# *Comunicaciones a la Academia*

presentadas en las Sesiones Científicas celebradas en las fechas que se indican

# *Supersimetría N=2 o la magia del cuadrado* (*)

Por GERMÁN SIERRA

*Departamento de Física Teórica, Facultad de Físicas, Universidad Complutense de Madrid*

## Abstract

It is considered the general coupling of $nN = 2$ Maxwell supermultiplets to $N = 2$ supergravity. For the case of symmetric scalar manifolds it is shown a close connection to the theory of Jordan Algebras. If all the vectors belong to an irreducible representation of a non compact group we obtain supergravity theories whose compact and non compact symmetries are given by the magic square of Freudenthal, Rozenfeld and Tits.

En las teorías supersimétricas y en especial las que incluyen la gravedad, los campos escalares parametrizan un espacio Riemanniano $\mathscr{M}$. Las características de dicho espacio $\mathscr{M}$ dependen del número de supersimetrías consideradas, del supermultiplete al que pertenecen y de la dimensión del espacio-tiempo $d$. Un ejemplo lo constituye la supergravedad $N = 8$ en $d = 4$, donde existe un único supermultiplete que contiene 70 campos escalares descritos por el espacio coset $E_{7(7)}/SU(8)$ [1]. En $d = 5$ dicho espacio es $E_6/USp(8)$ [2], mientras que en $d = 3$ es $E_8/SO(16)$ [3]. El conocimiento de estos espacios, deducidos a partir de la reducción dimensional de la supergravedad $N = 1$ en $d = 11$, es la hipótesis previa para la construcción de la teoría.

En el caso de la teoría supersimétrica con $N = 1$ ó 2 existe una mayor variedad de espacios debido a la existencia de distintos supermultipletes irreducibles.

Para $N = 1$ y $d = 4$ los campos escalares pertenecen a multipletes quirales de materia. Si la supersimetría es global el espacio $\mathscr{M}$ es una variedad de Kahler [4]. Al acoplar la materia a la supergravedad $N = 1$ el espacio es de tipo Hodge [5], estando la constante de Newton cuantizada en términos de la constante de autoacoplo de los campos escalares.

La introducción de una supersimetría extra $N = 2$ ofrece nuevas posibilidades. Ahora los campos escalares se encuentran no sólo en multipletes de materia (hipermultipletes), sino en multipletes vectoriales que contienen campos de Maxwell o Yang-Mills.

Los campos escalares de la materia parametrizan variedades de hiper-Kahler [6] si la supersimetría es global y variedades cuaterniónicas [7] si la supersimetría es local.

Cuando los campos escalares pertenecen a multipletes vectoriales la

(*) Presentada en la sesión científica del 14 de marzo de 1984.

variedad escalar $\mathcal{M}$ depende de la dimensión del espacio-tiempo. Así, un multiplete de Maxwell $N = 2$ no contiene campos escalares en $d = 6$ (dimensional maximal para $N = 2$). En $d = 5$ contiene un campo escalar real, que procede de la sexta componente del vector en $d = 6$. Análogamente en $d = 4$ el campo escalar es complejo y en $d = 3$ se tienen cuatro campos escalares previa transformación dual del campo vectorial. El número de campos escalares 1, 2 y 4 en cada dimensión $d = 5, 4, 3$, respectivamente, es un indicio del tipo de geometrías que describen estos modelos, a saber: real, compleja y cuaterniónica.

El modelo que se ha estudiado [8] consiste en el acoplo de $n$ multipletes de Maxwell $N = 2$ a la supergravedad en $d = 5$. El número de campos vectoriales $\{A^I{}_\mu\}$ es $n + 1$ (el vector extra procede del multiplete gravitatorio), y el de campos escalares $\{\phi^x\}$ es $n$. El espacio $\mathcal{M}$ resulta ser una hipersuperficie en un espacio $\mathcal{C}$ de $n + 1$ dimensiones y coordenadas $\xi^I$, dada por la ecuación:

$$N(\xi) = C_{IJK}\xi^I\xi^J\xi^K = 1$$

Las constantes $C_{IJK}$ son las componentes de un tensor simétrico de rango tres definido en el espacio $\mathcal{C}$, y que aparecen en el lagrangiano del modelo en la forma $\varepsilon FFA$:

$$\mathcal{L}_{\varepsilon FFA} = \frac{1}{6\sqrt{6}} C_{IJK}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}F^I_{\mu\nu}F^J_{\lambda\rho}A^K_\sigma$$

El tensor $C_{IJK}$ caracteriza completamente la teoría.

Si nos restringimos a espacios $\mathcal{M}$ simétricos hallamos una correspondencia unívoca entre el modelo y las álgebras de Jordan formalmente reales de grado tres $J$. El polinomio cúbico $N$ se identifica con la norma del álgebra de Jordan, con lo que la hipersuperficie $\mathcal{M}$ es el espacio coset:

$$\mathcal{M}|_{d=5} = \frac{\mathrm{Str}_0\, J}{\mathrm{Aut}\, J}$$

siendo $\mathrm{Str}_0\, J$ (grupo de estructura reducido) el grupo no compacto de invariancia de la norma del álgebra de Jordan $J$ y $\mathrm{Aut}\, J$ su subgrupo maximal compacto.

La reducción dimensional a $d = 4$ da como resultado:

$$\mathcal{M}|_{d=4} = \frac{\mathrm{M\ddot{o}}\,(J)}{\widetilde{\mathrm{Str}}_0\, J \times U(1)}$$

Mö $(J)$ es el grupo de Möbius de $J$ y $\widetilde{\mathrm{Str}}_0\, J$ la forma compacta de $\mathrm{Str}_0\, J$.

En $d = 3$ podríamos utilizar el resultado de Bagger y Witten [7] para obtener los espacios homogéneos cuaterniónicos clasificados por Alekseevski [9] y que denotamos simbólicamente por:

$$\mathcal{M}|_{d=3} = \frac{\text{Grupo excepcional } (J)}{\mathrm{M\ddot{o}}\,(J) \times SU(2)}$$

Además de un caso genérico válido para todo $n$ (=número de multipletes de Maxwell) y donde $N = \xi^0 Q(\vec{\xi})$, existen cuatro casos para los que $N$ es un polinomio irreducible, formando los $n + 1$ vectores una representación irreducible del grupo $\mathrm{Str}_0\, J$. Estos casos están dados por las álgebras de Jordan $J_3^{\mathbb{A}}$ de matrices hermíticas $3 \times 3$ sobre las álgebras de división $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$.

Podemos resumir en una tabla [10] $4 \times 4$ los resultados obtenidos para las simetrías compactas y no compactas en $d = 5$, 4 y 3. Las filas representan los grupos $\mathrm{Aut}\, J_3^{\mathbb{A}}$, $\mathrm{Str}_0\, J_3^{\mathbb{A}}$, $\mathrm{Mö}\, J_3^{\mathbb{A}}$, $\mathrm{Excep}\, (J_3^{\mathbb{A}})$ y las columnas el álgebra de división $\mathbb{A}$. Esta tabla es el cuadrado mágico de Freudenthal, Rozenfeld y Tits [11].

Es interesante observar que la truncación de la supergravedad $N=8$ en $d=$ $= 5$, 4 y 3 conduce a las teorías asociadas a $J_3^{\mathbb{H}}$. En este sentido, $J_3^{\mathbb{O}}$ está más allá de $N = 8$, lo que muestra su carácter no sólo mágico, sino excepcional.

## REFERENCIAS


[1] CREMMER, E., y JULIA, B.: *Nucl. Phys. B.*, 159, 141, 1979.

[2] CREMMER, E.: *Superspace and Supergravity*, Eds S. Hawking y M. Rocek, Cambridge UP, Cambridge, 1980.

[3] MARCUS, N., y SCHWARTZ, J.: Preprint CALT-68-1018, 1983.

[4] ZUMINO, B.: *Phys. Lett.*, 87B, 203, 1979.

[5] WITTEN, E., y BAGGER, J.: *Phys. Lett.*, 115B, 202, 1982.

[6] ALVAREZ-GAUME, L., y FREEDMAN, D. Z.: *Comm. Math. Phys.*, 80, 443, 1981.

[7] BAGGER, J., y WITTEN, E.: *Nucl. Phys. B.*, 222, 1, 1983.

[8] GUNAYDIN, M.; SIERRA, G., y TOWNSEND, P. K.: Preprint LPTENS, 83/32.

[9] ALEKSEEVSKI, D. V.: *Izv. Akad. Nauk.*, SSSR 39, 297, 1975.

[10] GUNAYDIN, M.; SIERRA, G., y TOWNASEND, P. K.: *phys. Lett.*, 133B, 72, 1983.

[11] FREUDENTHAL, H.: *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap*, A62, 447, 1939.
ROZENFELD, B. A.: *Dokl. Akad. Nauk.*, SSSR106, 600, 1956.
TITS, J.: *Mém. Acad. Roy. Belg. Sci.*, 29, fasc. 3, 1955.