Espacios de Abel de orden λ y ρ-dualidad extendida

Por M. BILBAO

Recibido: 19 enero 1983

Presentado por el académico numerario Manuel Valdivia Ureña

Abstract

We define the sequence spaces $sa(\lambda)$ and $ca(\lambda)$ through the methods of summability extendidly from Abel studies it its topological properties with a special type of matrix operator. The familiy of dualities $\rho(\lambda\ )$ are studied.

Resumen

Se introducen los espacios de sucesiones $sa(\lambda)$ y $ca(\lambda)$ mediante los métodos de sumabilidad extendida de Abel estudiando sus propiedades topológicas con un tipo especial de operadores matriciales. Se definen y analizan una familia de dualidades $\rho(\lambda)$.

1. OPERADORES MATRICIALES. DEFINICIONES

Sea ω el espacio de todas las sucesiones escalares y $C_\lambda : \omega \longrightarrow \omega$ el operador lineal definido por:

$$C_\lambda(x) = \left(\frac{1}{\binom{i+\lambda}{i}} \sum_{j=0}^{i} \binom{i-j+\lambda-1}{i-j} x_j \right)$$

donde:

$$\binom{i+\lambda}{i} = \frac{\Gamma(i+\lambda+1)}{i!\Gamma(\lambda+1)}, \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Es conocido [4] que:

$$a) \quad \sum_{j=0}^{i} \binom{i-j+\alpha}{i-j} \binom{j+\beta}{j} = \binom{i+\alpha+\beta+1}{i}, \text{ para } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Si $\lambda > -1$, el operador matricial C_λ *es invertible y* $C_\lambda^{-1} : \omega \longrightarrow \omega$ está definido por:

$$C_\lambda^{-1}(x) = \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i-j-\lambda-1}{i-j}\binom{j+\lambda}{j} x_j\right)$$

D. Borwein, en [1], define los métodos de sumabilidad extendida de Abel, A_λ, como sigue:

«$(s_i) \in \omega$ es A_λ-convergente a s cuando:

$$f_\lambda(t) = (1-t)^{\lambda+1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+\lambda}{i} s_i t^i$$

converge en $t \in (0, 1)$ y existe $\lim\limits_{t \to 1^-} f_\lambda(t) = s$.»

Diremos que $(x_i) \in \omega$ es A_λ-sumable a s cuando la sucesión $(s_i) = \left(\sum_{j=0}^{i} x_j\right)$ sea A_λ-convergente a s. En el caso de que $\lambda = 0$ obtenemos el método de Abel ordinario.

Es inmediato probar que los subconjuntos de ω:

$$ca(\lambda) = \{x \in \omega : x \text{ es } A_\lambda\text{-convergente}\}$$
$$sa(\lambda) = \{x \in \omega : x \text{ es } A_\lambda\text{-sumable}\}$$

son espacios de sucesiones para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda = 0$, denotamos $ca(0) = ca$ y $sa(0) = sa$.

Proposición 1. Los espacios de sucesiones ca y $ca(\lambda)$ son isomorfos para $\lambda \geqslant 0$.

Demostración. Probaremos que C_λ es un isomorfismo de ca sobre $ca(\lambda)$ cuando $\lambda \geqslant 0$. Sea x un elemento de ca, entonces:

$$f(t) = (1-t) \sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i$$

converge en $t \in (0, 1)$ y existe $\lim\limits_{t \to 1^-} f(t)$; si $\lambda \geqslant 0$ tenemos:

$$(1-t)^{-\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+\lambda-1}{i} t^i, \quad \text{para } t \in (-1, 1)$$

Entonces:

$$f(t) = (1-t)^{\lambda+1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+\lambda-1}{i} t^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i\right) =$$

$$= (1 - t)^{\lambda+1} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i - j + \lambda - 1}{i - j} x_j \right) t^i =$$

$$= (1 - t)^{\lambda+1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i + \lambda}{i} (C_\lambda(x))_i t^i$$

Por tanto, $C_\lambda(x)$ pertenece a $ca(\lambda)$.

Veamos que $C_\lambda^{-1} : ca(\lambda) \longrightarrow ca$. Si y está en $ca(\lambda)$, $C_\lambda^{-1}(y) = x$ es un elemento de ω. Dado que:

$$f(t) = (1 - t) \sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i = (1 - t)^{\lambda+1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i + \lambda}{i} (C_\lambda(x))_i t^i, \quad \text{con } t \in (0, 1)$$

f cumple las condiciones de la convergencia de Abel, luego x pertenece a ca. El resultado se sigue de ([3], pág. 61).

Corolario. Los espacios de sucesiones $ca(\lambda)$ y $ca(\mu)$ son isomorfos para λ, $\mu \geqslant 0$.

Con objeto de establecer resultados análogos para $sa(\lambda)$ y sa consideremos los operadores matriciales $D : \omega \longrightarrow \omega$, $D(x_i) = (x_0, x_1 - x_0, \ldots, x_i - x_{i-1}, \ldots)$ y su inverso $D^{-1} : \omega \longrightarrow \omega$, $D^{-1}(x_i) = \left(\sum_{j=0}^{i} x_j \right)$.

Denominamos A_λ al operador matricial $DC_\lambda D^{-1} : \omega \longrightarrow \omega$; A_λ será invertible cuando $\lambda > -1$ y $A_\lambda^{-1} = DC_\lambda^{-1} D^{-1}$. Dado que D^{-1} es un isomorfismo de $sa(\lambda)$ sobre $ca(\lambda)$ y D es un isomorfismo de ca sobre sa tenemos que A_λ^{-1} será un isomorfismo de $sa(\lambda)$ sobre sa. De manera análoga A_λ es un isomorfismo de sa sobre $sa(\lambda)$. En ambos casos debemos suponer que $\lambda \geqslant 0$. Entonces queda establecida:

Proposición 2. Los espacios de sucesiones $sa(\lambda)$ y $sa(\mu)$ son isomorfos para λ, $\mu \geqslant 0$.

Nota 1. Sean e_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, los vectores unitarios i-ésimos de ω y sea $e = (1, 1, 1, \ldots)$:

$$A_\lambda(e_0) = DC_\lambda(e) = D\left(\frac{1}{\binom{i + \lambda}{i}} \sum_{j=0}^{i} \binom{i - j + \lambda - 1}{i - j} \right) =$$

$$= D\left(\frac{1}{\binom{i + \lambda}{i}} \sum_{j=0}^{i} \binom{i - j + \lambda - 1}{i - j} \binom{j}{j} \right) = D(e) = e_0$$

$$A_\lambda(e) \quad = \quad DC_\lambda(1, \quad 2, \quad ..., \quad i \quad + \quad 1, \quad ...) \quad =$$

$$D\left(\frac{1}{\binom{i+\lambda}{i}} \sum_{j=0}^{i} \binom{i-j+\lambda-1}{i-j}\binom{j+1}{j}\right) =$$

$$= D\left(\frac{\binom{i+\lambda+1}{i}}{\binom{i+\lambda}{i}}\right) = D\left(1 + \frac{i}{\lambda+1}\right) = \left(1, \frac{1}{\lambda+1}, \ldots, \frac{1}{\lambda+1}, \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda+1}\{e + \lambda e_0\}$$

Entonces $A_\lambda^{-1}(e) = (\lambda + 1)e - \lambda e_0$.

Nota 2. En [1] se establece que $ca(\lambda) \subset ca(\mu)$ para $\lambda > \mu > -1$, es obvio que $sa(\lambda) \subset sa(\mu)$ para $\lambda > \mu > -1$ y en particular que $sa(\lambda) \subset sa$ para cualquier $\lambda > 0$. Además, en el artículo citado se proporcionan ejemplos que separan dichos espacios.

2. PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE $sa(\lambda)$

Proporcionaremos a $sa(\lambda)$, con $\lambda > 0$, dos topologías localmente convexas a partir de la topología dada a sa por el sistema de normas:

$$||x|| + p_j(x) = \sup_{0 \leqslant t < 1} \left|\sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i\right| + \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|\left(\frac{j}{j+1}\right)^i; \quad j = 1, 2, ...$$

Es conocido [5] que entonces sa es un FK-espacio que posee la propiedad de que las secciones de cualquier elemento A-convergen a dicho elemento y que el dual topológico de sa coincide con su ρ-dual. Este espacio es:

$$da = \left\{u \in \omega : u_i = \int_0^1 t^i \, d\alpha + c_i, i = 0, 1, ...; \alpha \in BV([0, 1]), c_i = 0(\sigma^i), 0 < \sigma < 1\right\}$$

Para cada $\lambda > 0$ sea τ la topología inducida en $sa(\lambda)$ por la topología de sa. En este caso $sa(\lambda)[\tau]$ no es completo como pone de manifiesto la:

Proposición 3. Los espacios $sa(\lambda)$, con $\lambda > 0$, son densos en sa.

Demostración. En primer lugar establecemos que el espacio φ está contenido en $sa(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$. Para ello es suficiente que cada vector coordenado e_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, sea un elemento de $sa(\lambda)$, lo cual equivale a que las sucesiones $s_0 = (1, 1, \ldots)$, $s_1 = (0, 1, 1, \ldots)$, ..., $s_j = (0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots)$ pertenezcan a $ca(\lambda)$ para $j = 0, 1, 2, \ldots$

Sabemos que el vector e pertenece a ca porque el método de Abel es regular, entonces $C_\lambda(e) = e$ será un elemento de $ca(\lambda)$. La función:

$$f_\lambda(t) = (1 - t)^{\lambda+1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i + \lambda}{i} t^i$$

converge en $(0, 1)$ y tiene límite finito cuando $t \longrightarrow 1$ en $(0, 1)$.

En consecuencia, las funciones:

$$f_\lambda^j(t) = (1 - t)^{\lambda+1} \sum_{i=j}^{\infty} \binom{i + \lambda}{i} t^i, \quad \text{con } j = 1, 2, 3, \ldots$$

tienen las mismas propiedades y s_j está en $ca(\lambda)$ para cada j natural.

La propiedad de A- convergencia de las secciones que verifican todos los elementos de sa implica que el espacio φ es denso en sa, luego también lo serán todos los $sa(\lambda)$.

Dotaremos a $sa(\lambda)$, con $\lambda > 0$, con la topología τ_λ que deriva de la familia de normas $\{p_j^\lambda\}_{j=1,2\ldots}$, donde:

$$p_j^\lambda(x) = \|A_\lambda^{-1}(x)\| + p_j(A_\lambda^{-1}(x))$$

Dado que $sa(\lambda)[\tau_\lambda]$ es un espacio de Fréchet y A_λ^{-1} es un operador lineal, biyectivo y continuo, podemos asegurar:

Proposición 4. Los espacios $sa(\lambda)[\tau_\lambda]$ y sa son topológicamente isomorfos.

Nota 3. Dado un elemento x de $sa(\lambda)$, $A_\lambda^{-1}(x)$ es un elemento de sa que cumple:

$$A_\lambda^{-1}(x) = \lim_{t\to 1^-} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} [A_\lambda^{-1}(x)]_i t^i e_i$$

El operador $A_\lambda : sa \longrightarrow sa(\lambda)$ es lineal y continuo, luego:

$$x = \lim_{t\to 1^-} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} [A_\lambda^{-1}(x)]_i t^i A_\lambda(e_i)$$

en la topología dada a $sa(\lambda)$. Así, el conjunto $\{A_\lambda(e_i)\}$ es denso en $sa(\lambda)$.

Teorema 1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) v es una forma lineal y continua sobre $sa(\lambda)$.
ii) Para cada x de $sa(\lambda)$:

$$v(x) = \lim_{t\to 1^-} \sum_{i=0}^{\infty} [A_\lambda^{-1}(x)]_i [A_\lambda(v_i)]_i t^i$$

donde (v_i) es un elemento de $A_\lambda^{-1}(da)$.

Demostración. Como v es lineal y continua, si x está en $sa(\lambda)$ tenemos:

$$v(x) = \lim_{t\to 1^-} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} [A_\lambda^{-1}(x)]_i t^i v(A_\lambda(e_i))$$

La aplicación $u = vA_\lambda$ es una forma lineal y continua sobre sa; es conocido que $(u(e_i)) = (u_i)$ es un elemento del espacio da, donde $u_i = vA_\lambda(e_i)$. Denominaremos (v_i) a $A_\lambda^{-1}(u_i)$ que está en el espacio $A_\lambda^{-1}(da\ )$ *obteniendo:*

$$v(x) = \lim_{t\to 1^-} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} [A_\lambda{}^{-1}(x)]_i [A_\lambda(v_i)]_i t^i$$

Recíprocamente, si v pertenece a $A_\lambda^{-1}(da)$, $A_\lambda(v)$ es un elemento de da y será una forma lineal continua sobre sa, por lo que $v = A_\lambda^{-1} A_\lambda(v)$ es un elemento del dual topológico de $sa(\lambda)$.

Como consecuencia de este teorema podemos identificar el dual topológico de $sa(\lambda)$ con el espacio de sucesiones $A_\lambda^{-1}(da)$ que denotaremos $da(\lambda)$. Estos espacios verifican:

$$da \subset da(\mu) \subset da(\lambda), \quad \text{para } \lambda > \mu > 0$$

3. DUALIDAD EXTENDIDA DE ABEL

Sea T un espacio de sucesiones que contiene a φ. El espacio:

$$T^{\wedge} = \{u \in \omega : x \cdot u = (x_i \cdot u_i) \in sa, \ \forall\ x \in T\}$$

se denomina ρ-dual de T.

Sea $\lambda \geqslant 0$, diremos que el espacio de sucesiones:

$$T^{\wedge}(\lambda) = \{u \in \omega : A_\lambda^{-1}(x) \cdot A_\lambda(u) \in sa, \ \forall\ x \in T\}$$

es el $\rho(\lambda)$-dual de T. Si $\lambda = 0$, este concepto coincide con la ρ-dualidad porque A_λ y A_λ^{-1} son la identidad.

Es inmediato que $(T, T^{\wedge}(\lambda))$ es par dual con la forma bilineal:

$$\langle x \cdot u\rangle = \lim_{t\to 1^-} \sum_{i=0}^{\infty} [A_\lambda^{-1}(x)]_i [A_\lambda(u)]_i t^i$$

Proposición 5. $A_\lambda(T^{\wedge}(\lambda)) = (A_\lambda^{-1}(T))^{\wedge}$.

Demostración. Si u es un elemento de $A_\lambda(T^{\wedge}(\lambda))$, tenemos que $A_\lambda^{-1}(u)$ pertenece a $T^{\wedge}(\lambda)$, por lo que $A_\lambda^{-1}(x) \cdot u$ está en sa para todo x de T. Entonces u está en $(A_\lambda^{-1}(T))^{\wedge}$.

Sea u perteneciente a $(A_\lambda^{-1}(T))^{\wedge}$, $A_\lambda^{-1}(x) \cdot$ u estará en sa para cada x de T y, por tanto, $A_\lambda^{-1}(u)$ pertenece a $T^{\wedge}(\lambda)$.

Corolario. El espacio $da(\lambda)$ es el $\rho(\lambda)$-dual de $sa(\lambda)$.

Ejemplos:

i) Si $T = \omega$, entonces $\omega\hat{}(\lambda) = A_\lambda^{-1}(\varphi)$, para $\lambda \geqslant 0$.

ii) Sea $L(e_0)$ la envoltura lineal de la sucesión e_0, entonces $A_\lambda^{-1}(L(e_0)) = L(e_0)$, por lo que $(L(e_0))\hat{}(\lambda) = \omega$, para $\lambda \geqslant 0$.

iii) Sea $T = L(e)$, dado que $A_\lambda^{-1}(e) = (\lambda + 1)e - \lambda e_0$, tenemos: $A_\lambda^{-1}(L(e)) = L(\ (\lambda + 1)e - \lambda e_0)$ y el ρ-dual de este espacio es *sa*. Por tanto, $(L(e))\hat{}(\lambda) = A_\lambda^{-1}(sa)$.

iv) Sea $S_c(\lambda)$ el espacio de las sucesiones sumables Césaro de orden $\lambda \geqslant 0$. Entonces $A_\lambda^{-1}(S_c(\lambda))$ es el espacio de las sucesiones sumables en sentido ordinario *cs*. El ρ-dual de *cs* es el espacio de las sucesiones de variación acotadas *bv* [2]. Así, $(S_c(\lambda))\hat{}(\lambda) = A_\lambda^{-1}(bv)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BORWEIN, D.: «On a scale of Abel-type summability methods», *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 53, 318-322 (1957).

[2] BOSANQUET, L. S.: «Note on convergence and summability factors (II) and (III)», *Proc. London Math. Soc.* (2), 50, 295-304 y 482-496 (1948).

[3] KOTHE, G.: *Topological Vector Spaces I*, Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer-Verlag (1969).

[4] PEYERIMHOFF, A.: «Lectures on Summability», *Lectures Notes in Mathematics*, 107, Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer-Verlag (1969).

[5] PÉREZ CARRERAS, P., y BILBAO , M.: «Una nota en completitud en la ρ-dualidad de espacios de sucesiones», *Rev. Real Acad. Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Tomo LXXVII, cuaderno 1.º (1983).

Departamento de Matemáticas.
E.S.I. Industriales
41012 Sevilla.