1 \times L_j) = L_1, \quad \forall\, i \neq j \geqslant 2 \qquad [2]$$

Sea $\gamma(L_j)$ el número de clases de conjugación de G distintas de $\{1\}$ que componen el normal L_j. Como L_1 no es resoluble entonces $|L_1|$ es divisible por al menos tres primos, luego $\gamma(L_1) \geqslant 3$ [3].

Sea $T = \bigcup_{k \geqslant 1} L_k$. Entonces $(L_1 \times L_i) \cap T = L_1 \cup L_i$ por [1]. Luego los elementos de $L_1 \times L_i - (L_1 \cup L_i)$, que son de la forma:

$$L_1 l_i, \quad l_1 \in L_1^*, \; l_i \in L_i^* \qquad [4]$$

estarán en clases de conjugación de $S(G) - T$. Además, si $l_1 l_i$ y $l_1' l_i'$ son elementos de tipo [4], entonces $CL_G(l_1 l_i) = CL_G(l_1' l_i')$ implica $l_1' \underset{G}{\sim} l_1$ y $l_i \underset{G}{\sim} l_i'$ por ser el producto directo, luego el número de clases de conjugación que originan los elementos [4] es al menos $\gamma(L_1)\gamma(L_i) \geqslant 3\gamma(L_i) \geqslant 3$. De [2] se sigue $((L_1 \times L_i) - (L_1 \cup L_i)) \cap ((L_1 \times L_j)) = \phi$, $\forall\, i \neq j > 1$. Así pues, en $S(G) - T$ tenemos al menos $(\beta(G) - 1)3$ clases de conjugación. Por otro lado, en T tenemos al menos $\beta(G) + 1$ clases de conjugación y en $G - S(G)$ exactamente $\alpha(G)$, luego:

$$r(G) \geqslant \alpha(G) + (\beta(G) - 1)3 + \beta(G) + 1$$

Corolario: *G es un grupo verificando $S(G)$ no resoluble y $\beta(G) = r(G) - a$, con $a \leqslant 8$, si y sólo si, G es uno de los grupos siguientes:*

$$A_7,\ A_5,\ PSL(2, q),\ q = 7, 9, 11, \text{ó } 13,\ SL(2, 8),$$
$$\Sigma_5,\ PGL(2, 7),\ A_5 \times C_2,\ M_9.$$

Demostración: Si $G = S(G) = G_1 \times \cdots \times G_s \times Z(G)$, con los G_i simples no abelianos, entonces $r(G) = r(G_1) \cdots r(G_s)|Z(G)| \geqslant 5^s|Z(G)|$ y $\beta(G) \leqslant s + |Z(G)| - 1$.

Así $5^s|Z(G)| - (s + |Z(G)| - 1) \leqslant r(G) - \beta(G) = a \leqslant 8$ fuerza $s = 1$ y $|Z(G)| \leqslant 2$, luego o $G = A_5 \times C_2$ o G es simple en cuyo caso $r(G) \leqslant 9$ y así aparecen los grupos:

$$A_7,\ A_5,\ PSL(2, 7),\ PSL(2, 9),\ PSL(2, 11),\ PSL(2, 8),\ PSL(2, 13).$$

Supongamos $S(G) < G$, es decir, $\alpha(G) \geqslant 1$. Si $\alpha(G) = 1$ ó 2, entonces G es resoluble, luego podemos suponer $\alpha(G) \geqslant 3$. Si $\alpha(G) = 3$, entonces necesariamente $G = \Sigma_5$ o M_9. Supongamos $\alpha(G) \geqslant 4$. Por el Teorema 2 se tiene $(\beta(G) - 1)3 + \alpha(G) \leqslant 7$, luego $\beta(G) \leqslant 2$. Afirmamos que $\beta(G) = 1$. En efecto, si

$\beta(G) = 2$ y $S(G) = L_1 \times L_2$, entonces $r(G) \leqslant 10$ y el número de clases de conjugación de G que componen $S(G) = L_1 \times L_2$ es al menos:

$$\gamma(L_1)\gamma(L_2) + \gamma(L_1) + \gamma(L_2) + 1 \geqslant 8$$

luego $\alpha(G) \leqslant 2$ #. Así pues, $\beta(G) = 1$ y $r(G) \leqslant 9$. Sea $S(G) = L_1 \simeq A \times \cdot^{t} \cdot \times A$, con $t \geqslant 1$ y A simple no abeliano.

Si $t \geqslant 2$ y p_i $(i = 1, 2, 3)$ son tres primos que dividen a $|A|$, entonces L_1 tiene elementos de órdenes 1, p_1, p_2, p_3, p_1p_2, p_1p_3, y p_3p_2, luego el número de clases de conjugación que compone L_1 es mayor o igual que 7 y, por tanto, $\alpha(G) \leqslant 2$ #. En consecuencia, es $t = 1$ y $S(G) = A$ simple. Como $\alpha(G) \geqslant 4$, entonces:

$$|\{o(g) \mid g \in A\}| = 4 \text{ ó } 5$$

y así $A \in \{A_5, PSL(2, 7), PSL(2, 9), SL(2, 8)\}$.

$C_G(A) \lhd G$, $\beta(G) = 1$ y $A < C_G(A)$ implican $C_G(A) = 1$ y $A < G \leqslant$ Aut-(A).

Si $A = A_5$, $G = \Sigma_5$ y $\alpha(G) = 3$ #.

Si $A = PSL(2, 7)$, $G = PGL(2, 7)$, siendo para este $\alpha(G) = 4$ y $r(G) = 9$.

Si $A = PSL(2, 9)$, entonces $PSL(2, 9) < A \leqslant P\Gamma L(2, 9)$ y $G \in \{PGL(2, 9), PGL^*(2, 9), P\Sigma L(2, 9), P\Gamma L(2, 9)\}$, siendo para estos grupos $r(G) \geqslant 11$ ó $\alpha(G) = 3$ #.

Finalmente, si $A = SL(2, 8)$ entonces $G = P\Gamma L(2, 8) = [PSL(2,8)]C_3$ y $r(G) = 3s + (9 - s)/3 \geqslant 11$ #.

BIBLIOGRAFIA

[1] VERA LÓPEZ, A.: «Tesis Doctoral», enero de 1981, Valencia.
[2] PASSMANN, D. S.: «Permutation Groups», W. A. Benjamín, Inc., Nueva York, 1968.

Departamento de Algebra.
Facultad de Ciencias (Valencia)