# *Escalonados de Abel y compacidad en la $\rho$-dualidad*

Por M. BILBAO

Recibido: 19 enero 1983

*Presentado por el académico numerario Manuel Valdivia Ureña*

## Abstract

The echelon of Abel spaces are introduced and their properties are studied. The analysis of compact sets of sa gives us a characterization of the compactness of the dual pair $(T, T^\wedge)$.

## Resumen

Se introducen los espacios escalonados de Abel estudiándose sus propiedades. El análisis de los conjuntos compactos de *sa* nos proporciona una caracterización de la compacidad en el par dual $(T, T^\wedge)$.

En este trabajo consideramos espacios de sucesiones escalares $T$ que contienen a $\varphi$; utilizaremos notaciones, conceptos y resultados dados en [1].

## 1. REPRESENTACION DE DUALES

Es conocido que el espacio de las sucesiones sumables en sentido de Abel, *sa*, es un $FK$-espacio con elementos a los que no convergen sus secciones, pero en el que las secciones de cada $x$ $A$-convergen al elemento del que provienen, es decir:

$$x = \lim_{t \to 1^-} \left( \lim_n \sum_{i=0}^{n} x_i t^i e_i \right)$$

siendo $e_i : i = 0, 1, \ldots$, los vectores coordenados [9]. En [8] (pág. 62) se da un teorema de dualidad para $FK$-espacios con la propiedad de convergencia de las secciones. Establecemos el siguiente:

*Teorema* 1. Si $T = R(T)$ es un $FK$-espacio con la propiedad de la $A$-convergencia de las secciones, su dual topológico $T'$ y su $\rho$-dual $T^\wedge$ son *isomorfos.*

*Demostración.* Sea $u \in T'$, para $x$ de $T$ cualquiera la propiedad de la $A$-convergencia asegura que:

$$x = \lim_{t\to 1^-} \left( \lim_n \sum_{i=0}^{n} x_i t^i e_i \right)$$

estando ambos límites tomados en el sentido de la topología de $T$. Entonces:

$$u(x) = \lim_{t\to 1^-} \left( \lim_n \sum_{i=0}^{n} x_i u(e_i) t^i \right)$$

con lo que $(u(e_i))$ es un elemento de $T^{\wedge}$, siendo la aplicación inyectiva porque $\{e_i : i = 0, 1\}$ es total en $T$. Es suficiente que la aplicación sea sobre; dado $u$ de $T^{\wedge}$, existe:

$$u(x) = \lim_{t\to 1^-} \sum_{i=0}^{\infty} x_i u_i t^i$$

luego $u$ es una forma lineal sobre $T$. Para cada $j = 1, 2, \ldots$ y cada $n = 0, 1, \ldots$ definimos las formas lineales:

$$u_j^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i u_i \left( \frac{j}{j+1} \right)^i$$

que serán continuas porque $T$ es un $K$-espacio. Con $j$ fijo existe $\lim_n u_j^{(n)}(x)$ para cada $x$ de $T$, luego las formas lineales:

$$u_j(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i u_i \left( \frac{j}{j+1} \right)^i$$

son continuas por el teorema de Banach-Steinhaus. Dado que $u(x) = \lim_j u_j(x)$ es límite puntual de aplicaciones lineales y continuas, el mismo teorema asegura que $u$ pertenece a $T'$.

## 2. ESCALONADOS DE ABEL

Dada la sucesión $a$ de $\omega$ con $a_i \neq 0$, para $i = 0, 1, \ldots$, consideramos el espacio de sucesiones $\rho$-perfecto $[a]^{\wedge} = \{x \in \omega : a \cdot x \in sa\}$. *Diremos que la familia numerable* $\{a^{(n)} : n = 1, 2, \ldots\}$ es un sistema de escalones de Abel si verifica:

1) $a_i^{(n)} \neq 0$ para cada $n = 1, 2, \ldots$, y cada $i = 0, 1, \ldots$

2) Dado $n = 1, 2, \ldots$ existe $m(n) > n$ tal que $\left( \dfrac{a_i^{(n)}}{a_i^{(m(n))}} \right)$ pertenece al dual de Abel *da*.

Llamamos espacio escalonado de Abel a $T_A = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a^{(n)}]\hat{}$, es inmediato comprobar que $T_A$ es $\rho$-perfecto. Dotamos a $T_A$ de la topología dada por la familia numerable de normas:

$$(\|\cdot\| + p_j)^{(n)}(x) = (\|\cdot\| + p_j)(a^{(n)} \cdot x), \quad n = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots$$

donde $\{(\|\cdot\| + p_j)\}$ es la familia de normas que proporciona la topología de *sa*. Denominamos espacio coescalonado de Abel al dual topológico de $T_A$.

*Proposición* 1. $T_A$ es un *FK*-espacio.

*Demostración.* $T_A$ es $K$-espacio porque:

$$|x_i| \leqslant \frac{C}{|a_i^{(n)}|} (\|\cdot\| + p_j)^{(n)}(x)$$

para cada $x$ de $T_A$, donde $C > 0$ existe por ser *sa* un $K$-espacio.

$T_A$ es un espacio localmente convexo metrizable. Sea $\{x^k\}$ una sucesión de Cauchy en el $K$-espacio $T_A$, será de Cauchy en $\sigma(T_A, T'_A)$ y como los vectores coordenados $e_i \in T'_A$, la sucesión $\{x^k\}$ converge coordenadamente a $x^0 \in \omega$. Para cada entero positivo $n$ la aplicación lineal $T_A \longrightarrow sa$ definida por $x \longrightarrow a^{(n)} \cdot x$ es continua, por lo que $\{a^{(n)} \cdot x\}$ es una sucesión de Cauchy en el *FK*-espacio *sa* que converge a un elemento de *sa* que coincide con su límite coordenado $a^{(n)} \cdot x^0$. Entonces $x^0 \in T_A$. Además, fijados $\varepsilon > 0$, $n$ y $j$ existe $k_0$ tal que si $k \geqslant k_0$:

$$(\|\cdot\| + p_j)(a^{(n)} \cdot x^k - a^{(n)} \cdot x^0) = (\|\cdot\| + p_j)^{(n)}(x^k - x^0) < \varepsilon$$

con lo que $T_A$ es un espacio de Fréchet.

*Lema* 1. El espacio vectorial $[a^{(n)}]\hat{}$ con la topología dada por las normas $\{(\|\cdot\| + p_j)^{(n)} : j = 1, 2, \ldots\}$ es isomorfo a *sa* para cada $n$. Dado $n = 1, 2, \ldots$ existe $m(n) > n$ tal que la inyección $[a^{(m(n))}]\hat{} \longrightarrow [a^{(n)}]\hat{}$ es continua.

*Demostración.* El espacio $[a^{(n)}]\hat{}$ es el transformado diagonal ([5], pág. 408) de *sa* mediante la sucesión $\left(\frac{1}{a_i^{(n)}}\right)$. Además son isomorfos en norma dado que si $y$ es de *sa*:

$$(\|\cdot\| + p_j)(y) = (\|\cdot\| + p_j)^{(n)}\left(\frac{y_i}{a_i^{(n)}}\right)$$

La condición 2) para los escalones de Abel implica que $[a^{(m(n))}]\hat{} \subset [a^{(n)}]\hat{}$, y factorizando la inyección:

$$[a^{(m(n))}]\hat{} \longrightarrow sa \longrightarrow sa \longrightarrow [a^{(n)}]\hat{} : x \longrightarrow a^{(m(n))} \cdot x \longrightarrow a^{(n)} \cdot x \longrightarrow x$$

tenemos que las transformaciones diagonales dadas por los vectores $a^{(m(n))}$ y $\left(\frac{1}{a^{(n)}}\right)$ son continuas. Por otro lado, si $T$ es un espacio de sucesiones cualquiera la aplicación lineal:

$$G_u : T(U(T, T^{\wedge})) \longrightarrow sa(U(sa, da))$$

definida por $G_u(x) = u \cdot x$ es continua para cada $u$ perteneciente a $T^{\wedge}$, en particular si $T = sa$ y $u = \left(\frac{a^{(n)}}{a^{(m(n))}}\right)$ la aplicación $sa \longrightarrow sa$ dada por: $a^{(m(n))} \cdot x \longrightarrow a^{(n)} \cdot x$ es continua ya que la condición 2) del sistema de escalones de Abel afirma que $\left(\frac{a^{(n)}}{a^{(m(n))}}\right)$ es un elemento de $da = sa^{\wedge}$.

*Proposición* 2. $T_A$ es límite proyectivo de los espacios $[a^{(n)}]^{\wedge}$ dotados de las topologías derivadas de las normas $\{(||\cdot|| + p_j)^{(n)} : j = 1, 2, \dots\}$.

*Demostración.* Dado que $T_A = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a^{(n)}]^{\wedge}$ dotamos a este espacio vectorial de la topología proyectiva de las topologías de cada $[a^{(n)}]^{\wedge}$. Por el lema 1, cada espacio es de Fréchet, luego $T_A(\tau)$ es un espacio de Fréchet; veamos que la topología dada originalmente a $T_A$ coincide con la topología proyectiva $\tau$. La identidad $I : T_A \longrightarrow T_A(\tau)$ es continua porque la composición $(J_n \circ I)$ es continua para cada $n$, donde $J_n : T_A(\tau) \longrightarrow [a^{(n)}]^{\wedge}$. Entonces el teorema de la aplicación abierta asegura que $I$ es un isomorfismo.

*Proposición 3.* El espacio coescalonado de Abel $T'_A$ coincide con $T_A^{\wedge}$.

*Demostración.* Dado que la topología de $T_A$ es la topología proyectiva respecto a las aplicaciones lineales $G_{a^{(n)}} : T_A \longrightarrow sa$, $n = 1, 2, \dots$ todo elemento $x$ de $T_A$ verifica que sus secciones $A$-convergen al propio $x$. En consecuencia, $T_A$ cumple las hipótesis del teorema 1.

*Proposición* 4. La topología de $T_A$ es la $A$-topología $U(T_A, T_A^{\wedge})$.

*Demostración.* Es suficiente probar que $U(T_A, T_A^{\wedge})$ es más fina que la topología original de $T_A$. Dado un entorno de cero en $T_A$: $V_j^{(n)} = \{x \in T_A : (||\cdot|| + q_j)^{(n)}(x) \leqslant 1\}$ es inmediato comprobar que $V_j^{(n)} = (a^{(n)} \, {}_j^{da})^0$, y como $a^{(n)}$ es de $T_A^{\wedge}$ para $n = 1, 2, \dots$ podemos concluir que $V_j^{(n)}$ es un entorno de cero para $U(T_A, T_A^{\wedge})$.

## 3. COMPACIDAD EN *sa*

Es conocida la caracterización de los compactos en espacios de Banach con base ([6], pág. 166), en [3] se analizan los compactos del espacio de las sucesiones escalares sumables en el sentido de Cesaro. Con objeto de dar un teorema de caracterización establecemos las siguientes propiedades de aproximación:

*Proposición 5.* Sea $C$ un compacto de $sa$. Entonces:

$$\lim_{t \to 1^-} \sup_{x \in C} \{||x - (x_i t^i)||\} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_n \sup_{x \in C} \left\{\sum_{i=n}^{+\infty} |x_i| t^i\right\} = 0$$

para cada real $t \in (0, 1)$.

*Demostración.* Dado $\varepsilon > 0$, la familia $\{x \in sa : ||x - y|| < \varepsilon/4\}_{y \in C}$ es un recubrimiento abierto del compacto $C$, luego existen $y^1, y^2, \ldots, y^h \in C$ verificando: para cada $x$ de $C$ existe $p \in \{1, 2, \ldots, h\}$ con $||x - y^p|| < \varepsilon/4$.
Sabemos que $\lim_{t \to 1^-} (x_i t^i) = x$, por tanto, existe $t_0$ tal que si $t_0 \leqslant t < 1$:

$$||y^p - (y_i^p t^i)|| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad p = 1, 2, \ldots, h$$

Además, para cualquier $t \in (0, 1)$:

$$||(x_i t^i)|| = \sup_{0 \leqslant s < 1} \left|\sum_{i=0}^{\infty} x_i (ts)^i\right| \leqslant ||x||$$

Sea $x$ un elemento de $C$, cuando $t_0 \leqslant t < 1$:

$$||x - (x_i t^i)|| \leqslant ||x - y^p|| + ||y^p - (y_i^p t^i)|| + ||(y_i^p t^i) - (x_i t^i)|| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}$$

Por otro lado, si fijamos $t \in (0, 1)$:

$$\lim_i \sup \sqrt[i]{|x_i t^i|} = t \cdot \lim_i \sup \sqrt[i]{|x_i|} \leqslant t < 1$$

luego $(x_i t^i)$ es un elemento de $l^1$ para cada $x$ de $sa$. La aplicación lineal $sa \longrightarrow l^1$ definida por $x \longrightarrow (x_i t^i)$ es continua porque existe un $j_0$ tal que:
$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i| t^i \leqslant p j_0(x)$, para todo $x$ de $sa$. Como $C$ es compacto en $sa$ el subconjunto $\{(x_i t^i) : x \in C\}$ es compacto en $l^1$, por lo que ([5], pág. 282):

$$\lim_n \sup_{x \in C} \left\{\sum_{i=n}^{\infty} |x_i| t^i\right\} = 0$$

Con objeto de caracterizar a los subconjuntos relativamente compactos de $sa$ introducimos las siguientes notaciones:
Si $x$ pertenece a $sa$, le asociamos la función continua $\bar{f}: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{K}$, definida:

$$\bar{f}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i, \quad 0 \leqslant t < 1 \quad \text{y} \quad \bar{f}(1) = \lim_{t \to 1^-} \sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i$$

Si $C$ es un subconjunto de *sa* le asociamos la familia de funciones continuas $\mathscr{F}_C = \{\bar{f} \in \mathscr{C}([0, 1]) : x \in C\}$.

*Teorema* 2. Sea $C$ un acotado de *sa*. $C$ es relativamente compacto si, y sólo si, $\mathscr{F}_C$ es una familia equicontinua en $\mathscr{C}([0, 1])$.

*Demostración*. Para $x$ de *sa* tenemos:

$$\|x\| = \sup_{0 \leqslant t < 1} \left| \sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i \right| = \sup_{t \in [0, 1]} |\bar{f}(t)|$$

luego si $C$ es relativamente compacto en *sa* la familia $\mathscr{F}_C$ será relativamente compacta en $\mathscr{C}([0, 1])$ y, por tanto, equicontinua.

Recíprocamente, como $C$ es acotado en *sa*, $\mathscr{F}_C$ será acotada y equicontinua en $\mathscr{C}([0, 1])$ y el teorema de Ascoli-Arzelá [2] asegura que $\mathscr{F}_C$ es relativamente compacta en $\mathscr{C}([0, 1])$. Entonces $C$ es relativamente compacto en la topología derivada de la norma $(\|\cdot\|)$. Como el espacio de las series de potencias:

$$\left\{ x \in \omega : \sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i < \infty, t \in (0, 1) \right\}$$

con las normas:

$$p_j(x) = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| \left( \frac{j}{j + 1} \right)^i, \quad j = 1, 2, \ldots$$

es nuclear ([7], pág. 99) en dicho espacio $C$ es relativamente compacto por ser acotado en la topología derivada del sistema $\{p_j : j = 1, 2, \ldots\}$. Dado que el espacio *sa* es completo, $C$ también es relativamente compacto en la topología de *sa* dada por el sistema de normas $\{(\|\cdot\| + p_j) : j = 1, 2, \ldots\}$.

## 4. COMPACIDAD EN EL PAR DUAL $(T, T^{\wedge})$

Mediante las propiedades de los espacios angélicos ([4], pág. 30-31) obtenemos las siguientes equivalencias:

*Proposición* 6. Sea $M$ un subconjunto del espacio de sucesiones $T$ dotado de una topología localmente convexa $\tau$ compatible con el par dual $(T, T^{\wedge})$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

*a*) $M$ es $\tau$-compacto (relativamente).
*b*) $M$ es numerablemente $\tau$-compacto (relativamente).
*c*) $M$ es sucesionalmente $\tau$-compacto (relativamente).
*d*) $M$ es acotado y cada sucesión $\{x^k\} \subset M$ que converge coordenada a

coordenada a un vector $x$ de $\omega$, también converge a $x$ en la topología $\tau$ y $x$ pertenece a $M$ (a su clausura).

*Demostración.* El dual topológico de $T(\tau)$ es $T^\wedge$, en [1] se establece que $T^\wedge(U(T^\wedge, T^{\wedge\wedge}))$ es separable y dado que $\sigma(T^\wedge, T)$ es menos fina, tenemos que $T^\wedge(\sigma(T^\wedge, T))$ es separable. Entonces $T(\tau)$ es un espacio angélico en el que las propiedades *a*), *b*) y *c*) son equivalentes [4].

*c*) $\Rightarrow$ *d*): Supongamos que existe una sucesión $\{x^k\}$ que no converge a $x$ en $\tau$, entonces existe una subsucesión que converge en $\tau$ a un elemento $y \neq x$, lo que contradice *c*).

*d*) $\Rightarrow$ *c*): Dada una sucesión $\{x^k\}$ en el acotado $M$, cada sucesión $\{x_i^k\}$, $i = 0, 1, \ldots$, está contenida en un acotado del cuerpo de escalares y usando un procedimiento diagonal podemos extraer una subsucesión de $\{x^k\}$ *que converge coordenadamente.*

*Corolario.* Sean $\tau$ y $\tau'$ topologías localmente convexas compatibles con el par dual $(T, T^\wedge)$. Ambas tienen los mismos compactos si, y sólo si, tienen las mismas sucesiones convergentes.

*Proposición 7.* Sea $C$ un acotado de $T(U(T, T^\wedge))$. $C$ es relativamente compacto en $U(T, T^\wedge)$ si, y sólo si, para cada $u$ de $T^\wedge$ la familia:

$$\mathscr{F}_C^u = \{\bar{f} \in \mathscr{C}([0, 1]);\ x \cdot u : x \in C\}$$

es equicontinua en $\mathscr{C}([0, 1])$.

*Demostración.* La aplicación $G_u : T(U(T, T^\wedge)) \to sa$ es continua para cada $u$ de $T^\wedge$, así $G_u(C)$ es relativamente compacto en $sa$ y el teorema 2 asegura que $\mathscr{F}_C^u$ es equicontinua.

Recíprocamente, sea $\{x^p : p \in P, \geqslant\}$ una red en $C$, para $u$ de $T^\wedge$ la red $\{u \cdot x^p : p \in P\}$ tiene un punto adherente $u \cdot x$ porque $G_u(C)$ es relativamente compacto en $sa$.

Fijado $j$, para cualquier $p_0$ de $P$ existe $p$ de $P$ con $p > p_0$ tal que:

$$u \cdot x^p - u \cdot x \in U_j = \{y \in sa : (\|\cdot\| + p_j)(y) \leqslant 1\}$$

luego:

$$\sup_{v \in U_j^0} |\langle u \cdot x^p - u \cdot x, v\rangle| = \sup_{v \in U_j^0} |\langle x^p - x, v \cdot u\rangle|$$

por lo que $x^p - x \in (u_j^{da})^0$. En consecuencia, $x$ es un punto adherente a la red $\{x^p : p \in P\}$.

## BIBLIOGRAFIA


[1] BILBAO, M., y PÉREZ CARRERAS, P.: «Una nota en completitud en la $\rho$-dualidad de espacios de sucesiones», *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Tomo LXXVII, cuaderno 1.º (1983).

[2] DUNFORD, N., y SCHWARTZ, J. T.: *Linear Operators, Part I*, General Theory, Nueva York, Interscience Publishers (1958).

[3] FLORENCIO, M., y PÉREZ CARRERAS, P.: «Sobre sumabilidad Cesaro en el espacio *CS*-II», *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Tomo LXXVI, cuaderno 3.º (1982).

[4] FLORET, K.: «Weakly Compact Sets», *Lecture Notes in Mathematics*, 801, Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer (1980).

[5] KÖTHE, G.: *Topological Vector Spaces I*, Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer (1969).

[6] LUSTERNIK, L. A., y SOBOLEV, V. J.: *Elements of Functional Analysis*, Delhi, Hindustan Publishing Corporation (1974).

[7] PIETSCH, A.: *Nuclear Locally Convex Spaces*, Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer (1972).

[8] RUCKLE, W. H.: *Sequence Spaces*, Boston-Londres-Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program (1981).

[9] ZELLER, K. *Theorie der Limitierungsverfharen*, Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer (1958).



Departamento de Matemáticas.
E.T.S. Ingenieros Industriales
41012 Sevilla.