Espacios escalonados de orden (p, q)

Por F. ANDREU

Recibido: 7 diciembre 1982

Presentado por el académico numerario Manuel Valdivia Ureña

Abstract

In this paper we study a class of sequence spaces, the echelon spaces of order (p, q). We give a characterization of the nuclear echelon spaces of order (p, q).

A lo largo de este trabajo representaremos por K el cuerpo de los números reales o complejos, por N el conjunto de los números naturales y por ω el conjunto de las sucesiones dobles en K. Dado $\langle E, F\rangle$ un par dual, denotaremos por $\sigma(E, F)$, $\mu(E, F)$ y $\beta(E, F)$ las topologías débil, de Mackey y fuerte sobre E, respectivamente. Si B es un subconjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado de un espacio localmente convexo $E(T)$, denotaremos por E_B la envoltura lineal de B dotada de la norma definida por el funcional de Minkowski de B. Como es usual, dados dos números reales p y q, $1 < p, q < +\infty$, diremos que p y q son conjugados si $1/p + 1/q = 1$; también usaremos que el conjugado de 1 es $+\infty$. Dados a, $b \in K$, al escalar que vale cero si $b = 0$ y a/b si $b \neq 0$, lo denominaremos por $(a; b)$; escribiremos $|a; b|$ en lugar de $|(a; b)|$. Por c_0, l_∞ y l^p, $1 \leqslant p < +\infty$, denotaremos los clásicos espacios de Banach; para su definición y propiedades véase [5]. Escribiremos $l^q\{l^q\}$, $1 \leqslant p, q < +\infty$, para denotar el espacio de Banach definido de la siguiente forma:

$$l^q\{l^p\} = \left\{(x_{ij}) \in \omega : \sum_{J=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_{ij}|^p\right)^{q/p} < +\infty\right\}$$

dotado de la norma:

$$|||(x_{ij})||| = \left(\sum_{J=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_{ij}|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}$$

En cuanto a la teoría general de los espacios de sucesiones seguiremos básicamente el libro de Köthe [5].

---

* Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Matemáticas de Valencia, bajo la dirección del profesor M. Valdivia.

1. DEFINICION Y PROPIEDADES GENERALES

Sea $\{a^{(r)} = (a_{ij}^{(r)}),\ r = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión de sucesiones dobles de elementos de K, con las siguientes propiedades:

i) $a_{ij}^{(r)} > 0,\ \forall\, r, i, j \in N.$
ii) $a_{ij}^{(r)} \leqslant a_{ij}^{(r+1)},\ \forall\, r, i, j \in N.$

Dados p y q dos números reales mayores o iguales que la unidad, definimos Λ_{pq} como el conjunto de sucesiones dobles $x = (x_{ij})$ de ω, tales que:

$$\sum_{J=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |a_{ij}^{(r)} x_{ij}|^p \right)^{q/p} < +\infty, \quad \forall\, r = 1, 2, \ldots$$

Claramente, Λ_{pq} es un espacio localmente convexo separado considerado con la topología $\mathscr{T}$ definida por la familia de seminormas:

$$||x||_r = \left(\sum_{J=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |a_{ij}^{(r)} x_{ij}|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \quad ; \quad r = 1, 2, \ldots \quad ; \quad x = (x_{ij}) \in \Lambda_{pq},$$

siendo además $\mathscr{T}$ la topología límite proyectivo de los espacios de Banach:

$$(\Lambda_{pq})_r = \left\{ x = (x_{ij}) \in \omega : \sum_{J=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |a_{ij}^{(r)} x_{ij}|^p \right)^{q/p} < +\infty \right\}$$

dotados de la topología de la norma $||\ ||_r$, i.e.,

$$\Lambda_{pq} = \bigcap_{r=1}^{+\infty} (\Lambda_{pq})_r .$$

Tenemos, pues, que los espacios Λ_{pq} son siempre espacios de Fréchet; siendo además espacios de sucesiones perfectos (véase [3], lema 3, y [1]), tales que su dual topológico Λ'_{pq} coincide con su α-dual

$$\Lambda_{pq}^{x} = \bigcup_{r=1}^{+\infty} (\Lambda_{pq})_r^{x},$$

i.e.,

$$\Lambda_{pq}^{x} = \{u = (u_{ij}) \in \omega : \exists\ k \in N \text{ con } (u_{ij};\ a_{ij}^{(k)}) \in l^s\{l^r\}\}$$

siendo r y s los conjugados de p y q, respectivamente.

A Λ_{pq} le llamaremos espacio escalonado de orden (p, q) y a su α-dual el correspondiente espacio co-escalonado de orden (p, q).

Siempre que nos refiramos al espacio Λ_{pq} lo consideraremos dotado de la topología $\mathscr{T}$ anteriormente definida.

Dado $x = (x_{ij}) \in \omega$, denotaremos por $x^{(n)} = (x_{ij}^n)$, la sección n-ésima del elemento x, i.e.,

$$x^{(n)} = \sum_{i,J=1}^{n} x_{ij} e_{ij},$$

siendo e_{ij} la sucesión doble cuyas coordenadas son todas nulas salvo la coordenada (i, j) que vale la unidad. Si $x \in \Lambda_{pq}$, es obvio que la sucesión $\{x^{(n)}; n = 1, 2, ...\}$ es $\sigma(\Lambda_{pq}, \Lambda_{pq}^x)$-convergente a x. Siguiendo las técnicas de Köthe (véase [5], parágrafo 30.5 (10)-(11) y [1]), es fácil comprobar los siguientes resultados:

Proposición 1.1. Dado x, un elemento de Λ_{pq}, entonces la sucesión $\{x^{(n)}; n = 1, 2, ...\}$ converge a x en Λ_{pq}.

Proposición 1.2. Λ_{pq} es un espacio sucesionalmente separable.

Para cada $r \in N$, denotaremos por U_r^{pq} el conjunto de elementos x de Λ_{pq} tales que $||x||_r \leqslant 1$; por B_r^{pq} el polar de U_r^{pq} en Λ_{pq}^x.

En lo sucesivo y mientras no se diga lo contrario, supondremos que p y q son números reales conjugados estrictamente mayores que la unidad. De esta forma tendremos que:

$$B_r^{pq} = \left\{u = (u_{ij}) \in \Lambda_{pq}^x : \sum_{J=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |u_{ij}; a_{ij}^{(r)}|^q\right)^{p/q} \leqslant 1\right\}$$

$$B_r^{p1} = \left\{u = (u_{ij}) \in \Lambda_{p1}^x : \sup_j \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |u_{ij}; a_{ij}^{(r)}|^q\right) \leqslant 1\right\}$$

$$B_r^{1q} = \left\{u = (u_{ij}) \in \Lambda_{1q}^x : \sum_{J=1}^{+\infty} (\sup_i |u_{ij}; a_{ij}^{(r)}|)^p \leqslant 1\right\}$$

2. REFLEXIVIDAD Y ESPACIOS DE MONTEL

Lema 2.1. Dado $u = (u_{ij}) \in \Lambda'_{pq}$, se tiene que la sucesión de sus secciones $\{u^{(n)} = (u_{ij}^n); n = 1, 2, ...\}$ converge a u en $\Lambda'_{pq}(\beta(\Lambda'_{pq}, \Lambda_{pq}))$.

Demostración. Sea $r \in N$ tal que:

$$\sum_{J=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |u_{ij}; a_{ij}^{(r)}|^q\right)^{p/q} < +\infty$$

Escribimos:

$$h_n(u) = \sum_{J=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |(u_{ij} - u_{ij}^n); a_{ij}^{(r)}|^q\right)^{p/q}; \quad n = 1, 2, ...$$

Para cada número natural n, tenemos que:

$$h_n(u) = \sum_{J=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=n+1}^{+\infty} |u_{ij}; a_{ij}^{(r)}|^q \right)^{p/q} + \sum_{J=n+1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |u_{ij}; a_{ij}^{(r)}|^q \right)^{p/q}$$

Ahora bien, como $l^p\{l^q\}$ es un espacio de Banach con base $\{e_{ij};\ i, j = 1, 2, \ldots\}$ y $(u_{ij};\ a_{ij}^{(r)})$ es un elemento de $l^p\{l^q\}$,

$$\text{lím } h_n(u) = 0 \tag{1}$$

Finalmente, si M es un subconjunto acotado de Λ_{pq} existe un número real $\zeta > 0$ tal que $M \subset \zeta U_r^{pq}$. Aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos que:

$$|\langle x, u - u^{(n)} \rangle| \leqslant ||x||_r (h_n(u))^{1/p} \leqslant \zeta (h_n(u))^{1/p}, \quad \forall\ x \in M$$

teniendo en cuenta (1), la demostración queda concluida.

Proposición 2.2. Λ_{pq} es un espacio reflexivo.

Demostración. Como Λ_{pq} es un espacio de Fréchet, bastará probar que el bidual de Λ_{pq}, Λ''_{pq} coincide con Λ_{pq}.

Sea $z \in \Lambda''_{pq}$. Como e_{ij} es un elemento de Λ'_{pq} para todo $i, j \in N$, podemos escribir $z_{ij} = \langle e_{ij}, z \rangle$. Dado $u = (u_{ij})$ un elemento de Λ'_{pq}, tenemos que:

$$u^{(n)} = \sum_{i,J=1}^{n} u_{ij} e_{ij} \quad \text{y} \quad \langle u^{(n)}, z \rangle = \sum_{i,J=1}^{n} u_{ij} z_{ij}, \quad \forall\ n \in N$$

Teniendo en cuenta el lema anterior y que Λ'_{pq} es normal, obtenemos que:

$$\langle u, z \rangle = \text{lím} \sum_{i,J=1}^{n} u_{ij} z_{ij} \quad \text{y} \quad \sum_{i,J=1}^{+\infty} |u_{ij} z_{ij}| < +\infty$$

Por tanto, podemos afirmar que $z = (z_{ij})$, siendo z un elemento de $(\Lambda'_{pq})^x$ que coincide con Λ_{pq}.

Como consecuencia de los teoremas 4 y 5 de [3], podemos enunciar el siguiente resultado:

Proposición 2.3. Λ_{pq} es un espacio de Montel si, y sólo si, no existe un conjunto de ídices infinito $H = \{(s_n, t_n),\ n \in N\} \subset N \times N$, un número natural r_0 y adecuadas constantes $M_r > 0$, tales que:

$$a_{s_n t_n}^{(r)} \leqslant M_r a_{s_n t_n}^{(r_0)}, \quad \forall\ r \geqslant r_0 \text{ y } n \in N \tag{2}$$

Corolario 2.4. Λ_{pq} es un espacio de Montel si, y sólo si, no posee ningún subespacio seccional isomorfo a l^p o l^q.

Demostración. Supongamos que Λ_{pq} no posee ningún subespacio seccional isomorfo a l^p o l^q, y que además Λ_{pq} no es un espacio de Montel. Por 2.3 existe un subconjunto infinito $H = \{(s_n, t_n), n \in N\}$ de $N \times N$, r_0 y adecuadas constantes $M_r > 0$ tales que:

$$a^{(r)}_{s_n t_n} \leqslant M_r a^{(r_0)}_{s_n t_n}, \quad \forall\ r \geqslant r_0,\ n \in N \tag{2}$$

Puesto que H es infinito, puede ocurrir que:

i) $\{s_n, n \in N\}$ y $\{t_n, n \in N\}$ sean ambos subconjuntos infinitos de N.
ii) $\{s_n, n \in N\}$ sea infinito y $\{t_n, n \in N\}$ sea finito.
iii) $\{s_n, n \in N\}$ sea finito y $\{t_n, n \in N\}$ sea infinito.

Bajo el supuesto de que se cumpla i), siempre podemos encontrar subconjuntos $\{i_n, n \in N\}$ *y* $\{j_n, n \in N\}$ de N, con $(i_n, j_n) \in H$ para todo $n \in N$ e

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \cdots \quad ; \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_n < \cdots$$

Sea:

$$G = \{x = (x_{ij}) \in \Lambda_{pq} : x_{ij} = 0, \quad \forall\ (i, j) \neq (i_n, j_n),\ n \in N\}$$

Es claro que G es un subespacio seccional de Λ_{pq}; además si x es un elemento de G, aplicando (2), obtenemos:

$$||x||_r \leqslant M_r ||x||_{r_0}, \quad \forall r \geqslant r_0$$

De donde se desprende que la topología de Λ_{pq} coincide sobre G con la topología de la norma $||\cdot||_{r_0}$, y evidentemente G es topológicamente isomorfo a l^q.

En los casos ii) e iii) la demostración es análoga.

En 2.2 vimos que Λ_{pq} es siempre un espacio reflexivo. Claramente los espacios Λ_{1p} y Λ_{p1} no son reflexivos en general (basta tomar $a^{(n)}_{ij} = 1$ para todo r, $i, j \in N$).

Es conocido que los espacios Λ_{11} son espacios reflexivos si, y sólo si, son espacios de Montel (véase [10], parágrafo 2.2(8) y [5], parágrafo 30.9.(1)). Veamos que los espacios Λ_{1p} y Λ_{p1} no verifican este resultado.

Para cada $r \in N$ definimos $a^{(r)} = (a^{(r)}_{ij})$, siendo:

$$a^{(r)}_{ij} = (i + j)^r;\ i, r = 1, 2, \ldots;\ j = 2, 3, \ldots$$
$$a^{(r)}_{i1} = 1;\ i, r = 1, 2, \ldots$$

Sea Λ_{p1} el espacio escalonado de orden $(p, 1)$ definido por la sucesión anterior. Escribimos:

$$F_1 = \{x = (x_{ij}) \in \Lambda_{p1} : x_{ij} = 0, \quad \forall\ j \neq 1\}$$
$$F_2 = \{x = (x_{ij}) \in \Lambda_{p1} : x_{i1} = 0, \quad \forall\ i \in N\}$$

Es obvio que $\Lambda_{p1} = F_1 \oplus F_2$. Como F_1 es topológicamente isomorfo a l^p, por 2.4, Λ_{p1} no es un espacio de Montel.

Sea Λ el espacio escalonado de orden $(p, 1)$ definido por $\{b^{(r)} = (b_{ij}^{(r)})\}$, siendo $b_{ij}^{(r)} = a_{ij+1}^{(r)}$ para todo $r, i, j \in N$. Por 2.3, es fácil comprobar que Λ es un espacio de Montel; además, como Λ es topológicamente isomorfo a F_2, aplicando [5], parágrafo 22.5.(3), podemos concluir que Λ_{p1} es un espacio reflexivo.

Sea ahora Λ_{1p} el espacio escalonado de orden $(1, p)$ definido por la sucesión $\{a^{(r)} = (a_{ij}^{(r)});\ r = 1, 2, \ldots\}$, siendo:

$$a_{ij}^{(r)} = (i + j)^r;\ j, r = 1, 2, \ldots;\ i = 2, 3, \ldots$$
$$a_{1j}^{(r)} = 1;\ j, r = 1, 2, \ldots$$

Por un razonamiento totalmente análogo al anterior, se comprueba que Λ_{1p} es un espacio reflexivo no Montel.

Siguiendo a Grothendieck [4], diremos que un espacio localmente convexo E es totalmente reflexivo si cada cociente separado de E es reflexivo.

Proposición 2.5. Λ_{pq} es un espacio totalmente reflexivo.

Demostración. Por [10], parágrafo 2.3.(1), y teniendo en cuenta que $\{rB_r^{pq},\ r \in N\}$ es un sistema fundamental de acotados de Λ'_{pq}, bastará probar que para cada número natural r la topología débil de $(\Lambda'_{pq})_r$ y $\sigma(\Lambda'_{pq}, \Lambda_{pq})$ coinciden en B_r^{pq}, siendo $(\Lambda'_{pq})_r$ el espacio de Banach $(\Lambda'_{pq})_{B_r^{pq}}$ con la topología de la norma:

$$|u|_r = \inf\{\alpha > 0 : u = (u_{ij}) \in \alpha B_r^{pq}\} = \left(\sum_{J=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |u_{ij};\ a_{ij}^{(r)}|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p}$$

Sea U la bola unidad cerrada de $l^p\{l^q\}$; definimos:

$$T_r : l^p\{l^q\} \longrightarrow (\Lambda'_{pq})_r$$

de la siguiente forma: $T_r(u) = (u_{ij}a_{ij}^{(r)})$ para todo $u = (u_{ij}) \in l^p\{l^q\}$. Es fácil comprobar que T_r es una isometría, con $T_r(U) = B_r^{pq}$. Como el dual fuerte de $l^p\{l^q\}$ es $l^q\{l^p\}$ ([8] 7.16), U es $\sigma(l^p\{l^q\}, l^q\{l^p\})$-compacto y, por tanto, B_r^{pq} es compacto en $(\Lambda'_{pq})_r$ con su toplogía débil. Es ahora evidente que la topología débil de $(\Lambda'_{pq})_r$ y $\sigma(\Lambda'_{pq}, \Lambda_{pq})$ coinciden en B_r^{pq}.

Como consecuencia de [10], parágrafo 2.4.(23), y de la demostración anterior, tenemos los siguientes resultados.

Proposición 2.6. Todo subespacio casi-tonelado de $\Lambda'_{pq}(\beta(\Lambda'_{pq}, \Lambda_{pq}))$ es bornológico.

Proposición 2.7. $\Lambda'_{pq}(\beta(\Lambda'_{pq}, \Lambda_{pq}))$ es el límite inductivo de la sucesión de espacios de Banach:

$$\{(\Lambda'_{pq})_r;\ r = 1, 2, \ldots\}$$

Demostración. Por 2.2, $\Lambda'_{pq}(\beta(\Lambda'_{pq}, \Lambda_{pq}))$ es tonelado; teniendo en cuenta la proposición anterior y que la familia $\{rB_r^{pq},\ r \in N\}$ es un sistema fundamental de acotados de Λ'_{pq}, obtenemos la conclusión deseada.

3. CONJUNTOS COMPACTOS Y CONJUNTOS ACOTADOS

Sean p y q números reales mayores o iguales que la unidad y Λ_{pq} los correspondientes espacios definidos en el apartado 1.

Proposición 3.1. Dado A un subconjunto acotado de Λ_{pq}, A es relativamente compacto si, y sólo si, para cada $r \in N$ la sucesión:

$$\sup \{||x - x^{(n)}||_r : x \in A\} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

es convergente a cero.

Demostración. Supongamos que A es relativamente compacto. Para cada $r \in N$ es fácil comprobar que:

$$B_r = \{(x_{ij}a_{ij}^{(r)}) : x = (x_{ij}) \in A\}$$

es un subconjunto relativamente compacto de $l^q\{l^p\}$. Aplicando la caracterización de los conjuntos relativamente compactos en espacios de Banach con base (véase [7], pág. 166), obtenemos que la sucesión (3) converge a cero.

Recíprocamente, supongamos que la sucesión (3) converge a cero para cada número natural r, y sea $\{y^n = (y_{ij}^n);\ n = 1, 2, \ldots\}$ una sucesión en A; puesto que A es acotado, por un proceso diagonal podemos obtener una subsucesión $\{x^n = (x_{ij}^n);\ n = 1, 2, \ldots\}$ de $\{y^n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ de forma que para cada i, j de N la sucesión $\{x_{ij}^n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ sea convergente a un cierto x_{ij}. Escribimos $x = (x_{ij})$. Veamos que x es el límite de la sucesión $\{x^n;\ n = 1, 2, \ldots\}$. Dado $\varepsilon > 0$ y $r \in N$, por (3), existe k_0 tal que para todo $k \geqslant k_0$ e $y = (y_{ij}) \in A$:

$$\sum_{J=1}^{k} \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} |y_{ij}a_{ij}^{(r)}|^p \right)^{p/q} + \sum_{J=k+1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_{ij}a_{ij}^{(r)}|^p \right)^{q/p} < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^q \tag{4}$$

En particular, tendremos que para todo $n, h \in N$, $m > k \geqslant k_0$:

$$\sum_{J=1}^{k} \left(\sum_{i=k+1}^{m} |x_{ij}^n a_{ij}^{(r)}|^p \right)^{p/q} + \sum_{J=k+1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{h} |x_{ij}^n a_{ij}^{(r)}|^p \right)^{q/p} < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^q$$

De donde se desprende que para todo $k \geqslant k_0$:

$$\sum_{J=1}^{k} \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} |x_{ij}a_{ij}^{(r)}|^p \right)^{q/p} + \sum_{J=k+1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_{ij}a_{ij}^{(r)}|^p \right)^{q/p} < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^q \tag{5}$$

y consecuentemente, que x es un elemento de Λ_{pq}. Además por la convergencia coordenada a coordenada de la sucesión $\{x^n;\ n = 1, 2, \ldots\}$, existe un número natural n_0 tal que:

$$\sum_{J=1}^{k_0} \left(\sum_{i=1}^{k_0} |(x_{ij}^n - x_{ij}) a_{ij}^{(r)}|^p \right)^{q/p} < \left(\frac{\varepsilon}{3} \right)^q, \quad \forall\, n \geqslant n_0 \tag{6}$$

Finalmente, teniendo en cuenta (4), (5) y (6), obtenemos que:

$$||x^n - x||_r < \varepsilon, \quad \forall\, n \geqslant n_0$$

En la siguiente prooposición denotaremos por U la bola unidad cerrada de $l^q\{l^p\}$, por λ_∞ el espacio escalonado de orden ∞ definido por $\{a^{(r)}\}$, i.e.,

$$\lambda_\infty = \{x = (x_{ij}) \in \omega : \sup_{i,\, j} |x_{ij} a_{ij}^{(r)}| < +\infty,\ r \in N\}$$

Dado $y = (y_{ij}) \in \lambda_\infty$, escribiremos:

$$yU = \{(y_{ij} \cdot \alpha_{ij}) : (\alpha_{ij}) \in U\}$$

Proposición 3.2. Un subconjunto B de Λ_{pq} es acotado si, y sólo si, existe un elemento $y = (y_{ij})$ de λ_∞, con $y_{ij} \geqslant 0$, tal que $B \subset yU$.

Demostración. La condición suficiente es obvia. Recíprocamente, sea B un acotado de Λ_{pq} y $M_r > 0$, tal que:

$$\sup\, \{||x||_r : x \in B\} \leqslant M_r, \quad r \in N \tag{7}$$

Definimos $y = (y_{ij})$, con:

$$y_{ij} = \inf\, \{(2.2^r \cdot M_r;\ a_{ij}^{(r)}),\ r \in N\}$$

Es fácil ver que $(y_{ij}) \in \lambda_\infty$. Además, dado $x = (x_{ij}) \in$ B:

$$|x_{ij}| = (|x_{ij}| \cdot a_{ij}^{(r)};\ a_{ij}^{(r)}) \leqslant (||x||_r;\ a_{ij}^{(r)}) \leqslant (M_r \cdot 2.2^r;\ a_{ij}^{(r)}), \quad \forall\, r \in N$$

Tomando ínfimos al variar r en N, obtenemos:

$$|x_{ij}| \leqslant |y_{ij}|, \quad \forall\, i, j \in N,\ x = (x_{ij}) \in B \tag{8}$$

Para ver que B está contenido en yU, bastará probar que $B \cap \varphi$ está contenido en yU. Sea $x = (x_{ij}) \in B \cap \varphi$, $I = \{(i, j) \in N \times N : x_{ij} \neq 0\}$, y h el número de elementos de I. Si $(i, j) \in I$ e $y_{ij} \neq 0$, entonces:

$$(1;\ y_{ij}) = \sup\, \{(a_{ij}^{(r)};\ 2.2^r \cdot M_r),\ r \in N\},$$

luego existe un $m_{ij} \in N$ tal que:

$$(a_{ij}^{(m_{ij})};\ 2.2^r \cdot M_r) \geqslant (1;\ y_{ij}) - (1;\ |x_{ij}| \cdot 2 \cdot h) \tag{9}$$

Sea $M = \text{máx}\,\{m_{ij}, (i, j) \in I\}$; si $n \in \{1, 2, ..., M\}$, escribimos:

$$I_n = \{(i, j) \in I : m_{ij} = n\}$$

Es claro que:

$$I_n \cap I_k = \phi \quad \text{si} \quad n \neq k \quad \text{e} \quad I = \bigcup_{n=1}^{M} I_n$$

Definimos $z^n = (z_{ij}^n)$, $z = (z_{ij})$, siendo:

$$z_{ij}^n = (x_{ij}; y_{ij}) \quad \text{si} \quad (i, j) \in I_n,\ z_{ij}^n = 0 \quad \text{si} \quad (i, j) \notin I_n$$
$$z_{ij} = (x_{ij}; y_{ij}) \quad \text{si} \quad (i, j) \in I,\ z_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad (i, j) \notin I$$

Denotamos por $|||\cdot|||$ la norma de $l^q\{l^p\}$ y por V la bola unidad cerrada de $l^p\{l^q\}$, entonces:

$$|||z^n||| = \sup\left\{\sum_{(i,j)\in I_n} |z_{ij}^n u_{ij}| : u = (u_{ij}) \in V\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\left\{\sum_{(i,j)\in I_n} |((a_{ij}^{(n)} x_{ij}; 2.2^n \cdot M_n) + (1; 2 \cdot h))u_{ij}|,\quad u = (u_{ij}) \in V\right\}$$

Luego, si h_n es el número de elementos de I_n:

$$|||z||| \leqslant \sum_{n=1}^{M} |||z^n||| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{M}\left(\sup\left\{\sum_{(i,j)\in I_n} (|(a_{ij}^{(n)} x_{ij}; 2.2^n \cdot M_n)u_{ij}|),\ u = (u_{ij}) \in V\right\}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{M} (h_n; 2 \cdot h) \leqslant \sum_{n=1}^{M}\left((1; 2.2^n \cdot M_n) \cdot \sup\left\{\sum_{(i,j)\in I_n} |a_{ij}^{(n)} x_{ij} u_{ij}|,\ u = (u_{ij}) \in V\right\}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{M} (1; 2.2^n \cdot M_n) \cdot ||x||_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

De donde se desprende que x es un elemento de yU.

4. NUCLEARIDAD

Proposición 4.1. Λ_{pq} es un espacio nuclear si, y sólo si, dado $r \in N$ existe un número natural $k > r$ tal que:

$$\sum_{i,J=1}^{+\infty} (a_{ij}^{(r)}; a_{ij}^{(k)}) < +\infty \tag{10}$$

Demostración. Supongamos se cumple (10). Consideremos Λ_{11} el espacio escalonado de orden (1, 1) definido por $\{a^{(r)}; r = 1, 2, ...\}$; teniendo en cuenta (10), es fácil comprobar que Λ_{11} es topológicamente isomorfo a Λ_{pq}, y como Λ_{11} es nuclear (véase [10], parágrafo 2.3.(16)), podemos concluir que Λ_{pq} es un espacio nuclear.

Recíprocamente, supongamos que Λ_{pq} es nuclear. Dado $r \in N$ existirá un subconjunto B absolutamente convexo, equicontinuo y cerrado de Λ'_{pq} con $B_r^{pq} \subset B$ y la inyección canónica:

$$J : (\Lambda'_{pq})_r \longrightarrow (\Lambda'_{pq})_B$$

nuclear.

Sea $|\cdot|$ el calibrador del polar de B_r^{pq} en el dual de $(\Lambda'_{pq})_r$, y $||\cdot||$ la norma de $(\Lambda'_{pq})_B$. Por ser J nuclear, existen sucesiones $\{z^h; h = 1, 2, ...\}$ y $\{v^h; h = 1, 2, ...\}$ en $(\Lambda'_{pq})'_r$ y $(\Lambda'_{pq})_B$, respectivamente, tales que:

$$\sum_{h=1}^{+\infty} |z^h| \cdot ||v^h|| < +\infty \quad \text{y} \quad J(w) = \sum_{h=1}^{+\infty} \langle w, z^h\rangle \cdot v^h, \quad \forall\, w \in (\Lambda'_{pq})_r$$

Puesto que B es acotado, existe un número natural $k > r$ con $B \subset kB_k^{pq}$. Consideremos la aplicación:

$$T_r : l^p\{l^q\} \longrightarrow (\Lambda'_{pq})_r$$

siendo $T_r(u) = (u_{ij}a_{ij}^{(r)})$ para todo $u = (u_{ij})$ de $l^p\{l^q\}$. En 2.5. vimos que T_r es un isomorfismo en norma, por tanto, su aplicación traspuesta:

$$g_r : (\Lambda'_{pq})'_r \longrightarrow l^q\{l^p\}$$

es un isomorfismo en norma.

Denotemos por $|||\cdot|||$ la norma de $l^q\{l^p\}$. Es claro que:

$$|z^h| = |||g_r(z^h)||| = |||(\langle e_{ij}, g_r(z^h)\rangle)||| =$$
$$= |||(\langle T_r(e_{ij}), z^h\rangle)||| = |||(a_{ij}^{(r)}\langle e_{ij}, z^h\rangle)||| =$$
$$\left(\sum_{J=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |a_{ij}^{(r)}\langle e_{ij}, z^h\rangle|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}$$

Como $B \subset kB_k^{pq}$, es obvio que:

$$||v^h|| \geqslant k \cdot \inf\{\alpha > 0 : v^h \in \alpha B_k^{pq}\} = k\left(\sum_{J=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |v_{ij}^h; a_{ij}^{(k)}|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p}$$

Por otra parte, $a_{ij}^{(r)}e_{ij}$ es un elemento de B_r^{pq} para todo $i, j \in N$, con lo cual:

$$J(a_{ij}^{(r)}e_{ij}) = a_{ij}^{(r)}e_{ij} = \sum_{h=1}^{+\infty} \langle a_{ij}^{(r)}e_{ij}, z^h\rangle \cdot v^h$$

y consecuentemente:

$$(a_{ij}^{(r)}; a_{ij}^{(k)}) = \sum_{h=1}^{+\infty} \langle a_{ij}^{(r)}e_{ij}, z^h\rangle(v_{ij}^h; a_{ij}^{(k)})$$

Finalmente, teniendo en cuenta lo anterior y aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos que:

$$\sum_{i,J=1}^{+\infty} (a_{ij}^{(r)}; a_{ij}^{(k)}) < +\infty$$

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREU, F.: «Algunos nuevos resultados en espacios de sucesiones», Tesis doctoral, Valencia (1982).
[2] CROFTS, G.: «Concerning Perfect Fréchet Spaces and Diagonal Transformations», *Mat. Ann.*, 182, 67-76 (1969).
[3] DUBINSKY, E.: «Perfect Fréchet Spaces», *Math. Ann.*, 174, 186-194 (1967).
[4] GROTHENDIECK, A.: «Sur les espaces (*F*) et (*DF*)», *Summa Bras. Math.*, 6, 57-123 (1954).
[5] KOTHE, G.: *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag (1969).
[6] ——: *Topological Vector Spaces II*, Springer-Verlag (1980).
[7] LUSTERNICK y SOBOLEV: *Element of Functional Analysis*, Hindustan P. C., New Delhi (1974).
[8] ROSIER, R. C.: «Dual spaces of certain vector sequence spaces», *Pacific J. Math.*, 46 (2), 487-501 (1973).
[9] VALDIVIA, M.: «Cocientes de espacios escalonados», *Rev. Real Acad. Ciencias Madrid.*, 63, 169-183 (1979).
[10] VALDIVIA, M.: *Topics in Locally Convex Spaces*, North-Holland, 1982.

Facultad de Matemáticas.
Burjasot (Valencia)