Problème spectrale concernant l'opérateur de Laplace et les domaines des polyèdres générés par le systéme de racines de type C

Par P. T. CRACIUNAS[1],
D. L. FERNÁNDEZ[2],
D. MANGERON* et
A. F. SHESTOPAL[4]

Recibido: 3 de febrero de 1982.
Presentado por el académico numerario Darío Maravall Casesnoves.

Résumé

Les auteurs étudient dans ce travail le problèeme spectrale concernant l'opérateur de Laplace dans le domaine du simplex D qui correspond à la série C_n, à savoir au sémi-groupe complexe de Lie à 2n dimensions.

Resumen

Se investiga en esta memoria el problema espectral correspondiente al operador de Laplace en el dominio del simplex D que corresponde a la serie C_n, es decir, al semigrupo complejo de Lie de 2n dimensiones.

1. INTRODUCTION

Quelques années auparavant l'un des auteurs a publié, entre autres, en collaboration avec d'autres chercheurs, nombre de travaux qui s'encadrent dans l'ensemble de problèmes des spectres pour l'opérateur de Lapace dans les polyèdres, qui correspondent, à leur tour, selon la terminologie de N. Bourbaki [1] et la classification cristallisée par Élie Cartan [1] et faite antérieurement par van der Waerden [3], à la suite d'une très ingénieuse application d'une méthode géométrique, à 9 séries d'algèbres sémi-simples de Lie ou bien à 9 séries de groupes sémi-simples de Lie, à savoir B_n, C_n, D_n, A_n,

[1] Institut Polytechnique de Jassy, Iasi, Roumanie.
[2] Instituto de Matemática, Estatîstica e Ciência da Computação (IMECC). Universidades Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, SP, Brasil.
[3] Institut Polytechnique de Jassy, Iasi, Roumanie. A présent: IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil. L'auteur désire exprimer ici sa profonde gratitude à la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FADESP), Brasil, pour le GRANT No. 80/1757-2 et à l'IMECC de l'UNICAMP pour les condicions bien difficiles à surestimer effertes à lui pour développer ses recherches en collaboration dans le cadre de cet Institut.
[4] Institut des Sciences Mathematique de l'Académie des Sciences de la RSS d'Ucraine, Kieve, Ukarin, SSR, U.R.S.S.

F_4, E_6, E_7, E_8 et g_2. Depuis la parution dans l'*Applied Mechanics Reviews* [4] et dans d'autres périodiques, tesl, apr ex., *Mathematical Reviews* et *Zentralblatt für Mathematik und Ihre Grenzgebiete* consacrés à la bibliographie critique des travaux de Mathématiques pures et appliquées et de Mécanique, des comptes rendus assez favorables se référant aux travaux [7]-[8], les recherches dans cet ordre d'idées on été intensifiées et nombre de résultats noveaux relatifs par ex.au probleme des développements des fonctions de Green en séries de solutions fondamentales des opérateurs différentiels linéaires aux dérivées partielles [12], ou bien au problème d'application de la méthode de reflection à la théorie des oscillations [13] et aux problèmes d'évaluation de certains développements en fonctions de Bessel [14] et aux problèmes des spectres pour l'opérateur de Laplace dans les polyèdres à reflection symétrique [15] on été publiés depuis lors.

Tandis que les problèmes spectrales concernant l'opérateur de Laplace dans les domaines qui correspondent aux groupes sémi-simples de Lie A_2, G_2, C_2 on été étudiés dans les travaux [16] et le cas $n = 3$ dans le travail [17], les travaux correspondants aux séries B_n et d_n on été élaborés entre temps, le travail concernant la série F_4 constitue l'un desprojets à réaliser de même que les études concernant les séries d'exception E_6, E_7, E_8 et le type le plus intéressant, à savoir A_n.

Tout en tenant compte du fait que les sémi-groupes de Lie admettent une réalisation géométrique et génèrent dans les espaces à dimensions infinies des groupes finis de reflexion, à savoir les groupes W de Weyl, dont les groupes affines correspondantes W_a sousdivisent l'espace en simplexes et en prenant en considération le fait qu'à chaque série de sémi-groupes correspond un simplex (quoique un même simplex peut correspondre à de séries différentes de sémi-groupes) et la fermetur de chacun de ces simplexes constitue un domaine fondamentale pour W_a, les auteurs étudient dans ce que suit le problème spectrale concernant l'opérateur de Laplace dans le domaine du simplex D qui correspond à la série C_n, à savoir au sémi-groupe complex de Lie à 2n dimensions.

D'après ce que l'on sait, le simplex D peut être décrit par ses poids fondamentaux ω_i et en a pour sommets 0 et ω_i/n_i, où n_i sont les coordonnées de la racine maximale. Dans le cas de la série C_n on a

$$\frac{\omega_i}{n_i} = \frac{a}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i) \tag{1}$$

où $a > 0$, tandis que ε_i constitue une base canonique dans E^n. Puisque ce même simplex D peur être décrit par le système d'inégalités

$$x_i - x_{i+1} > a \quad ; \quad x_n > 0 \quad ; \quad 2x_1 < a \tag{2}$$

de (1) on en déduit les mesures suivantes:

$$\text{mes } D = a^n/(2^n n!) \tag{3}$$

$$a^{n-1}\sqrt{2}/(2^{n-1}(n-1)!) \tag{4}$$

$$a^{n-1}/(2^n(n-1)!) \tag{5}$$

où les deux dernièeres expressions correspondent, respectivement, aux mesures des facettes situées dans les hyperplans

$$H_{i+2} = \{\vec{x} \in E^n,\ x_i - x_{i+1} = 0\}$$

et aux mesures des surfaces des facettes situées dans les hyperplans

$$H_1 = \{\vec{x} \in E^n,\ x_n = 0\} \quad \text{et} \quad H_2 = \{\vec{x} \in E^n,\ 2x_1 = a\}$$

Soit S_{H_i} l'image àumiroir obtenue par reflexión par rapport à l'hyperplans H_i. Il en résulte que $S_{H_{i+2}}(\vec{x})$ est une simple transposition, à savoir une permutation entre x_1^{i+2} et x_{i+1}, tandis que $S_{H_1}(\vec{x})$ ne change que le signe avant x_n et $S_{H_2}(\vec{x})$ résulte d'une composition des images qui change le signe avant x_1 et le transmiet au vecteur $(a, 0, \ldots, 0)$.

Il s'ensuit que le groupe W de Weyl este le produit sémi-directe entre le groupe de permutations des nombres $(1, 2, \ldots, n)$, que nous dénotons par J^n et le groupe $(Z/2Z)^n$ des images $x_i \to (\pm 1)_i x_i$. L'ordre du proupe W de Weyl est égal à $2^n n!$, tandis que le groupe affine W_a de Weyl est donné par

$$W_a = WXQ, \quad \text{où le réseau} \quad Q = aI\vec{S} \quad ; \quad \vec{S} \in Z^n \tag{6}$$

Z étant le groupe de nombres entiers et I — la matrice unitaire de dimensión nXn.

2. PROBLEME DES SPECTRES DANS LE DOMAINE D

Proposons nous d'étudier dans le domaine D le problème àla frontièere qui suit:

$$\begin{aligned} &(-1)^{p-1}\Delta_n^p u(\vec{x}, \vec{\xi}) + \lambda u(x, \vec{\xi}) = \delta\vec{\xi} \quad ; \quad \vec{x} \in D \\ &k_i \partial_{\nu_i}^{2r+1} u + r_i \partial_{\nu_i}^{2r} u = 0 \quad ; \quad \vec{x} \in \vec{D} \cap H_i \end{aligned} \tag{7}$$

ou ν_i est la normale intérieure à $D \cap H_i$, k_i et r_i sont des nombres entiers non négatifs qui satisfont la condiciotn $k_i + r_i = 1, r = 0,1, \ldots, p - 1, p = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, $[x]$ étant la partie entiere du nombre x, $\delta\vec{\xi}$ est la mesure de Dirac concentrée dans le point $\vec{\xi} \in D$ et, enfin, Δ_{n-n} est l'opérateur de Laplace por rapport aux variables x dans E. Pour simplifier, considérons le cas où l'on a

$$k_3 = k_4 = \ldots = k_{n-1}$$

qui nous dispense de formuler les conditions aux arrêts du plyèdere correspondant puisque la suite des égalités ci-dessus assure [17] l'existence de la solution lisse la frontièere incluse.

Notons par $\vec{\xi}_j^{(\sigma)}(\sigma \in J^n)$ le vecteur ayant pour composantes

$$\{(-1)^{J_1}\xi_{\sigma(1)}, (-1)^{J_2}\xi_{\sigma(2)}, \ldots, (-1)^{J_n}\xi_{\sigma(n)}\}$$

et par $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la substitution $\sigma \in J^n$. Si l'on prend pour la norme du pluriindex $\vec{S}$:

$$|\vec{S}| = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

a lieu, dans les suppositions et les notations ci-desus le suivant.

Théorème 1. *La solution du problème spectrale à la frontière* (7), $u(\vec{x}, \vec{\xi}, \lambda)$, *'exprime par la formule*

$$u(\vec{x}, \vec{\xi}, \lambda) = J(\|\vec{x} - \vec{\xi}\|, \lambda) + \\ + \sum_{\vec{S}\in Z^n} \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_n = 0} \sum_{\sigma \in J^n} (p_{k_1 r_1})^{|\vec{S}| + |\vec{j}|} (p_{k_2 r_2})^{|\vec{S}|} (p_{k_s r_s})^{\frac{1-\varepsilon(\sigma)}{2}} T(\|\vec{x} - aI\vec{S} - \vec{\xi}_j^{(\sigma)}\|, \lambda) \tag{9}$$

où $T(\|\vec{x} - \vec{\xi}\|, \lambda)$ *est la solution fondamentale, régulière â l'infini et invariante par rappor au groupe de rotations de l'opérateur* $(-1)^{p-1p}\Delta_n + \lambda I$ *et où l'on suppose* $Jm\lambda \neq 0$

$$|\vec{j}| = j_1 + j_2 + \cdots + j_n$$

J_k *prenant indépendamment l'un de l'autre les valeurs* o *ou* 1 *et* $p_{10} = 1$ *et* $P_{01} = -1$, *tandis que par* $(\Sigma)'$ *on dénote le fait que* $\vec{S} = 0$ *et* $j_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) *ne figurent pas dans le processus de sommation. On a de plus: la série qui entre dans le membre droit de la formula* (9) *converge absolument et uniformément dans* $\overline{D}$ *avec ses dérivées d/ordre quelconque.*

En effect, si l'on a $Jm\lambda \neq 0$, la solution fondamentales régulière $T(\|\vec{x} - \vec{\xi}\|, \lambda)$ decroî exponentiellement à l'infini et la série qui figure dans la formule (9) peut être dérivée terme à terme dans $\vec{D}$. Il est donc nécessaire seulement de démonstrer le fait que par rapport à une partie quelconque de la fronitière $\vec{D} \cap H_i$ la fonction $u(\vec{x}, \vec{\xi}, \lambda)$ peut être représentée sous la forme d'une somme de deux termes, à savoir:

$$T(\|\vec{x} - \vec{\xi}_\mu\|, \lambda) + p_{k_i r_i} T(\|\vec{x} - S_{H_i}(\vec{\xi}_\infty)\|, \lambda)$$

Dans ce but il faut prendre en considération les substitutions unimodulaires en nombres entiers associées à S_{H_i}.

Dans le cas des frontières $\vec{D} \cap H_{i+2}$ la substitution unimodulaire associée à $S_{H_{i+2}}$ a la forme

$$\alpha_{i+2} = \begin{cases} S_i \to S_{i+1} \; ; \; j_i \to j_{i+1} \\ S_k \to S_k \; ; \; k \neq i, i+1 \; ; \; j_{\tilde{p}} \to j_{\tilde{p}} \; ; \; \tilde{p} \neq i, i+1 \\ \sigma(i) \to \sigma(i+1) \end{cases}$$

Puisque par rapport à j la substitution α_{i+2} est une transposition, il en résulte que la signature d/une telle substitution est égale à — 1 et la représentation de solution $u(\vec{x}, \vec{\xi}, \lambda)$ du problème (7) sous forme d'une somme de deux termes (10) a sûrement lieu.

Dans le cas de la frontière $\overline{D} \cap H_1$ on a

$$\alpha_1 = \begin{cases} S_i \longrightarrow S_i \quad ; \quad i \neq n \quad ; \quad j_k \longrightarrow j_k \ (k \neq n) \\ S_n \longrightarrow -S_n \quad ; \quad j_n \longrightarrow j_n + 1 \pmod 2 \\ \sigma(i) \longrightarrow \sigma(i) \end{cases} \tag{12}$$

et, enfin, dans le cas de la frontière $\overline{D} \cap H_2$ la substitution unimodulaire correspondante este donnée par

$$\alpha_2 = \begin{cases} S_i \longrightarrow S_i \ (i \neq 1) \quad ; \quad j_k \longrightarrow j_k \ (k \neq 1) \\ S_1 \longrightarrow S_1 + 1 \quad ; \quad j_1 \longrightarrow j_1 + 1 \pmod 2 \\ \sigma(i) \longrightarrow \sigma(i) \end{cases} \tag{13}$$

et l'on voit que cette dernière substitution de change pas le premier terme qui figure dans la formule (9) et ce fait finit la démonstration du théorème 1.

On en a en outre le suivant

Théorème 2. *Le système complet de solutions caractéristiques* $\varphi_{\Sigma}[(\xi[\,)$ *du problème à la frontière*

$$\begin{aligned} &(-1)^{p-1}\Delta_n\varphi(\vec{\xi}) + \lambda\varphi(\vec{\xi}) = 0 \quad ; \quad \vec{\xi} \in D \\ &k_i\partial^{2r}_{\vec{v}_i}\}^{+1}\varphi + r_i\partial^{2\vec{r}}_{\vec{v}_i}\varphi = 0 \quad ; \quad \vec{\xi} \in \overline{D} \cap H_i \end{aligned} \tag{14}$$

es donné par

$$\varphi_{\vec{S}}(\vec{\xi}) =$$

$$= x_{\vec{S}} \sum_{\sigma \in j''} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} (p_{k_1 r_1})^{|\vec{j}|} (p_{k_s r_s})^{\frac{1-\varepsilon(\sigma)}{2}} \exp \pi i (A^{-1}\vec{S}, \vec{\xi}_j^{(\sigma)}) \tag{15}$$

$$(A = aI)$$

tandis qu/à chaque fonction caractéristique $\varphi_{\vec{S}}(\vec{\xi})$ *corresponde la valeur caractéristique*

$$\lambda_{\vec{S}} = ||\pi A^{-1}\vec{S}||^{2p} \tag{16}$$

$x_{\vec{S}}$ *qui figure dans* (15) *étant donné par*

$$x_{\vec{S}} = \prod_{j=1}^{n} \{1 + p_{k_1 r_1} p_{k_2 r_2} (-1)^{S_j}\}$$

En effet, le problème des spectres (14) se réduit à l'étude sur l'axe réel λ des pôles de la fonction $u(\vec{x}, \vec{\xi}, \lambda)$ et de ses réxidus dans les pôles correspondants. Écrivons dans ce but la solution fondamentale sous forme de l'intégrale de Fourier. On a

$$T(\|\vec{x} - \vec{\xi}\|, \lambda) = \int_{E^n} \frac{\exp 2\pi i(\vec{x} - \vec{\xi}, \vec{\omega})}{\lambda - \|2\pi\vec{\omega}\|^{2p}} d\vec{\omega}$$

En substituant cette expressions dans la formule (9) et en éxécutant la sommation séparément par rapport aux indexes paires et impaires, on obtient

$$u(\vec{x}, \vec{\xi}, \lambda) = \Sigma(p_{k_1 r_1})^{|\vec{J}|}(p_{k_s r_s})^{\frac{1-\varepsilon(\sigma)}{2}} \int_{E^n} \frac{x(\vec{\omega}) \exp 2\pi i \left(\vec{x} - 2a\vec{s} - \vec{\xi}_j^{(\sigma)}, \omega\right)}{\lambda - \|2\pi\vec{\omega}\|^{2p}} d\vec{\omega} \tag{19}$$

où l'on a

$$x(\vec{\omega}) = \prod_{j=1}^{n} (1 + p_{k_1 r_1} p_{k_2 r_2} \exp 2i\pi\omega_j)$$

Puisque l'on a $2p > n$, on peut utiliser dans (19) la formule de sommation de Poisson, ce que nous conduit directement au développement spectrale

$$u(\vec{x}, \vec{\xi}, \lambda) = \frac{1}{(2a)^n} \sum_{\vec{S} \in z^n} \frac{\exp \frac{2\pi i}{2a}(\vec{x}, \vec{S})}{x - \left\|\frac{\pi \vec{S}}{a}\right\|^{2p}} \varphi_{\vec{S}}(\vec{\xi})$$

et par suite à la confirmation de l'assertion du Théorème 2.

Remarques 1. Puisque lors de ces cinq dernières décades nombre d/hommes de science ont montré leur intérêt pour le problèmes des spectres, étudiés en partie pour la primière fois par l'un des auteurs [18], dont le prototype en est le problème àla frontière

$$M_m^{(n)} [M_m^{(n)} [u(x)] + A(x)u(x)] + p\, [M_m^{(n)} [u(x)] \cdot B(x) + C(x)u(x)] = 0,$$

$$u(x)|_{\sigma R} = 0 \quad ; \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad ;$$

$$R = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, m\}$$

où σR est la frontiè de l'hyperrectangle R et l'opérateur $M_m^{(n)}$, appelé opérateur polyvibrant d'ordre n à m dimensions, est défini par

$$M_m^{(n)} \equiv \partial^{mn}/\partial x_1 \partial x \quad .. \; \partial x_m$$

[19]-[23], il serait intéressant d'associer à cet ensemble de problèmes certains domaines caractéristiques, disons certains «pseudopolyèdres» comme d'ailleurs certains algèbres et d'approfondir ce sujet.

2.º Il vaut la peine de mentionner ici que l'une des auteurs et son École encadrent maintenant l'ensemble de problèmes aux opérateurs polyvibrants dans leurs études concernant l'interpolation et l'approximation dans certains espaces abstraits, tels par ex. les espaces de Sobolev, tout en tenant compte de toute une série d'importants résultats concernant differentes classes d'équations fonctionnelles aux opérateurs hyperboliques (qui ne sont pas de nos points de vue que les opérateurs polyvibrants très particuliers) étabilis pour la première fois par Mauro Picone [23], [24].

Dans l'une de nos prochaines Notes on examinera différentes formes des fonctions caractéristiques relatives au problème à la frontière (14(et on étudiera l'évaluation asymptotique pour de grands valeurs du paramètre λ de la fonction spectrale $N(\lambda)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI: *Groupes et algèbres de Lie*, Gauthier-Villars (ed.), Paris, 1970.

[2] A. V. WALFISH: *Points entiers dans les sphères à plusieurs dimensiones* (en Russe). Ed. GruzSSR Acad. Sci., Tbilisi, 1959.

[3] L. VAN DER WAERDEN: «Die Klassification der einfanchen Lieschen Gruppen», *Math. Z.*, 37, 1933. Voir aussi 6 travaux d'Élie Certan dans les chapitres 4-6 du livre de N. Bourbaki (*loc. cit.* [1]).

[4] V. PETROVSKY: «Review of D. Mangeron and A. F. Shestopal», paper published in *Revue de Mécanique Appl*, 9, 4, 835-842 (1964). *Appl. Mech. Rev.*, 4678, p. 636, 18, 3, 1965.

[5] P. GRISVARD: «Reviews of D. Mangeron and A. F. Shestopal», papers published in the *Rev. Roumanie Math. pures appl.*, 9, 863-875 (1964) and 10, 133-143 (1965). *Math. Rev.*, 33, 5, 6139 (1967) and 32, 1, 288 (1966).

[6] V. LAKSHMIKANTHAM: «Reviews of D. Mangeron and A. F. Shestopal», pappers published in the *Mathematica* (Cluj), 5 (28), 233-245 (1963). *Math. Rev.*, 32, 1, 288 (1966). *b*) A. Dou: «Reviews of D. Dangeron and A. F. Shestopal», papers published in the *Rend. Accad. Naz. Lincei* (8) 36, 37-42 (1964) and (8) 38, 605-609 (1965). *Math. Rev.*, 30, 3, 2230 (1965) and 32, 7783 (1966).

[7] D. MANGERON; A. F. SHESTOPAL: «Vibrations problems concerning plates and shells. I. The problem of triangular plates spectre». *Bull. Polytechn. Inst. Jassy, N. S.*, XIV, Sect. 1, 1-2, 73-80 (1964).

[8] ——: «New contributions to the problem of triangular plane spectra». *Revue Roumainesci. Techn. Série Méc. Appl.*, 9, 4, 835-842 (1964).

[9] ——: «Contributions to the study of Green/s functions. I. Expansion of the Green/s function of a linear differential operator in terms of fundamental solutions». *Studii Cercetari Mat.*, 16, 727-739 (1964).

[10] —— :«Sulle funzioni di Green concernenti i poligoni rettililinei semplicemente connessi». *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. nat.*, (8) 38, 605-609 (1965).

[11] ——: «Contributions to the problem of the applications of Green/s function. II. The case of single-valued inversion integral of Schwarz-Christoffel for simply connected rectilinear polygons». *Rev. Roum. Math. pures appl.*, 10, 133-143 (1965).

[12] ——: «Applications to oscillation theory of the reflection method and the method of Green/s function expansion in series of fundamental solutions». *Bul. Inst. Politehn. Bucuresti*, 25, 6, 13-28 (1963).

[13] —— «The problem of the expansion of Green's function of linear differential operators, and certain of its applications to the investigations of oscillatory processes». *Mathematica* (Cluj), 5 (28), 233-245 (1963).

[14] U. D'AAMBROSIO, D. MANGERON, A. F. SHESTOPAL, S. NIANG: «Contributions to the problem concerning asymptotic valuation of the number of eigenvalues. I. Valuation of certain Bessel expansions». *Bull. Polytechn. Inst. Jassay, N. S.*, XXIX, Sect. I, fasc. 3-4, 9-16 (1979).

[15] A. F. SHESTOPAL: «Uber ein Spektralproblem für den Laplace Operator in Gebieten Spiegel-symmetrisc her Polyeder». *Diff. Uravn.*, 15, 725-731 (1979).

[16] ——, M. P. LENJUK: «The twice branched solution of the Cauchy problem for a certain class of parabolic systems». *Ukrain. Mt. Z.*, 23, 110-117 (1971).

[17] ——: *Razlozhenie po fundamental'nym reshenijam ellipticheskikh operatorov*, Naukova Dumka, Kiev, 1968.

[18] D. MANGERON: *a*) «Sul problema al contorno per un' equazione non lineare alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie». *Rend. Accad. Naz. Lincei. Cl. sci. fis., mat. nat.* (6), 16, 305-310 (1932). *b*) «Problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali multiple». *Rend. Accad. Sci. fis., mat.*, Napoli (4), II, 29-40 (1932); *c*) «Nuovi problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali multiple». *Giorn. Mat. Battaglini*, 71, 79-139 (1933) et d'autres encore.

[19] G. BIRKHOFF, W. GORDON: «On the drftsman and related equations. Ch. 4. Mangeron equation». *J. Approx. Theory*, 1, 199-208 (1968).

[20] G. M. NIELSON: *A Mangeron Type Theorem for a Triangular Domain*. SIAM 1976 Fall Meeting. Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, Oct. 18-19 and 20, 1976. Abstracts.

[21] S. EASWARAN: *a*) «Mangeron's Polyvibrating Operators and Their Eigenvalues». *Bull. Acad. Roy. Belg., Cl. Sci.* (5), LIX, 1011-1015 (1973). *b*) *Studies on Mageron polyvibrating equations of higher order*. Doctoral Dissertation. Dept. of Math. The University of Alberta, 1972.

[22] K. V. LEUNG, M. N. OGUZTORELI: «Numerical solutions of various problems concerning polyvibrating or polywave equations of Mangeron». *Rend. Accad.*

Sci. fis. mat., Napoli (4), 40, 52-57; *Bull. Soc. Roy. Sci.*, Liège, 42, 5-6, 269-275; *Bull. Acad. Roy. Belg., Cl. Sci.* (5), LIX, 441-447 (1973).

[23] D. L. FERNÁNDEZ: *a*) *Problemas da teoria de aproximacão e Cáculo das variacões* (àparaître); *b*) *Problèmes d'interpolation et d'approximation dans les espaces de Nikol'ski —Sobolev et applications aux équations polyvibrantes.* I Séminaire sous la direction de l'auteur, organisé à l'ocasion du travail en commun avec M.le Prof. invité D. Mangeron, April, 1981.

[24] *a*) MAURO PICONE: *Duodecim doctorum virorum vitae et operum notitia.* Dans le volume publié par l'Académie des Sciences de la Città di Vaticano, A.D. MCMLXX, 46p.; *b*) CARLO MIRANDA: *Opera scientifica di Mauro Picone*, Memorie dell'Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.