*El producto tensorial (p-r-s)-proyectivo de espacios perfectos de Frechet-Montel**

Por J. A. LÓPEZ MOLINA

Recibido: 2 noviembre 1983

Presentado por el académico numerario Manuel Valdivia Ureña

Abstract

Let λ be a Montel Dubinsky echelon space with decreasing steps. Let μ be a perfect Frechet-Montel space. If τ is the (p-r-s)-projective tensor topology, $\lambda \hat{\otimes}_{\tau} \mu$ is a Montel space.

Resumen

Sea λ un espacio escalonado de Dubinsky con espacios escalones decrecientes, y que es de Montel. Sea μ un espacio perfecto de Frechet-Montel. Si τ es la topología producto tensorial (p-r-s)-proyectivo, $\lambda \hat{\otimes}_{\tau} \mu$ es un espacio de Montel.

1. EL PRODUCTO TENSORIAL (p-r-s)-PROYECTIVO

Los espacios vectoriales usados en este trabajo están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales $\mathbb{R}$ o de los complejos $\mathbb{C}$. Respecto a espacios localmente convexos, seguiremos las notaciones habituales (véase [9]). En particular, si $E[\mathcal{T}_E]$ y $F[\mathcal{T}_F]$ son espacios localmente convexos separados, F'_σ representará el espacio $[F', \sigma(F', F)]$; $\mathcal{L}(E, F'_\sigma)$ será el espacio de todas las aplicaciones lineales continuas de $E[\mathcal{T}_E]$ en F'_σ y $\mathcal{B}(E, F)$ el espacio de las formas bilineales continuas sobre $E[\mathcal{T}_E] \times F[\mathcal{T}_F]$. Dado un par dual $\langle E, F\rangle$, la imagen de $(x, y) \in E \times F$ por la forma bilineal canónica asociada a $\langle E, F\rangle$ se denotará por $\langle x, y\rangle$. Representaremos la norma de un espacio normado E por $\|\cdot\|_E$, el conjunto de los números naturales no nulos por $\mathbb{N}$ y la recta real ampliada por $\overline{\mathbb{R}}$. Si $E[\mathcal{T}_E]$ es un espacio localmente convexo, $\mathcal{U}(E)$ denotará una base de entornos de cero absolutamente convexos y cerrados en $\mathcal{T}_E$ y p_U el calibrador de Minkowski de cada $U \in \mathcal{U}(E)$.

Sea $r \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $r > 0$. Si $\{\lambda_i, i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{K}$, definimos

$$\|(\lambda_i)\|_{l^r} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^r\right)^{1/r} \in \overline{\mathbb{R}} & \text{si} \quad 0 < r < \infty \\ \sup_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i| \in \overline{\mathbb{R}} & \text{si} \quad r = \infty. \end{cases}$$

* Subvencionado en parte por la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica, proyecto número 258/81.

Si $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión en el espacio localmente convexo $E[\mathcal{T}_E]$, para cada $U \in \mathcal{U}(E)$, definimos

$$||(x_i)||_{r, U} = \begin{cases} \sup\limits_{y \in U^0} \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, y \rangle|^r \right)^{1/r} \in \bar{\mathbb{R}} & \text{si } 0 < r < \infty \\ \sup\limits_{y \in U^0} \left(\sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |\langle x_i, y \rangle| \right) \in \bar{\mathbb{R}} & \text{si } r = \infty. \end{cases}$$

Sean ahora p, r, s elementos de $\bar{\mathbb{R}}$ tales que

$$0 < p, r, s \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} < \infty.$$

Dados los espacios localmente convexos $E[\mathcal{T}_E]$ y $F[\mathcal{T}_F]$, para cada $u \in E \otimes F$, $U \in \mathcal{U}(E)$ y $U \in \mathcal{U}(F)$ definimos

$$|||u|||_{U, V} = \inf ||(\lambda_i)||_{l^p} \cdot ||(x_i)||_{r, U} \cdot ||(y_i)||_{s, V} \tag{1}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de u de la forma

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i$$

con $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in E$, $y_i \in F$, $i = 1, 2, ..., n$. Si $q = 1$

$$||u||_{U, V} = |||u|||_{U, V}, \quad \forall\, u \in E \otimes F$$

es una seminorma en $E \otimes F$ (véase [7]). Si $0 < q < 1$, (1) es una q-seminorma en $E \otimes F$ tal que el calibrador de Minkowski $||u||_{U, V}$ de la envoltura convexa del conjunto

$$\{u \in E \otimes F \,/\, |||u|||_{U, V} \leqslant 1\}$$

es una seminorma en $E \hat{\otimes} F$. En cualquier caso se tiene

$$\forall\, x \in E, \forall\, y \in F, \quad ||x \otimes y||_{U, V} = p_U(x) p_V(y). \tag{2}$$

Entonces, para $0 < q \leqslant 1$, la topología producto tensorial (p-r-s)-proyectivo en $E \otimes F$ es la topología localmente convexa τ_{prs} (o τ simplemente si no hay peligro de confusión) en $E \otimes F$ definida por la familia de seminormas

$$\{||\cdot||_{U, V},\ U \in \mathcal{U}(E),\ V \in \mathcal{U}(F)\}.$$

Denotaremos por $E \underset{\tau}{\otimes} F$ el espacio $[E \otimes F, \tau]$. La topología τ es menos fina que la topología proyectiva π y más fina que la topología inyectiva ε (véase [7]). Por tanto $E \underset{\tau}{\otimes} F$ es de Hausdorff si E y F lo son. En tal caso denotaremos por $E \hat{\otimes}_\tau F$ la completación de $E \otimes_\tau F$. El dual $(E \hat{\otimes}_\tau F)'$ es un subespacio de $\mathscr{B}(E, F)$ que contiene a $E' \otimes F'$. La topología producto tensorial (p-r-s)-proyectivo ha sido introducida por Michor en [7] para el caso de espacios de Banach.

Como casos particulares de τ tenemos:

a) $\tau_{1, \infty, \infty} = \pi$ (ver [7]).

b) Si $1/p + 1/p' = 1$, las topologías $\tau_{p, \infty, p'}$ y $\tau_{p, p', \infty}$ coinciden con las topologías g_p y d_p de Saphar (ver [7] y [8]).

c) Si $q = 1$ y $1/s + 1/s' = 1$, $\tau_{p, r, s'}$ es la topología $\alpha_{r, s}$ de Lapreste (ver [6]).

El siguiente resultado, que necesitaremos más adelante, es un caso particular de un teorema de Harksen (ver [2]).

Proposición A. Sea τ una topología tensorial (p-r-s)-proyectiva. Dadas las familias arbitrarias $\{E_a[\mathscr{T}_a], a \in A\}$ y $\{F_b[\mathscr{T}_b], b \in B\}$ de espacios localmente convexos, se tiene el isomorfismo

$$\left(\prod_{a \in A} E_a\right) \hat{\otimes}_\tau \left(\prod_{b \in B} F_b\right) \simeq \prod_{(a, b) \in A \times B} \left(E_a \hat{\otimes}_\tau F_b\right)$$

2. ESPACIOS ESCALONADOS DE DUBINSKY

El conjunto de todas las sucesiones $x = (x_i)$ de elementos de $\mathbb{K}$ se representará por ω, siendo φ el subconjunto de ω formado por las sucesiones con todas las componentes x_i nulas excepto un número finito de ellas. Una notación como (x_{ij}^{nk}) representará una familia de sucesiones dependientes de los índices n, k, j, siendo x_{ij}^{nk} la componente i-ésima de cada sucesión de la familia. A veces escribiremos $(x_{ij}^{nk})_{i=1}^{\infty}$ para destacar el índice que señala las componentes de la sucesión.

La sucesión (x_j) tal que $x_i = 1$ y $x_j = 0$ para $j \neq i$, se representará por $(\bar{e}_i)$. Si $a = (a_i)$, escribiremos $1/a = (1/a_i)$ supuesto que todos los a_i sean no nulos. El resto de la notación utilizada y no definida explícitamente es la habitual en la teoría de espacios de sucesiones (véase [5]). Si λ es un espacio de sucesiones y $a = (a_i)$, se define el transformado diagonal de λ como $a\lambda = \{(a_i x_i)/(x_i) \in \lambda\}$. Llamaremos espacio perfecto de Frechet a un espacio perfecto de sucesiones λ que sea de Frechet con la topología fuerte $\beta(\lambda, \lambda^{\times})$.

Siguiendo a Dubinsky [1], un espacio λ de sucesiones se llamará escalón si se cumple que

1) λ es perfecto.
2) $[\lambda, \beta(\lambda, \lambda^{\times})]$ es normable y completo.
3) $l^1 \subset \lambda \subset l^{\infty}$.

Sea ahora $\{a^k = (a_i^k), k \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de sucesiones de números reales y $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de escalones tales que

4) $0 < a_i^k < a_i^{k+1}$ para todo i, k en $\mathbb{N}$.
5) $\dfrac{1}{a^{k+1}} \lambda_{k+1} \subset \dfrac{1}{a^k} \lambda_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Entonces se dice que (a^k, λ_k) es un sistema escalonado y que

$$\lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} \lambda_k \tag{1}$$

es un espacio escalonado de Dubinsky determinado por (a^k, λ_k). Dado el espacio escalonado (1), consideraremos los espacios

$$A_k = \frac{1}{a^k} \lambda_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Se verifica que $A_k^\times = a^k \lambda_k^\times$ y que

$$\lambda^\times = \bigcup_{k=1}^{\infty} a^k \lambda_k^\times = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^\times$$

(véase [1]).

En cada escalón λ_k y en cada A_k, $k \in \mathbb{N}$, consideraremos siempre las topologías $\beta(\lambda_k, \lambda_k^\times)$ y $\beta(A_k, A_k^\times)$, respectivamente. Si $||\cdot||_{\lambda_k}$ es una norma en λ_k que define la topología $\beta(\lambda_k, \lambda_k^\times)$, entonces $\beta(A_k, A_k^\times)$ está definida por la norma

$$\forall\, (x_i) \in A_k, \quad ||(x_i)||_{A_k} = ||(a_i^k x_i)||_{\lambda_k}.$$

Por tanto, si L_k es la bola unidad cerrada de λ_k, la bola unidad cerrada de A_k es

$$B_k = \frac{1}{a^k} L_k.$$

Si tomamos el polar B_k^0 en $A_k^\times$ para cada $k \in \mathbb{N}$, por 5) y usando una norma equivalente en λ_k y en A_k si es preciso, se puede suponer que

$$B_k^0 \subset B_{k+1}^0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

En λ, consideraremos siempre la topología $\mathscr{T}_\lambda$ definida por la familia de normas

$$\forall\, (x_i) \in \lambda, \quad ||(x_i)||_k = ||(x_i)||_{A_k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Esta familia de normas es creciente con k y la familia de conjuntos

$$U_k(\lambda) = \{(x_i) \in \lambda \,/\, ||(x_i)||_k \leqslant 1/k\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

es una base de entornos de cero para $\mathscr{T}_\lambda$. Dubinsky ha demostrado ([1]) que, dado un conjunto M $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$-acotado, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $M \subset A_k^\times$ y M es $\sigma(A_k^\times, A_k)$-acotado. Entonces $\mathscr{T}_\lambda$ coincide con la topología fuerte $\beta(\lambda, \lambda^\times)$. Además, si $[\lambda, \mathscr{T}_\lambda]$ es de Montel, entonces $\lambda^\times = \lambda'$.

Nota 1. Dado un espacio escalonado de Dubinsky (1), si la sucesión de espacios escalones es tal que $\lambda_{k+1} \subset \lambda_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, como λ_k es un espacio normable, usando una norma equivalente si es necesario, se puede suponer, y supondremos de ahora en adelante en estas circunstancias, que

$$L_{k+1} \subset L_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Entonces 5) es consecuencia de 4) y (3) de 4) y (4).

Definición 1. Una representación reducida del espacio escalonado (1) es una expresión

$$\lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k}\, \theta_k \tag{5}$$

donde $\{\theta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de espacios de sucesiones que verifican las condiciones 2) y 5) anteriores y además las siguientes:

6) $a^k\lambda$ es denso en $[\theta_k,\ \beta(\theta_k,\ \theta_k^\times)]$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

7) Dada una norma $\|\cdot\|_{\theta_k}$ en cada θ_k que defina la topología $\beta(\theta_k,\ \theta_k^\times)$, la topología $\mathscr{T}_\lambda$ en λ está definida por la familia de normas

$$\forall\, (x_i) \in \lambda, \quad \|(x_i)\|_k' = \|(a_i^k x_i)\|_{\theta_k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Necesitaremos para demostrar la proposición 1 un resultado de Y. y T. Komura ([4]):

Proposición B. Sea λ un espacio perfecto de sucesiones. Sea λ_0 la clausura de φ en λ respecto a la topología bornológica asociada con $\beta(\lambda,\ \lambda^\times)$. Entonces $\lambda^\times = (\lambda_0)^\times$ y los conjuntos $\sigma(\lambda^\times,\ \lambda_0)$-acotados y $\sigma(\lambda^\times,\ \lambda)$-acotados de $\lambda^\times$ son los mismos.

Proposición 1. Cada espacio escalonado de Dubinsky (1), tiene una representación reducida (5) tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\theta_k \subset \lambda_k$; $\theta_k^\times = \lambda_k^\times$ y $\beta(\lambda_k,\ \lambda_k^\times)$ induce en θ_k la topología $\beta(\theta_k,\ \theta_k^\times)$.

Demostración. Sea θ_k la clausura de $a^k\lambda$ en λ_k. La clausura $(\lambda_k)_0$ de φ en λ_k respecto a la topología bornológica asociada con $\beta(\lambda_k,\ \lambda_k^\times)$ es la clausura de φ en λ_k por ser λ_k bornológico. Entonces

$$\varphi \subset (\lambda_k)_0 \subset \theta_k \subset \lambda_k$$

y por la proposición B, obtenemos $\theta_k^\times = \lambda_k^\times$. También se deduce de esta proposición que los conjuntos $\sigma(\lambda_k^\times,\ \lambda_k)$-acotados y los $\sigma(\lambda_k^\times,\ \theta_k)$-acotados de $\lambda_k^\times$ son los mismos. Por tanto, $\beta(\lambda_k,\ \lambda_k^\times)$ induce la topología $\beta(\theta_k,\ \theta_k^\times)$ en θ_k y se cumple 2). En θ_k consideraremos la norma inducida por λ_k.

Por definición de θ_k, se verifica 6) y

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \lambda \subset \frac{1}{a^k}\, \theta_k.$$

Entonces, por (1) obtenemos (5). La condición 7) es inmediata. Finalmente, si v_k es la clausura de λ en A_k, $k \in \mathbb{N}$, es fácil ver que $a^k v_k = \theta_k$. Por (3) se verifica $v_{k+1} \subset v_k$, $k \in \mathbb{N}$, con lo cual 5) se cumple para $\{\theta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

En lo sucesivo, dada la representación reducida (5) de λ, escribiremos

$$H_k(\lambda) = \frac{1}{a^k}\,\theta_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

y consideraremos siempre en θ_k y en $H_k(\lambda)$ las topologías $\beta(\theta_k, \theta_k^\times)$ y $\beta(H_k(\lambda), H_k(\lambda)^\times)$, respectivamente; esta última está definida por la norma

$$\forall\ (x_i) \in H_k(\lambda), \quad \|(x_i)\|_{H_k(\lambda)} = \|(a_i^k x_i)\|_{\theta_k}$$

siendo λ denso en $H_k(\lambda)$.

Lema 1. Dado $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, sean V y W:

$$V = \{(x_i) \in \lambda \ / \ \|(a_i^k x_i)\|_{\theta_k} \leqslant \varepsilon\}$$
$$W = \{(x_i) \in H_k(\lambda) \ / \ \|(a_i^k x_i)\|_{\theta_k} \leqslant \varepsilon\}.$$

Entonces V es denso en W y el polar V^0 de V en $\lambda^\times$ coincide con el polar de W en $H_k(\lambda)^\times$.

Demostración. La densidad de V en W es inmediata por la definición de θ_k. Como la convergencia en $H_k(\lambda)$ implica la convergencia coordenada à coordenada, por normalidad de V, obtenemos que $V^0 \subset H_k(\lambda)^\times$ y esto demuestra el lema, pues W es absorbente en $H_k(\lambda)$.

En lo sucesivo, dada una topología tensorial (p-r-s)-proyectiva τ y dados los espacios escalonados de Dubinsky μ y λ, usaremos el siguiente sistema fundamental de entornos de cero en $\mu \underset{\tau}{\otimes} \lambda$:

$$E_{kn} = \{u \in \mu \otimes \lambda \ / \ \|u\|_{U_k(\mu),\, U_k(\lambda)} < 1/kn\}, \quad k,\, n \in \mathbb{N}.$$

Tenemos así:

Lema 2. Sean k, n y m números naturales y

$$W = \{(y_i) \in H_k(\lambda) \ / \ \|(a_i^k y_i)\|_{\theta_k} \leqslant 1/n\}$$
$$F = \{u \in \mu \underset{\tau}{\otimes} H_k(\lambda) \ / \ \|u\|_{U_m(\mu),\, W} < 1/nm\}.$$

Entonces E_{nm} es denso en F respecto a la topología inducida por $\mu \underset{\pi}{\otimes} H_k(\lambda)$ y, por tanto, también respecto a la inducida por $\mu \underset{\tau}{\otimes} H_k(\lambda)$.

Demostración. Si

$$u = \sum_{h=1}^{t} \alpha_h(x_i^h) \otimes (y_i^h) \in F$$

es tal que

$$|||u|||_{U_m(\mu),\, W} < 1/nm, \tag{6}$$

por la densidad de λ en $H_k(\lambda)$, para cada $h = 1, 2, ..., t$, elegimos una sucesión $\{(y_{ih}^n),\ n \in \mathbb{N}\}$ en λ que converge a (y_i^h) en $H_k(\lambda)$. Como W^0 es equicontinuo para $\beta(H_k(\lambda), H_k(\lambda)^\times)$, resulta que

$$u_n = \sum_{h=1}^{t} \alpha_h(x_i^h) \otimes (y_{ih}^n), \quad n \in \mathbb{N}$$

verifica

$$\lim_{v\to\infty} |||u_v - u|||^q_{U_m(\mu),\, W} = 0 \tag{7}$$

y por el lema 1

$$\lim_{v\to\infty} |||u_v|||^q_{U_m(\mu),\, U_n(\lambda)} = \lim_{v\to\infty} |||u|||^q_{U_m(\mu),\, W} = |||u|||^q_{U_m(\mu),\, W}.$$

Entonces, por (6), existe $w_0 \in \mathbb{N}$ con $u_w \in E_{nm}$ si $w \geqslant w_0$ y, por tanto, u_v converge a u en $\mu \underset{\pi}{\otimes} H_k(\lambda)$, ya que (y_i^h) es el límite de $\{(y_{ih}^v),\ v \in \mathbb{N}\}$ en $H_k(\lambda)$, $h = 1, 2, ..., t$.

Como cada elemento de F es una combinación lineal convexa de elementos tales como (6) y la π-topología es más fina que la τ-topología, la demostración queda terminada.

Proposición 2. Sean μ y λ espacios escalonados de Dubinsky:

$$\mu = \bigcap_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^k}\, \mu_k \quad ; \quad \lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k}\, \lambda_k$$

tales que $\lambda' = \lambda^\times$. Sea τ una topología tensorial (p-r-s)-proyectiva. Sea Φ un equicontinuo de $(\mu \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} \lambda)'$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que Φ es equicontinuo en $(\mu \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} H_{k_0}(\lambda))'$.

Demostración. Identificamos $\mathscr{B}(\mu, \lambda)$ con $\mathscr{L}(\mu, \lambda_\sigma^\times)$. Sea $[\lambda^\times, \mathscr{Y}]$ el límite inductivo de la sucesión

$$[H_k(\lambda)^\times,\ \beta(H_k(\lambda)^\times,\ A_k(\lambda))], \quad k \in \mathbb{N}$$

que es un espacio LF. Cada $f \in \Phi$ es una aplicación de μ en $[\lambda^\times, \mathscr{Y}]$ con gráfica cerrada. Por el teorema de Grothendieck, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(\mu) \subset H_k(\lambda)^\times$ y

$$f \in \mathscr{L}(\mu, H_k(\lambda)^\times[\beta(H_k(\lambda)^\times, A_k(\lambda))]).$$

Con mayor razón será $f \in \mathscr{L}(\mu, H_k(\lambda)^\times[\beta(H_k(\lambda)^\times, H_k(\lambda))])$.

Veamos ahora que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \forall f \in \Phi, \quad f(\mu) \subset H_{k_0}(\lambda)^\times \\ \forall k \geqslant k_0, \forall f \in \Phi, \quad f \in \mathscr{L}(\mu, H_k(\lambda)^\times[\beta(H_k(\lambda)^\times, H_k(\lambda))]). \end{aligned} \tag{8}$$

Si (8) no fuera cierto, existirían sucesiones $\{(x_i^n), n \in \mathbb{N}\}$ en μ, $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ en Φ y $\{k_n, n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{N}$ tales que $k_1 = 1$, $k_n < k_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n((x_i^n)) \notin H_{k_n}(\lambda)^\times, f_n((x_i^n)) \in f_n(\mu) \subset H_{k_{n+1}}(\lambda)^\times. \tag{9}$$

Sea entonces $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $\mathbb{K}$ tal que el conjunto $P = \{\alpha_n(x_i^n), n \in \mathbb{N}\}$ sea acotado en el espacio metrizable μ; para cada $(y_i) \in \lambda$, el conjunto $P \otimes (y_i)$ es acotado en $\mu \widehat{\underset{\tau}{\otimes}} \lambda$ y como Φ es equicontinuo, el conjunto

$$M = \{f(\alpha_n(x_i^n)), f \in \Phi, n \in \mathbb{N}\} \subset \lambda^\times$$

es acotado en $\sigma(\lambda^\times, \lambda)$. Entonces existe $h \in \mathbb{N}$ tal que

$$M \subset A_h(\lambda)^\times = H_h(\lambda)^\times$$

lo que contradice lo indicado en (9). Esto, junto a la aplicación del teorema de la gráfica cerrada y la observación que $\beta(H_k(\lambda)^\times, A_k(\lambda))$ es más fina que $\beta(H_k(\lambda)^\times, H_k(\lambda))$, prueba la afirmación (8).

Finalmente, por ser Φ equicontinuo, existe $k \geqslant k_0$ tal que $\Phi \subset E_{kk}^0$. Por (8) se tiene $\Phi \subset (\mu \widehat{\underset{\pi}{\otimes}} H_k(\lambda))'$. Si

$$W = \{(y_i) \in H_k(\lambda) \ / \ \|(a_i^k y_i)\|_{\theta_k} \leqslant 1/k\}$$

y

$$F = \{u \in \mu \underset{\tau}{\otimes} H_k(\lambda) \ / \ \|u\|_{U_k(\mu), W} < 1/k^2\},$$

por el lema 2 se tiene $\Phi \subset F^0$, lo cual demuestra la proposición 2.

3. TEOREMA FUNDAMENTAL

Sean λ y μ espacios escalonados de Dubinsky que sean de Montel.

Nota 2. Bajo esta hipótesis, $\mu^\times = \mu'$. Entonces cada $\psi \in (\lambda \widehat{\underset{\pi}{\otimes}} \mu)' = \mathscr{B}(\lambda, \mu) = \mathscr{L}(\lambda, \mu_\sigma^\times)$ puede representarse por una sucesión doble (c_{ij}) en la que

$$\psi((\bar{e}_i)) = (c_{ij})_{j=1}^\infty \in \mu^\times$$

porque al ser λ de Montel, las sucesiones débilmente convergentes de λ son $\mathscr{T}_\lambda$-convergentes, y entonces, si $(x_i) \in \lambda$

$$\psi((x_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \psi((\bar{e}_i)) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i c_{ij}\right)_{j=1}^{\infty} \in \mu^\times \tag{1}$$

Además, si $(y_j) \in \mu$

$$\psi((x_i), (y_j)) = \langle (y_j), \psi((x_i)) \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} y_j x_i c_{ij}. \tag{2}$$

Si $u \in \lambda \hat{\otimes}_\pi \mu$, escribiremos $\psi(u) = \langle u, (c_{ij}) \rangle$.

Nota 3. Mismas hipótesis. Si $(c_{ij}) \in \mathscr{B}(\lambda, \mu)$ y $T \subset \mathbb{N}$, definimos $(\bar{c}_{ij})$ tal que $\bar{c}_{ij} = c_{ij}$ si $i \in T$ y $\bar{c}_{ij} = 0$ si $i \notin T$. Entonces, dado $(y_j) \in \mu$, existe $U_k(\lambda)$ tal que para cada $(x_i) \in U_k(\lambda)$ se tiene

$$|\langle (x_i) \otimes (y_j), (c_{ij}) \rangle| \leqslant 1.$$

Si $(x_i) \in U_k(\lambda)$, la sucesión $(\bar{x}_i)$ tal que $\bar{x}_i = x_i$ si $i \in T$ y $\bar{x}_i = 0$ si $i \notin T$, también pertenece a $U_k(\lambda)$ por normalidad. Entonces

$$\forall\ (x_i) \in U_k(\lambda), \quad |\langle (x_i) \otimes (y_j), (\bar{c}_{ij}) \rangle| = |\langle (\bar{x}_i) \otimes (y_j), (c_{ij}) \rangle| \leqslant 1.$$

Por tanto $(\bar{c}_{ij}) \in \mathscr{B}(\lambda, \mu)$.

Nota 4. Con las mismas hipótesis, supongamos que

$$z = \sum_{h=1}^{t} \alpha_h (x_i^h) \otimes (y_i^h) = \sum_{h=1}^{t'} \alpha'_h (x_i'^h) \otimes (y_i'^h).$$

Si $T \subset \mathbb{N}$, sea $(\bar{x}_i^h)$ y $(\bar{x}_i'^h)$ como en la nota 3. Entonces, usando el par dual $\langle \lambda \hat{\otimes}_\pi \mu, \mathscr{B}(\lambda, \mu) \rangle$ y la nota 3, es fácil ver que

$$z_T = \sum_{h=1}^{t} \alpha_h (\bar{x}_i^h) \otimes (y_i^h) = \sum_{h=1}^{t'} \alpha'_h (\bar{x}_i'^h) \otimes (y_i'^h).$$

Dubinsky ha probado en ([1]) el siguiente resultado:

Proposición C. Sea λ un espacio escalonado de Dubinsky

$$\lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k} \lambda_k. \tag{3}$$

a) Si λ es de Montel, $\{(a_i^k),\ k \in \mathbb{N}\}$ es fuertemente creciente, es decir, no existe ningún ídice $k_0 \in \mathbb{N}$ ni ningún conjunto infinito $J \subset \mathbb{N}$ tales que exista una sucesión C_k, $k \in \mathbb{N}$ de números reales de forma que

$$\forall\, n \in J,\ \forall\, k \geqslant k_0,\quad a_n^k \leqslant C_k a_n^{k_0}.$$

b) Si $\{(a_i^k),\ k \in \mathbb{N}\}$ es fuertemente creciente y $\lambda_{k+1} \subset \lambda_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces λ es de Montel.

Podemos probar ahora el siguiente teorema:

Teorema 1. Sean λ y μ espacios escalonados de Dubinsky

$$\lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k} \lambda_k \quad ; \quad \mu = \bigcap_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^k} \mu_k \tag{4}$$

que sean de Montel y tales que $\lambda_{k+1} \subset \lambda_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Si τ es una topología tensorial (p-r-s)-proyectiva, $\lambda \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} \mu$ es de Montel.

Demostración. λ y μ son espacios de Frechet-Montel; por tanto, λ y μ son separables y entonces $\lambda \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} \mu$ es separable. Por el teorema de Dieudonné-Gomes, el teorema 1 quedará probado si demostramos que toda sucesión $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ que sea $\sigma((\lambda \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} \mu)',\ \lambda \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} \mu)$-convergente a cero, también es $\beta((\lambda \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} \mu)',\ \lambda \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} \mu)$-convergente.

Si $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ es una tal sucesión, $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ es un equicontinuo en $(\lambda \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} \mu)'$. Por la proposición 1, podemos suponer que (4) es una representación reducida de μ. Como μ es de Montel, tenemos $\mu^\times = \mu'$. Entonces, por la proposición 2, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo en $(\lambda \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} H_{k_0}(\mu))'$ y se verifica que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad f_n \in \mathscr{L}(\lambda,\ H_{k_0}(\mu)^\times [\beta(H_{k_0}(\mu)^\times,\ H_{k_0}(\mu))]) \tag{5}$$

y que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad f_n \in E^0_{k_0,\,k_0}. \tag{6}$$

Si $f_n = (c_{ij}^n)$ (nota 2), para cada $i \in \mathbb{N}$ e $(y_j) \in \mu$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \langle (\bar{e}_i) \otimes (y_j),\ f_n \rangle = 0;$$

entonces $\{(c_{ij}^n)_{j=1}^\infty,\ n \in \mathbb{N}\}$ es $\sigma(\mu^\times,\ \mu)$-convergente a cero; como μ es de Montel es

$$\forall\, i \in \mathbb{N},\quad \lim_{n\to\infty} (c_{ij}^n)_{j=1}^\infty = 0 \quad \text{en} \quad [\mu^\times,\ \beta(\mu^\times,\ \mu)]. \tag{7}$$

Supongamos que $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ no fuera $\beta((\lambda \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} \mu)', \lambda \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} \mu)$-convergente a cero. Entonces existiría una sucesión acotada $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ en $\lambda \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} \mu$, una subsucesión de $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ (que seguimos denotando igual) y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |\langle z_n, f_n \rangle| > \varepsilon. \tag{8}$$

Incluso, por ser $\lambda \underset{\tau}{\widehat{\otimes}} \mu$ metrizable, por densidad, podemos suponer que cada $z_n \in \lambda \otimes \mu$, cambiando cada z_n por un elemento adecuadamente escogido de $\lambda \otimes \mu$ si es necesario. Entonces, sea $\{M_k, k \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $\mathbb{K}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $M_k > 0$, y

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad ||z_n||_{U_k(\lambda),\, U_k(\mu)} < M_k. \tag{9}$$

Supongamos que

$$z_n = \sum_{h=1}^{t_n} \alpha_h^n (x_{ih}^n) \otimes (y_{jh}^n). \tag{10}$$

Las etapas siguientes de la demostración las expondremos en forma de lemas.

Lema 3. Para cada $i \in \mathbb{N}$ es:

$$\lim_{v \to \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |c_{ij}^v| \left| \sum_{h=1}^{h_n} \alpha_n^n x_{ih}^n y_{jh}^n \right| = 0. \tag{11}$$

Demostración. Fijado $i \in \mathbb{N}$, sea

$$L = \left\{ \left(\sum_{h=1}^{h_n} \alpha_h^n x_{ih}^n y_{jh}^n \right)_{j=1}^{\infty}, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mu.$$

La envoltura normal de un conjunto acotado de μ es acotada. Por (7), es suficiente probar que L es $\sigma(\mu, \mu^\times)$-acotado. Dado $(w_j) \in \mu^\times$, es $(\bar{e}_i) \otimes (w_j) \in (\lambda \underset{\tau}{\otimes} \mu)'$. Como $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en $\lambda \underset{\tau}{\otimes} \mu$, se tiene

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} w_j \sum_{h=1}^{h_n} \alpha_h^n x_{ih}^n y_{jh}^n \right| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{h=1}^{h_n} \alpha_h^n x_{ih}^n \sum_{j=1}^{\infty} y_{jh}^n w_j \right| =$$
$$= \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle z_n, (\bar{e}_i) \otimes (w_j) \rangle| < \infty.$$

Entonces L es débilmente acotado.

Lema 4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\varepsilon < \left| \sum_{h=1}^{h_n} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_h^n c_{ij}^n x_{ih}^n y_{jh}^n \right|. \tag{12}$$

De nuevo por el lema 4, existe $v(2) > v(1)$ tal que

$$\varepsilon < \left| \sum_{i=1}^{v(2)} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{h_{m(1)}} \alpha_h^{m(1)} c_{ij}^{m(1)} x_{ih}^{m(1)} y_{jh}^{m(1)} \right|.$$

Por tanto, para $s = 1$ se cumple (13) y (14). Supongamos que se tienen definidos $v(1) < v(2) < \cdots < v(s+1)$ y $m(1) < m(2) < \cdots < m(s)$ de modo que se cumpla (13) y (14). Por el lema 3, existe $m(s+1) > m(s)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{v(s+1)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |c_{ij}^{m(s+1)}| \left| \sum_{h=1}^{h_n} \alpha_h^n x_{ih}^n y_{jh}^n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{15}$$

y por el lema 4 existe $v(s+2) > v(s+1)$ tal que

$$\varepsilon < \left| \sum_{i=1}^{v(s+2)} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{h_{m(s+1)}} \alpha_h^{m(s+1)} c_{ij}^{m(s+1)} x_{ih}^{m(s+1)} y_{jh}^{m(s+1)} \right|. \tag{16}$$

Por tanto, (13) y (14) también se verifican para $s + 1$, construyéndose por inducción las sucesiones del lema 5.

Siguiendo el método de Köthe, elegimos ahora una sucesión $\{d_k, k \geqslant k_0\}$ de números reales positivos tal que

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{k}{d_k} = \frac{1}{2k_0}.$$

Consideremos, para cada $s \in \mathbb{N}$ y cada $k \geqslant k_0$ el conjunto

$$T_{ks} = \left\{ i \in \mathbb{N} \mathbin{/} v(s) + 1 \leqslant i \leqslant v(s+1) \quad \text{y} \quad a_i^k \geqslant \frac{M_k d_k}{\varepsilon} a_i^{k_0} \right\}.$$

Se tiene entonces:

Lema 6. Dado $k \geqslant k_0$ y $s \in \mathbb{N}$, sea D un subconjunto de T_{ks}. Si $(x_i) \in \omega$, sea $(\bar{x}_i)$ la sucesión obtenida a partir de (x_i) haciendo cero las componentes que no están en D. Entonces, si $(x_i) \in U_k(\lambda)$ es

$$\frac{M_k d_k}{\varepsilon} (\bar{x}_i) \in U_{k_0}(\lambda) \tag{17}$$

y si $(w_i) \in U_{k_0}(\lambda)^0$ es

$$\frac{M_k d_k}{\varepsilon} (\bar{w}_i) \in U_k(\lambda)^0. \tag{18}$$

Demostración. Por hipótesis, para todo $k \in \mathbb{N}$ es $\lambda_{k+1} \subset \lambda_k$. Entonces, por la nota 1, como $\lambda' = \lambda^\times$ (por ser λ de Montel) es

$$\left\| \frac{M_k d_k}{\varepsilon} (\bar{x}_i) \right\|_{k_0} = \sup_{(w_i) \in L^0_{k_0}} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{M_k d_k}{\varepsilon} \bar{x}_i a_i^{k_0} w_i \right| =$$

$$= \sup_{(w_i) \in L^0_{k_0}} \sum_{i \in D} \left| \frac{M_k d_k}{\varepsilon} x_i a_i^{k_0} w_i \right| \leqslant \sup_{(w_i) \in L^0_{k_0}} \sum_{i \in D} |x_i a_i^k w_i| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(w_i) \in L^0_k} \sum_{i \in D} |x_i a_i^k w_i| \leqslant \|(x_i)\|_k \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{k_0}$$

con lo que se demuestra (17). (18) es una consecuencia fácil de (17).

Lema 7. Con la misma notación e hipótesis del lema 6, a partir de (10) definimos

$$J_D^n = \sum_{h=1}^{h_n} \alpha_h^n (\bar{x}_{ih}) \otimes (y_{jh}^n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Entonces

$$\|J_D^n\|_{U_{k_0}(\lambda),\, U_k(\mu)} \leqslant \frac{\varepsilon}{d_k}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Demostración. Supongamos primero que $q = 1$. Por (9), para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una representación de z_n, $n \in \mathbb{N}$

$$z_n = \sum_{h=1}^{h_{nm}} \alpha_h^{nm} (x_{ih}^{nm}) \otimes (y_{jh}^{nm}) \tag{21}$$

tal que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad M_m > \|(\alpha_h^{nm})\|_{l^p} \cdot \|(x_{ih}^{nm})\|_{r,\, U_m(\lambda)} \cdot \|(y_{jh}^{nm})\|_{s,\, U_m(\mu)}. \tag{22}$$

Por la nota 4 tenemos

$$J_D^n = \sum_{h=1}^{h_{nm}} \alpha_h^{nm} (\bar{x}_{ih}^{nm}) \otimes (y_{jh}^{nm}), \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

y por (18)

$$\|(x_{ih}^{nk})\|_{r,\, U_k(\lambda)} \geqslant \frac{M_k d_k}{\varepsilon} \|(\bar{x}_{ih}^{nk})\|_{r,\, U_{k_0}(\lambda)}.$$

Entonces, por (22), se obtiene (20).

Si $0 < q < 1$, z_n es una combinación lineal convexa de ciertos z_n^t tales que

$$|||z_n^t|||_{U_k(\lambda),\, U_k(\mu)} < M_k.$$

El elemento J_D^{nt} obtenido de z_n^t tal como en (19), verifica (igual demostración)

$$|||J_D^{nt}|||_{U_{k_0}(\lambda),\, U_k(\mu)} \leqslant \frac{\varepsilon}{d_k}. \tag{23}$$

Entonces J_D^n es una combinación lineal convexa de elementos que cumplen (23); por tanto, se obtiene (20).

Lema 8. Para cada $s \in \mathbb{N}$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $v(s) < i \leqslant v(s+1)$ e $i \notin T_{ks}$ cualquiera que sea $k \geqslant k_0$.

Demostración. Si el lema 8 fuera falso, para cierto $s \in \mathbb{N}$, existirían naturales $k_0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_t$ tales que

$$\{i \,/\, v(s) < i \leqslant v(s+1)\} = \bigcup_{j=1}^{t} T_{k_j s}.$$

Podemos suponer que los conjuntos $T_{k_j s}$ son disjuntos dos a dos (en caso contrario, su reunión se escribiría como unión de subconjuntos de $T_{k_j s}$ disjuntos dos a dos y se trabajaría con estos subconjuntos). También se puede suponer que todos los $T_{k_j s}$ son no vacíos. Consideremos ahora el elemento $J_{D_j}^n$, $n \in \mathbb{N}$, con $D_j = T_{k_j s}$. Por (6), para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k \geqslant k_0$ es $f_n \in E_{k_0,\, k}^0$. Entonces por (14)

$$\frac{\varepsilon}{2} < \sum_{u=1}^{t} \left| \sum_{i \in D_u} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{h_{m(s)}} \alpha_h^{m(s)} c_{ij}^{m(s)} x_{ih}^{m(s)} y_{jh}^{m(s)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{u=1}^{t} \sup_{(c_{ij}) \in E_{k_0,\, k_u}^0} \left| \sum_{i \in D_u} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{h_{m(s)}} \alpha_h^{m(s)} c_{ij} x_{ih}^{m(s)} y_{jh}^{m(s)} \right| =$$

$$= \sum_{u=1}^{t} \sup_{(c_{ij}) \in E_{k_0,\, k_u}^0} \left| \sum_{h=1}^{h_{m(s)}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in D_u} \alpha_h^{m(s)} c_{ij} x_{ih}^{m(s)} y_{jh}^{m(s)} \right| =$$

$$= \sum_{u=1}^{t} \sup_{(c_{ij}) \in E_{k_0,\, k_u}^0} |\langle J_{D_u}^{m(s)}, (c_{ij})\rangle| =$$

$$= \sum_{u=1}^{t} k_0 k_u ||J_{D_u}^{m(s)}||_{U_{k_0}(\lambda),\, U_{k_u}(\mu)} \leqslant \sum_{u=1}^{t} \frac{\varepsilon k_0 k_u}{d_{k_u}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

que es una contradicción. Por tanto, el lema 8 es cierto.

Fin de la demostración del teorema 1. Por el lema 8, para cada $s \in \mathbb{N}$ existe $i_s \in \mathbb{N}$ tal que $v(s) < i_s \leqslant v(s+1)$, y

$$\forall\, k \geqslant k_0, \quad a_{i_s}^k \leqslant \frac{M_k d_k}{\varepsilon}\, a_{i_s}^{k_0}$$

lo cual contradice que $\{(a_n^k),\ k \in \mathbb{N}\}$ es fuertemente creciente por ser λ de Montel (proposición C). Por tanto, $\lambda \widehat{\otimes}_\tau \mu$ es de Montel.

Si $T = \{n_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ y λ es un espacio de sucesiones, definimos el espacio seccional de λ correspondiente a T como

$$\lambda_T = \{(x_i) \in \omega \ /\ \text{existe } (y_i) \in \lambda \text{ con } y_{n_i} = x_i \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}.$$

Dubinsky ([1]) ha demostrado el siguiente resultado:

Proposición D. Si λ es un espacio perfecto de Frechet, necesariamente se verifica una de las siguientes posibilidades

a) $\lambda = \omega$.

b) λ es un espacio escalonado de Dubinsky.

c) $\lambda = \mu \times \omega$, donde μ y ω son subespacios seccionales de λ correspondientes a subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$, disjuntos, cuya unión es $\mathbb{N}$ y μ es un espacio escalonado de Dubinsky.

d) λ es un producto infinito numerable de espacios escalonados de Dubinsky μ_n, $n \in \mathbb{N}$, cada uno de los cuales es un subespacio seccional de λ correspondiente a una parte infinita T_n de $\mathbb{N}$, de forma que los conjuntos T_n, $n \in \mathbb{N}$ son disjuntos dos a dos y su unión es $\mathbb{N}$.

Se tiene entonces:

Teorema 2. Sea λ un espacio escalonado de Dubinsky que sea de Montel y tal que $\lambda_{k+1} \subset \lambda_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Si μ es un espacio perfecto de Frechet-Montel y τ es una topología tensorial (p-r-s)-proyectiva, $\lambda \widehat{\otimes}_\tau \mu$ es un espacio de Montel.

Demostración. Aplicamos la proposición D al espacio μ. Si $\mu = \omega$, como $\lambda \widehat{\otimes}_\tau \mathbb{K} \simeq \lambda$ (porque τ es menos fina que la topología tensorial proyectiva π y más fina que la topología tensorial inyectiva ε), si $\mathbb{K}_n = \mathbb{K}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos, por la proposición A

$$\lambda \widehat{\otimes}_\tau \omega = \lambda \widehat{\otimes}_\tau \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n \right) \simeq \prod_{n \in \mathbb{N}} (\lambda \widehat{\otimes}_\tau \mathbb{K}_n).$$

Entonces $\lambda \widehat{\otimes}_\tau \omega$ es un producto numerable de espacios de Montel y, por tanto, es de Montel.

Si μ está en los casos *b*), *c*) o *d*) de la proposición D, usando la proposición A, el teorema 1 y el resultado recién demostrado del caso *a*), tenemos que en cualquier caso $\lambda \widehat{\bigotimes}_{\tau} \mu$ es un producto finito o numerable de espacios de Montel. Por tanto, $\lambda \widehat{\bigotimes}_{\tau} \mu$ es de Montel.

Es fácil ver, usando el mismo método, que el teorema 2 también se verifica para un espacio perfecto de Frechet Montel, tal que todos los subespacios seccionales de Dubinsky asociados con él, según la proposición D, cumplen las hipótesis impuestas a λ en el teorema 2. En particular, el teorema 2 es cierto cuando λ es un espacio escalonado clásico de Köthe de orden $p \geqslant 1$.

Problema. ¿Es cierto el teorema 1 para espacios escalonados de Dubinsky Montel arbitrarios λ y μ?

BIBLIOGRAFIA

[1] DUBINSKY, E.: «Perfect Frechet spaces», *Math. Ann.*, 174, 186-194 (1967).
[2] HARKSEN, J.: «Charakterisierung lokalkonvexer Räume mit Hilfe von Tensornormtopologien», *Math. Narich.*, 106, 347-374 (1982).
[3] JARCHOW, H.: *Locally convex spaces*, B. G. Teubner, Stuttgart (1981).
[4] KOMURA, T., y KOMURA, Y.: «Sur les espaces parfaits des suites et leurs generalisations», *J. Math. Soc. Japan*, 15, 3, 319-338 (1963).
[5] KOTHE, G.: *Topological vector spaces I*, Springer Verlag (1969).
[6] LAPRESTÉ, J. T.: «Sur une generalisation de la notion d'opperateurs nucleaires et sommantes dans les espaces de Banach», *C. R. Ac. Sc. París. Ser. A.*, 275, 45-48 (1972).
[7] MICHOR, P. W.: «*Functors and categories of Banach spaces*», Lecture Notes in Mathematics, 651, Springer (1978).
[8] SAPHAR, P.: «Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications lineaires», *Studia Math.*, 38, 71-100 (1970).
[9] SCHAEFFER, H. H.: *Topological vector spaces*, Springer (1970).

Cátedra de Matemáticas.
E.T.S.I.A. de Córdoba