Teorema de Gauss-Bonnet para fibrados de Seifert

Por M.ª DEL CARMEN GAZOLAZ ARTETA

Recibido: 8 noviembre 1982

Presentado por el académico numerario José J. Etayo Miqueo

En este artículo demostraremos un teorema de Gauss-Bonnet para fibrados de Seifert. Definimos la característica de Euler $\chi(\xi)$ asociada a cada fibrado de Seifert ξ, y para cada conexión $\hat{\theta}$ sobre el fibrado de Seifert $\xi : M \longrightarrow B$, donde $p^*\alpha_{\hat{\theta}} = d\hat{\theta}$ demostramos que:

$$\int_B \alpha_{\hat{\theta}} = 2\pi \cdot \chi(\xi)$$

Definición. Un fibrado de Seifert viene dado por una aplicación sobreyectiva $p : M \longrightarrow B$, donde M es una variedad cerrada de dimensión tres, B es una superficie cerrada y p es una aplicación que satisface:

i) La imagen inversa de cada punto x en B es una curva cerrada simple F_x que llamaremos fibra en el punto x.

ii) Para cada x en B tenemos un entorno cerrado T de F_x, que es homeomorfo a un toro sólido, y un cubrimiento $q : B^2 \times S^1 \longrightarrow T$ (donde B^2 es un disco cerrado) tal que q aplica cada $y \times S^1$ en algún F_z.

Además, $q^{-1}(F_x) = 0 \times S^1$ es conexo, y el grupo de transformaciones cubrientes está engendrado por $\rho_{n,m}$, donde (n, m) es un par de enteros primos entre sí, y:

$$\rho_{n,m}(re^{i\theta}, e^{i\phi}) = (re^{i(\theta + 2\pi m/n)}, e^{i(\phi + 2\pi/n)})$$

M es compacto y, por tanto, existe un número finito, N, de fibras singulares con números asociados:

$$(n_1, m_1), \ldots, (n_N, m_N)$$

Suponemos:

$$N > 0 \quad \text{y} \quad (n_i, m_i) = 1$$

Sea T_i un entorno toral de la fibra Fx_i, sea M_i el borde de un meridiano en T_i y sea $\bar{D}_0$ un disco en B que contiene a:

$$\cup\, p(\bar{T}_i),\ \bar{T}_i \cap \bar{T}_j = \phi, \quad i \neq j$$

y llamemos:

$$\bar{V}_0 = p^{-1}(\bar{D}_0 - \cup\, p(\overset{0}{T}_i))$$

Tomemos una inmersión regular S_0 de $B - D_0$ en $p^{-1}(B - D_0)$, ver [8]; a cuyo borde llamaremos Q_0.

Escogemos una trivialización de $\bar{V}_0$ y una sección S de manera que:

$$\partial S \approx Q_1 \cup \cdots \cup Q_N \cup M_0$$

con orientaciones tales que, escogida una orientación para la fibra regular F $(-Q_i, H)$ y (M_0, H) son las orientaciones inducidas por M en el borde de $\bar{V}_0$.

Sean M_1, ..., M_N, con (M_i, F) con la misma orientación que (Q_i, F), y (Q_0, F) con la misma orientación que (M_0, F).

Entonces tendremos enteros α_i, β_i' tal que:

$$M_i \sim \alpha_i Q_i + \beta_i' F \quad \text{en} \quad \partial T_i$$

Sea $\beta_i \equiv \beta_i' \bmod (\alpha_i)$, $0 \leqslant \beta_i < \alpha_i$, $i \neq 0$:

$$M_i \sim \alpha_i Q_i' + \beta_i F$$

donde:

$$Q_i' = Q_i + y_i F \quad ; \quad \beta_i' = \beta_i + y_i \alpha_i$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que:

$$\partial S \approx Q_1' \cup \cdots \cup Q_N' \cup M_0$$

Además:

$$F_{x_i} \sim \rho_i Q_i' + \sigma_i F y$$

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \rho_i & \sigma_i \end{bmatrix} = 1$$

entonces $-\beta_i \rho_i \equiv 1 \bmod \alpha_i$, en particular $\beta_i > 0$.

Entonces tenemos:

$$F \sim -\rho_i M_i + \alpha_i F_{x_i}$$
$$Q_i' \sim \sigma_i M_i + (-\beta_i) F_{x_i}$$

entonces $-\rho_i = m_i$ y $\alpha_i = n_i$.

Es fácil comprobar que β_i y σ_i están determinadas de forma única.

Podemos definir un entero b de manera:

$$M_0 \sim Q_0 + bF$$

Si cambiamos la orientación de M, la orientación en el borde de $\bar{V}_0$ viene dada por $(-Q_i, -F)$ y $(M_0, -F)$, por tanto:

$$M_i \sim \alpha_i Q_i' + \beta_i F \sim \alpha_i Q_i' + (-\beta_i)(-F) \sim \alpha_i Q_i' + (\alpha_i - \beta_i)(-F) +$$
$$\alpha_i F \sim \alpha_i Q_i'' + (\alpha_i - \beta_i)(-F) \quad \text{y} \quad M_0 \sim Q_0 + bF$$
$$M_0' \sim Q_1 + \cdots + Q_N'' \sim Q_1' + \cdots + Q_N' + NF$$

luego:

$$M_0' \sim Q_0 + (-b - N)(-F)$$

En resumen, si para una orientación obtenemos los invariantes de Seifert $(0, C, y/b, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_N, \beta_N)$, entonces para la orientación opuesta tenemos:

$$(0, C, y/-b - N; \alpha_1, \alpha_1 - \beta_1; \ldots; \alpha_N, \alpha_N - \beta_N)$$

Definición. Dado un fibrado de Seifert orientado, al número $b + \sum \frac{\beta_i}{\alpha_i}$ le llamaremos característica de Euler de ξ, y lo notaremos $\chi(\xi)$. Si $-\xi$ es el fibrado con la orientación opuesta:

$$\chi(-\xi) = -b - N + \sum \frac{\alpha_i - \beta_i}{\alpha_i} = -\chi(\xi)$$

Definición. Una conexión en un fibrado de Seifert $\xi : M \xrightarrow{\pi} B$, B es orientable, es una forma $\theta \in H^1(M; \mathbb{R})$ que es la identidad en el espacio de los vectores verticales (un vector X en $T_x M$ es vertical si $X = i_x Y$ para una inmersión de $S^1 \to M$ en la fibra de X) y es invariante bajo una acción efectiva de S^1 sobre M, *escogida de forma que preserve fibras.*

Si B es una superficie cerrada no orientable, y $\pi : B' \to B$ es el cubrimiento doble con grupo G de transformaciones cubrientes, entonces una conexión para un fibrado de Seifert $\xi : M \to B$ es una forma con coeficientes torcidos $H^1(M, \mathbb{R}(G))$ tal que $\pi^*(\theta)$ es una conexión para el fibrado de Seifert doble ξ' de ξ para B'; por ejemplo, ξ' es un fibrado de Seifert:

$$(0, 0, k - 1, 2b; \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_N, \beta_N)$$

cuando ξ es $(0, 1; k/b; \alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_N, \beta_N)$

Llamaremos vectores horizontales de la conexión a los vectores en el núcleo de θ_x.

Si θ es una conexión en un fibrador de Seifert, sea Ω la forma de curvatura $d\theta = \Omega$, entonces por el diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(B; \mathbb{R}(G)) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "d"] & H^1(M; \mathbb{R}(G)) \arrow[d, "d"] \\ & H^2(B; \mathbb{R}(G)) \arrow[r] & H^2(M; \mathbb{R}(G)) \end{tikzcd}$$

entonces existe $\alpha_\theta \in H^2(B; \mathbb{R}(G))$ con $p^*\alpha_\theta = \Omega$.

Teorema de Gauss-Bonet para fibrados de Seifert. Para un fibrado de Seifert ξ con conexión $\hat{\theta} \in H^1(M; \mathbb{R}(G))$ tenemos:

$$\int_B \alpha_\theta = 2\pi \cdot \chi(\xi)$$

Demostración. 1. Tenemos que:

$$\int_{M_0} \theta = \int_{Q_0} \theta + 2\pi b$$

ya que $M_0 \sim Q_0 + bF$. Pero:

$$\int_{-Q_0} \theta = \int_{S_0} d\theta = \int_{\bar{D}} \alpha_\theta$$

donde $\bar{D} = p(S_0)$ tiene la orientación inducida por Q_0.

2. En ∂T_i tenemos $\alpha_i Q_i \sim M_i - \beta_i F$ donde la orientación (Q_i, F) es la inducida en ∂T_i.

Por tanto:

$$\alpha_i \int_{Q_i} \theta = \int_{M_i} \theta - \beta_i \cdot 2\pi$$

y

$$\int_{M_i} \theta = \int_{S_i} d\theta = \alpha_i \int_{\bar{D}_i = p(\bar{T}_i)} \alpha_\theta$$

ya que p/S_i tiene grado α_i.

Por tanto:

$$\int_B \alpha_\theta = \int_{p(\bar{V}_0)} \alpha_\theta + \int_{\bar{D}} \alpha_\theta + \sum_{i=1}^{N} \int_{p(T_i)} \alpha_\theta =$$

$$= \int_{\bar{D}} \alpha_\theta + \int_{-M_0} \theta + 2\pi b + \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{Q_i} \theta + \frac{\beta_i}{\alpha_i} 2\pi \right) =$$

$$= \int_{+M_0 - Q_1 - \cdots - Q_N} \theta + \int_{-M_0} \theta + 2\pi b + \sum_{i=1}^{N} \int_{Q_i} \theta + \sum \frac{\beta_i}{\alpha_i} 2\pi$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Fox, R. H.: «On Fenchel's conjecture about *F*-groups», *Mat. Tidsskrift B.*, 61-65 (1952).

[2] Hempel, J.: «3-manifolds», *Annals of Mathematics studies*, Princeton University Press (1976).

[3] HICKS, N. J.: «Notes on differential geometry», *Van Nostrand Reinhold mathematics studies* (1971).
[4] MAGNUS, W.: *Non euclidean tessalations and their groups*, Academic Press (1974).
[5] MILNOR, J.: «On the existence of a connection with curvature zero», *Comment. Math.*, 215-223 (1958).
[6] KOBAYASHI y NOMIZU: *Foundations of differential geometry*, Intescience.
[7] ORLIK, P.: «Seifert Manifolds», *Lecture Notes in Mathematics* 291, Springer Verlag.
[8] SEIFERT, H.: «Topologie dreidimensionaler gefaserter Raume», *Act. Math.*, 60 (1933).
[9] SIEGEL, C. L.: *Topics in complex function theory*, 2, Wiley (1969).
[10] STEENROD, N.: *Topology of fiber bundles*, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1951).
[11] THURSTON, W. P.: *Foliations on three manifolds which are circle bundles*, Ph. D. Dissertation Berkeley (1972).
[12] THURSTON, W. P.: «Non cobordant foliations», *Bull. Amer. Math. Soc.*, 78, 511-514 (1972)
[13] WOOD, J. W.: «Bundles with totally disconnected structure group», *Comm. Math. Helv.*, 257-273 (1971).

Facultad de Ciencias. Sección de Matemáticas.
Universidad Autónoma de Madrid. Cantoblanco