Dualidad y tonelación en $\lambda_0(E)$

Por RAFAEL CRESPO

Recibido: 5 de mayo de 1982

Presentado por el académico numerario Manuel Valdivia Ureña

Summary

In this paper we give a representation of the topological dual of the vector valued semi-echelon sequence space $\lambda_0(E)$, and conditions for the barrelledness of this space.

Sumario

En este artículo se da una representación del dual topológico del espacio semi-escalonado vectorial $\lambda_0(E)$ y se encuentran condiciones para la toleración del mismo.

Los espacios vectoriales que usaremos se supondrán definidos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos. Con la palabra espacio designaremos un espacio vectorial topológico localmente convexo y separado E, cuya topología supondremos definida a partir de una familia de seminormas $\{p_i : i \in I\}$. E' designará el dual topológico de E. Para un par dual $\langle E, F\rangle$, $\sigma(E, F)$ y $\beta(E, F)$ son, respectivamente, las topologías débil y fuerte asociadas al par. B^0 representará el polar en F de un subconjunto B de E. Por comodidad al dual fuerte de E lo denotaremos por E'_β. $\mathscr{B}_E$ será la familia de subconjuntos de E, absolutamente convexos y débilmente acotados. Si $B \subset E$, y es cerrado, acotado y absolutamente convexo, E_B denotará el espacio normado que se deriva del calibrador de B. Por $E^{\mathbb{N}}$ y $E^{(\mathbb{N})}$ entenderemos el producto y la suma directa de una cardinalidad numerable de copias de E. Usualmente escribiremos $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y $\varphi = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

Dado A un sistema de escalones se definen:

$$\lambda = \{(b_n) \in \omega : (a_n b_n) \in l^1, \quad \forall\, (a_n) \in A\} \quad \text{(espacio escalonado)}$$

$$\lambda_0 = \{(b_n) \in \omega : (a_n b_n) \in c_0, \quad \forall\, (a_n) \in A\} \quad \text{(espacio semiescalonado)}$$

Siendo λ^x el alfa dual de λ, y $\mathfrak{m}$ una familia de subconjuntos absolutamente convexos, normales $\sigma(\lambda^x, \lambda)$-acotados que formen un sistema topologizador según [1], se define en λ_0 la topología $\mathfrak{m}_0$, que se deriva de las seminormas:

$$q_M((b_n)) = \sup_n \{|a_n b_n| : (a_n) \in M\}, \quad M \in \mathfrak{m}$$

Supondremos, salvo que se indique lo contrario, que λ_0 viene dotado de tal topología. $\mathscr{K}$ denotará la familia de los subconjuntos absolutamente convexos $\sigma(\lambda^x, \lambda)$-relativamente conpactos. Estos espacios se estudian en [1].

Dados λ_0 y E, se define de forma natural el espacio semiescolado vectorial como:

$$\lambda_0(E) = \{(x_n) \in E^{\mathbb{N}} : (p_i(x_n)) \in \lambda_0, \quad \forall\, i \in I\}$$

que resulta ser un espacio al dotarlo con la topología que se deriva de las seminormas:

$$p_{Mi}\big((x_n)\big) = \sup\,(\sup_n |a_n| p_i(x_n) : (a_n) \in M)$$

Estos espacios, análogos a los correspondientes espacios escalonados vectoriales que se estudian en [3] y [8], se definen en [2], donde se dan sus propiedades hereditarias y de representación tensorial.

Pretendemos ver, en primer lugar, en qué condiciones se puede dar una caracterización del dual topológico de $\lambda_0(E)$. Para ello seguiremos un método general ya utilizado en [3], [6] y [8]. Particularmente la adaptación de las técnicas de este último nos parece la más adecuada para nuestro tipo de espacios. Como es evidente al observar las demostraciones, éstas dependen fuertemente del hecho de que las secciones converjan a cada elemento de $\lambda_0(E)$. Por esa razón, supondremos que $\mathfrak{m} \subset \mathscr{K}$ (igualmente se podría, como en [8], caracterizar de partida el dual del subespacio formado por los elementos que sean el límite de sus secciones; la distinción es mínima en virtud de la proposición 10 de [2]). Supondremos también la condición no muy restrictiva de que $\lambda_0' = \lambda_0^x$ (lo cual se da en la mayoría de los casos; ver [1]).

Si $\langle\ ,\ \rangle$ es la forma bilineal asociada al par $\langle E, E' \rangle$, escribimos:

$$\lambda_0(E)^x = \{(u_n) \in (E')^{\mathbb{N}} : (\langle x_n, u_n \rangle) \in l^1,\ (x_n) \in \lambda_0(E)\}$$

Además, al ser λ_0^x perfecto, se puede considerar el espacio:

$$\lambda_0^x(E'_\beta) = \{(y_n) \in (E')^{\mathbb{N}} : \big(q_{B^0}(y_n)\big) \in \lambda_0^x : B \in \mathscr{B}_E\}$$

donde q_{B^0} es el calibrador asociado a B^0.

Proposición 1:

$$\lambda_0(E)^x \subset \lambda_0^x(E'_\beta)$$

Demostración. Sea (y_n) un elemento de $\lambda_0(E)^x$ y sea B $\sigma(E, E')$-acotado bsolutamente convexo, deberemos probar que si:

$$q_{B^0}(y) = \sup\,\{|\langle x, y \rangle| : x \in B\}$$

entonces $\big(q_{B^0}(y_n)\big) \in \lambda_0^x$. En efecto, sea $(b_n) \in \lambda_0$; por definición si (a_n) es un elemento de λ^x, $(a_n b_n) \in c_0$.

Para cada natural n sea x_n un elemento de B tal que:

$$q_{B^0}(y_n) \leqslant |\langle x_n\, y_n\rangle| + 1/2^n \cdot |b_n|, \quad \text{si} \quad |b_n| \neq 0$$

$$q_{B^0}(y_n) \leqslant |\langle x_n, y_n\rangle| + 1/2^n, \quad \text{si} \quad b_n = 0$$

Entonces para todo n se tiene:

$$|b_n| q_{B^0}(y_n) \leqslant |\langle b_n x_n, y_n\rangle| + 1/2^n$$

Al ser B acotado, para toda seminorma p_i en E, existe un r_i positivo tal que:

$$p_i(x_n) \leqslant r_i, \quad n = 1, 2, \ldots$$

luego $|a_n b_n| p_i(x_n) \leqslant r_i |a_n b_n|$, de donde $(a_n b_n p_i(x_n)) \in c_0$ y, por tanto, $(b_n x_n) \in \lambda_0(E)$, y así:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n q_{B^0}(y_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle b_n x_n, y_n\rangle| + \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$$

de donde se deduce la conclusión deseada.

Proposición 2. Si f es una forma lineal continua sobre $\lambda_0(E)$, entonces admite una única representación de la forma:

$$\langle f, (x_n)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n\rangle$$

para todo $(x_n) \in \lambda_0(E)$, siendo (y_n) un elemento de $\lambda_0(E)^{\times}$.

Demostración. Sea e_k el k-ésimo vector unitario de ω. Sea x en E no nulo; para cada n sea y_n en E' tal que:

$$\langle x, y_n\rangle = \langle f, e_n x\rangle, \quad x \in E$$

Por continuidad se puede encontrar i en I, M en m tal que si (x_n) es un elemento de $\lambda_0(E)$:

$$|\langle f, (x_n)\rangle| \leqslant p_{Mi}(x_n))$$

Al ser M acotado coordenada a coordenada, existen reales r_n que son dichas cotas. Así, $y_n \in E'$, pues:

$$|\langle x, y_n\rangle| \leqslant p_{Mi}(e_n x) = \text{sep}\ \{\sup_n |a_n| p_i(e_n x) : (a_n) \in M\} \leqslant r_n \cdot p_i(x)$$

Sea ahora $(x_n) \in \lambda_0(E)$; al ser f continua y como las secciones de (x_n) (x_n^k), convergen en $\lambda_0(E)$ se tiene:

$$\langle f, (x_n)\rangle = \lim_k \langle f, (x_n^k)\rangle = \lim_k \langle f, \sum_{n=1}^{k} e_n x_n\rangle =$$

$$= \lim_k \sum_{n=1}^{k} \langle x_n, y_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n\rangle$$

Tomamos ahora escalares de módulo unidad de forma que:

$$|\langle x_n, y_n\rangle| = h_n\langle x_n, y_n\rangle$$

luego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, y_n\rangle| = \langle f, (h_n x_n)\rangle < +\infty, \quad \text{por lo que} \quad (y_n) \in \lambda_0(E)^x$$

Colorario 3:

$$\bar{\lambda}_0(E)' \subset \lambda_0(E)^x$$

Demostración. Es una reformulación del resultado anterior, identificando espacios.

Estamos ya en condiciones de caracterizar el dual de $\lambda_0(E)$ ahora que vemos que se puede considerar como un espacio de sucesiones vectoriales.

Proposición 4. El dual de $\lambda_0(E)$ es el conjunto de las sucesiones (u_n) con valores en E' tales que para todo n:

$$u_n = b_n y_n$$

siendo (b_n) una sucesión en λ_0^x e (y_n) una sucesión equicontinua en E.

Demostración. Sea (u_n) una sucesión tal y como se la describe en las hipótesis. Sea $(x_n) \in \lambda_0(E)$:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, u_n\rangle\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \cdot |\langle x_n, y_n\rangle|$$

Para todo x en E, y para todo natural n, existe un $i \in I$ tal que:

$$|\langle x, y_n\rangle| \leqslant p_i(x)$$

Sea $(a_n) \in \lambda^x$, tal que $(b_n) \in \lambda_{0a}^x$, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|/|a_n| < +\infty$$

(donde el cociente se supone cero si a_n es cero). Sea $M \in \mathfrak{m}$ de forma que $(a_n) \in M$, entonces:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, u_n \rangle\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|/|a_n| \cdot \sup_n |a_n| p_i((x_n)) \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|/|a_n|\right) p_{Mi}((x_n))$$

luego $(u_n) \in \lambda_0(E)'$.

Recíprocamente sea (u_n) en $\lambda_0(E)'$ siendo f la forma lineal que determina. Por continuidad existen un $i \in I$, $M \in \mathfrak{m}$ con:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, u_n \rangle\right| \leqslant p_{Mi}((x_n))$$

Sea:

$$V = \{x \in E : p_i(x) < 1\} \quad \text{y} \quad q_{V^0}(u) = \sup\{|\langle x, u \rangle| : x \in V\}$$

Aplicando la desigualdad anterior al elemento cuyas coordenadas son todas nulas salvo la n-ésima, que vale x, se tiene:

$$|\langle x, u_n \rangle| \leqslant r_n p_i(x), \quad x \in E$$

donde los r_n son las cotas de las coordenadas de M. Luego $q_{V^0}(u_n) \leqslant r_n$. Escribimos entonces para cada n:

$$y_n = u_n / q_{V^0}(u_n)$$

si el denominador es no nulo, valiendo cero en otro caso. (y_n) es equicontinua en E'.

Sea $(c_n) \in \lambda_0$; para cada n se puede encontrar un x_n en V tal que:

$$q_{V^0}(c_n u_n) \leqslant |\langle x_n, c_n u_n \rangle| + 1/2^n$$

Si denotamos por $(z_n^k) = (c_1 x_1, c_2 x_2, \ldots, c_k x_k, 0, \ldots, 0, \ldots)$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{k} \langle x_n, c_n u_n \rangle = f((z_n^k)) \leqslant p_{Mi}((z_n^k)) \leqslant r$$

donde:

$$r = \sup(\sup |c_n a_n| : (a_n) \in M)$$

luego:

$$(\langle x_n, c_n u_n \rangle) \in l^1$$

y, por tanto:

$$(c_n q_{V^0}(u_n)) \in l^1$$

Es decir:

$$(q_{V^0}(u_n)) \in \lambda_0^x$$

lo que finaliza la demostración.

El siguiente resultado es inmediato:

Corolario 5. Un subconjunto de $\lambda_0(E)'$ es equicontinuo si, y sólo si, es de la forma:

$$\{(b_n y_n) : (b_n) \in \lambda_0^x, (y_n) \subset V^0\}$$

siendo V un entorno de cero en E.

Nos interesará ahora centrarnos en saber bajo qué condiciones se satisface la igualdad $\lambda_0(E)' = \lambda_0^x(E'_\beta)$. Para cualquier espacio λ_0 semiescalonado incluso dotado de la topología seminormal se pueden encontrar espacios E que no satisfagan la igualdad. Sea, por ejemplo, $E[\sigma(E, E')]$ que no sea casi-tonelado. Se puede entonces encontrar en E' un fuertemente acotado que no es finito dimensional. Según sabemos, $\lambda_0(E)'$ está formado por las sucesiones (u_n) de E' que se pueden descomponer como $u_n = b_n y_n$ con $(b_n) \in \lambda_0^x$ y con (y_n) finito dimensional en E'. Si tomamos una sucesión fuertemente acotada e infinito dimensional en E', (z_n), el elemento $(b_n z_n)$ está en $\lambda_0^x(E_\beta)$, pero no en $\lambda_0(E)'$.

Entre aquellos casos en que se verifica la igualdad, y por su sencillez señalamos:

Proposición 6. Si E es normado:

$$\lambda_0(E)' = \lambda_0^x(E'_\beta)$$

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ la norma en E, y consideremos (u_n) en E' tal que $(\|u_n\|) \in \lambda_0^x$; se define $y_n = u_n \cdot \|u_n\|^{-1}$ si $u_n \neq 0$, valiendo cero en otro caso. (y_n) es equicontinua, luego por la proposición 4 (u_n) es continua sobre $\lambda_0(E)$.

La siguiente definición fue dada por Rosier [8], por primera vez y para espacios de sucesiones perfectos. Aquí vamos a extenderla a los espacios de tipo semiescalonados, de forma que si decimos que un espacio de sucesiones la cumple, puede tratarse de un caso u otro indistintamente. Sea E un espacio y λ_0 semiescalonado. Sea A un acotado normal en λ_0 y B un cerrado, acotado y absolutamente convexo en E. Se define:

$$(A, B) = \{(x_n) \in \lambda_0(E) : x_n \in E_B, (p_B(x_n)) \in A\}$$

que obviamente es un acotado en $\lambda_0(E)$. Si $A \subset A'$ y $B \subset B'$ entonces $(A, B) \subset (A', B')$.

Se dice que E es fundamentalmente λ_0-acotado si la colección (A, B) es un sistema fundamental de acotados de $\lambda_0(E)$ cuando A y B recorran sendos sistemas fundamentales de acotados en λ_0 y E.

Esta definición es una generalización de la propiedad (B) de Pietsch (ver [7]) que corresponde al concepto de l^1-acotación fundamental (por supuesto en el contexto de espacios perfectos).

Proposición 7. Si E es fundamentalmente λ_0-acotado para λ_0 semiescalonado, entonces:

$$\lambda_0(E)^x = \lambda_0^x(E'_\beta)$$

Demostración. Por la proposición 1 bastará probar que $\lambda_0^x(E'_\beta) \subset \lambda_0(E)^x$. Sea, pues, (u_n) en $\lambda_0^x(E')$ y sea $(x_n) \in \lambda_0(E)$; se pueden encontrar A y B de forma que $(x_n) \in (A, B)$, luego $(p(x_n)) \in \lambda_0$, y como $(q_{B^0}(u_n)) \in \lambda_0^x$, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, u_n \rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} p_B(x_n) q_{B^0}(u_n) < +\infty.$$

Un espacio E es σ-casi tonelado si toda sucesión fuertemente acotada en E' es equicontinua. Claramente la clase de los espacios σ-casi tonelados contiene a la de los espacios casi tonelados.

Proposición 8. Si E es σ-casi tonelado, y E'_β es fundamentalmente λ_0^x-acotado para λ_0-semiescalonado, entonces:

$$\lambda_0(E)' = \lambda_0^x(E'_\beta)$$

Demostración. Sea (u_n) en $\lambda_0^x(E')$; si D es un acotado $\sigma(E', E)$-cerrado de E' entonces $(q_D(u_n)) \in \lambda_0^x$; así, pues, para cada n se define:

$$y_n = u_n / q_D(u_n)$$

si el denominador no se anula valiendo cero en otro caso. $y_n \in D$, $n = 1, 2, \ldots$, al ser E σ-casi tonelado, la sucesión es equicontinua. Basta aplicar la proposición 4 para asegurar que (u_n) está en $\lambda_0(E)'$.

Como una aplicación de los conceptos anteriores, vamos a estudiar la heredación de las propiedades de tonelación y casi tonelación del espacio E a $\lambda_0(E)$. Para ello, seguiremos el método utilizado con éxito por A. Marquina y J. M. Sanz Serna [5], con respecto al espacio $c_0(E)$. Si bien en aquel caso se usa la noción de la propiedad (B) de Pietsch (fundamental $(c_0)^x$-acotado), aquí necesitaremos los conceptos anteriores.

Supondremos que el espacio semiescalonado λ_0 viene dotado de su topología seminormal, es decir, a partir de las seminormas:

$$q_a((b_n)) = \sup_n |a_n b_n|, \quad a = (a_n) \in \lambda^x$$

Proposición 9. Sea B un acotado, absolutamente convexo de E, y sean $(a_n) \in \lambda^x$, $(u_n) \in \lambda_0(E)'$, entonces $\alpha = \beta$, siendo:

$$\alpha = \sup \{|((x_n), (u_n))| : (x_n) \in \lambda_0(E),\ (a_n x_n) \in B\}$$

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} (1/a_n) \cdot \sup \{|\langle x, u\rangle| : x \in B\}$$

Demostración. Sea $(x_n) \in \lambda_0(E)$ y $(u_n) \in \lambda_0(E)'$:

$$|\langle (x_n), (u_n)\rangle| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, u_n\rangle\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, u_n\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n \cdot \sup \{|\langle x, u_n\rangle| : x \in B\}$$

ya que $(a_n) \in \lambda^x$ y $a_n x_n \in B$. Tomando ahora supremos para (x_n) en $\lambda_0(E)$ con $a_n x_n \in B$ se tiene que:

$$\alpha \leqslant \beta$$

Recíprocamente, sea $\varepsilon > 0$ y k un natural:

$$\sup \{|\langle x, u_i\rangle| : x \in B\} \leqslant \langle a_i x_i, u_i\rangle + \varepsilon a_i/k$$

con $a_i x_i \in B$ y $1 \leqslant i \leqslant k$, es decir:

$$1/a_i \cdot \sup \{|\langle x, a_i\rangle| : x \in B\} \leqslant \langle x_i, u_i\rangle + \varepsilon/k$$

sumando se obtiene:

$$1/a_i \cdot \sup \{|\langle x, u_i\rangle| : x \in B\} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \langle x_i, u_i\rangle + \varepsilon$$

Escojamos el elemento de $\lambda_0(E)$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0, \ldots), \quad a_i x_i \in B,\ 1 \leqslant i \leqslant k$$

entonces:

$$\sum_{i=1}^{k} 1/a_i \cdot \sup \{|\langle x, u_i\rangle| : x \in B\} \leqslant \alpha + \varepsilon, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

de donde si k tiende a infinito $\beta \leqslant \alpha + \varepsilon$, para todo ε, luego $\alpha \geqslant \beta$.

Proposición 10. La topología normal de $\lambda_0^x(E')$ induce en $\lambda_0(E)'$ la topología fuerte $\beta(\lambda_0(E)', \lambda_0(E))$.

Demostración. Sea B un cerrado, acotado, absolutamente convexo en E, y sea $(a_n) \in \lambda^x$. Si:

$$q_{B^0}(u_n) = \sup \{|\langle x, u_n \rangle| : x \in B\}$$

se tiene:

$$\sup \{|\langle (x_n), (u_n) \rangle| : (x_n) \in \lambda_0(E),\ a_n x_n \in B\} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n \cdot q_{B^0}(u_n)$$

Sea $\widehat{B} = \{(x_n) > \lambda_0(E) : a_n x_n > B,\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$ es absolutamente convexo y débil acotado ya que si $(x_n) \in \widehat{B}$, $(u_n) \in \lambda_0(E)' \subset \lambda_0^x(E'_\beta)$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, u_n \rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n \cdot |\langle a_n x_n, u_n \rangle| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n \cdot q_{B^0}(u_n) = r$$

y, por tanto, la igualdad inicial es entre las seminormas que definen la topología $\beta(\lambda_0(E)', \lambda_0(E))$ y la topología normal de $\lambda_0^x(E'_\beta)$. Tengamos en cuenta que los conjuntos $\widehat{B}$ forman un sistema fundamental de acotados en $\lambda_0(E)$.

Proposición 11. El espacio $\lambda_0(E)$ es casi tonelado si, y sólo si, E es casi tonelado y su dual fuerte E'_β es fundamentalmente λ_0^x-acotado.

Demostración. Si E es casi tonelado, en particular es σ-casi tonelado y como E' es fundamentalmente λ_0^x-acotado por la proposición 8:

$$\lambda_0(E)' = \lambda_0^x(E'_\beta)$$

Sea H un acotado para la topología $\beta(\lambda_0(E)', \lambda_0(E))$ en $\lambda_0(E)'$. Por la proposición anterior es acotado en la topología normal de $\lambda_0^x(E'_\beta)$ y al ser E'_β fundamentalmente λ_0^x-acotado, existe un M $\beta(E', E)$-acotado absolutamente convexo y $\sigma(E', E)$-cerrado tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n \cdot q_M(u_n) \leqslant 1$$

al ser E casi tonelado, M es equicontinuo, luego H es equicontinuo por el corolario 5.

Recíprocamente, supongamos que $\lambda_0(E)$ es casi tonelado. La aplicación:

$$r_1 : \lambda_0(E) \longrightarrow E, \quad r_1((x_n)) = x_1$$

es lineal, continua y sobre (ver [2]). Por otro lado, es fácil ver que es abierta, luego es una aplicación cociente y, por tanto, E es casi tonelado. El espacio $\lambda_0(E)'$ es $\beta(\lambda_0(E)', \lambda_0(E))$ casi completo, sucesionalmente denso en $\lambda_0^x(E'_\beta)$ al contener a las secciones de cada elemento, luego por la proposición anterior:

$$\lambda_0(E)' = \lambda_0^x(E'_\beta)$$

Sea H un acotado de $\lambda_0^x(E')$; al ser $\lambda_0(E)$ casi tonelado, es equicontinuo, luego existe un equicontinuo en E'_β tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n \cdot q_U(u_n) \leqslant 1 \quad (U \text{ equicontinuo})$$

para$(u_n) \in H$.

Por el teorema de Banach-Mackey ([4], pág. 254), U es $\beta(E', E)$-acotado, luego E'_β es fundamentalmente λ_0^x-acotado.

Corolario 12. Sea E localmente completo. $\lambda_0(E)$ es tonelado si, y sólo si, E es tonelado y su dual fuerte es fundamentalmente λ_0^x-acotado.

Demostración. Basta usar el resultado anterior y el simple hecho de que $\lambda_0(E)$ es localmente completo si, y sólo si, E lo es.

Los resultados de [5] se obtienen como corolario de los anteriores.

BIBLIOGRAFIA

[1] CRESPO, R.: «Sobre ciertas topologías en los espacios semiescalonados escalares», *Rev. Real Acad. Cienc.*, tomo LXXVI cdo. 3.º (1982), págs. 659-669.

[2] CRESPO, R.: «Una clase de espacios semiescalonados vectoriales», *Rev. Real Acad. Cienc.* (pend. pub.), Madrid.

[3] DE GRANDE-DE KIMPE, N.: «Gegeneralizeerde Rijenruimten», Thesis Utrecht, 1970.

[4] KOTHE, G.: *Topological Vector Spaces I.* Springer Verlag, 1969.

[5] MARQUINA, A., y SANZ SERNA, J. M.: «Barrelledness conditions on $c_0(E)$», *Archiv. der Mat.*, 31, fasc. 6, pág. 588-596, 1978.

[6] PIETSCH, A.: «Verallgemeinerte vollkommene Folgenräume», *Schr. Forschunggsinst. Math. Heftl2*, Berlín, 1962.

[7] PIETSCH, A.: *Nuclear locally convex spaces.* Springer Verlag, 1972.

[8] ROSIER, R.C.: «Dual spaces of certain vector sequence spaces», *Pacific J. Math.*, vol 46 (2), págs. 487-501, 1973.

Facultad de Matemáticas.
Universidad de Valencia