Sobre una compactificación de espacios vectoriales normados no arquimedianos

Por José Ramírez Labrador

Recibido: 6 noviembre 1982

Presentado por el académico correspondiente Antonio de Castro Brzezicki

Abstract

We use the Stone's theorem for Boolean algebras to give a compactification for non archimedean normed vector spece **X** and we compare it with some other known compactifications or repletions. This compactification has been built up over the minimal Boolean algebra which contains the **X**-balls. We also study the set of the elements in the compactification which contain a space's hole («trou», see Gruson, p. 287).

Resumen

Introducimos, aplicando el teorema de Stone para álgebras de Boole, una compactificación de espacios vectoriales normados no arquimedianos **X** y la comparamos con otras compactificaciones y compactificaciones reales conocidas. El interés de esta compactificación se debe a que está construida sobre la mínima álgebra de Boole que contiene a las bolas de **X**. Estudiamos también el conjunto de los elementos de la compactificación que contienen un agujero de **X** (Gruson, pág. 287).

Sea **X** un espacio vectorial normado no arquimediano, no reducido a cero, en abreviatura e.v.n.a., sobre un cuerpo valorado **K**; consideremos **PX** el álgebra de Boole de las partes de **X** con las operaciones $\cup$ unión, $\cap$ intersección, * complementario; si $\mathbf{A} \subset \mathbf{PX}$ es sabido que la subálgebra de Boole generada por **A** está formada por el conjunto de las $\bigcup_{i=1}^{n}\left(\bigcap_{j=1}^{m_i} a_{ij}\right)$, con $a_{ij} \in \mathbf{A}$ ó $a_{ij}^* \in \mathbf{A}$. Indicaremos por **BX**, resp. **CX**, el álgebra de Boole generada por las bolas «cerradas», resp. los clopen, de **X** (es decir, los conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados; Narici, *et al.* (1981), propone el término «aberrado» para indicar «clopen»). Evidentemente $\mathbf{BX} \subset \mathbf{CX}$ y todo clopen compacto o tal que su complementario es compacto pertenece a **BX**.

Teorema 1. Si $a \in \mathbf{BX}$, entonces a ó a^* está acotado en norma.

Demostración. Sea $a = \bigcup_{i=1}^{n}\left(\bigcap_{j=1}^{m_i} b_{ij}\right)$, con b_{ij} bola o complementario de bola de **X**, si para cada i existe un j tal que b_{ij} es bola, está claro que a está acotado, en otro caso podemos suponer que b_{1j} es complementario de bola para todo j y, por tanto $a^* \subset \bigcup_{j=1}^{m_1} b_{1j}^*$ con lo que a^* está acotado.

Teorema 2. Si **X** es e.v.n.a. sobre un cuerpo **K** no discreto, entonces **BX** está contenido estrictamente en **CX**.

Demostración. Sea $\mathbf{N_X} = \{||x|| : x \in \mathbf{X}\}$; $\mathbf{N_K} = \{|y| : y \in \mathbf{K}\}$, como **K** es no discreto, $\mathbf{N_K}$ contiene a un subgrupo cíclico de $\mathbb{R}^*_+$, sea $\alpha \in \mathbf{N_X}$, $\alpha > 0$; $\rho \in \mathbf{N_K}$, $\rho > 1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \cdot \rho^n \in \mathbf{N_X}$ y, por tanto, existe un $x_n \in \mathbf{X}$ con $||x_n|| = \alpha \cdot \rho^n$; sea $\beta = \alpha \cdot \rho$; $a = \bigcup_{n=2}^{\infty} b(x_n, \beta)$; si $x \in b(x_n, \beta)$, la bola de centro x_n y radio β, de la desigualdad ultramétrica se deduce que $||x|| = \alpha \cdot \rho^n$ y, por tanto, las bolas de la unión son disjuntas; a es abierto; si y pertenece a la clausura de a, como **X** es métrico, existe una sucesión y_n de elementos de a que converge a y, ya que para todo $z \in a$, $||z|| \geqslant \alpha \cdot \rho^2 > 0$ tenemos que $y \neq 0$ y desde un cierto i_0 en adelante $||y_i|| = ||y||$, luego existe un n tal que a partir de i_0, $y_i \in b(x_n, \beta)$ cerrado, contenido en a, por tanto, $a \in$ **CX**. Evidentemente a no es acotado, a^* tampoco ya que $||x_n - x_{n-1}|| = \alpha \cdot \rho^n$ y $x_n - x_{n-1} \notin b(x_n, \beta)$ que es la única de a a la que podría pertenecer, por tanto $\{x_n - x_{n-1} : n \in \mathbb{N}, n > 2\}$ es no acotado y está contenido en a^*.

Son conocidos, Wagner (1957, 1964), diversos métodos generales de obtener compactificaciones de un espacio completamente regular, el método utilizado aquí está basado en el espacio de Stone para álgebras de Boole.

Si **A** es un álgebra de Boole indicaremos por **SA** el espacio de los ultrafiltros de **A** con la topología de base: $u(a) = \{y \in \mathbf{SA} : a \in y\}$ para a perteneciente a **A**, por los teoremas de Stone (Bell, *et al.*, p. 141), es conocido que **SA** es un espacio de Hausdorff compacto y de dimensión cero y que **A** es isomorfo, como álgebra de Boole, al álgebra de los clopen de **SA**.

Teorema 3. Si **X** es un e.v.n.a., entonces **SBX** es una compactificación de **X**.

Demostración. Basta ver que **X** es homeomorfo a un subconjunto denso de **SBX**, sea $h : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{SBX}$ tal que $h(x)$ es el filtro generado por todos los elementos de **BX** que contienen a x, como $\forall\, b \in \mathbf{BX}$ $x \in b$ ó $x \in b^*$, se sigue que $h(x)$ es un ultrafiltro; ya que **X** es Hausdorff y **BX** contiene a una base de la topología de **X**, se tiene que h es inyectiva; $h(\mathbf{X})$ es denso en **SBX** ya que si $y \in \mathbf{SBX}$ en todo entorno de y existe un $u(b)$ tal que $y \in u(b)$, eligiendo un $x \in b$ está claro que $h(x) \in u(b)$. La continuidad de h se deduce de que $h(b) = \{h(x) : x \in b\} \subset u(b)$ y la continuidad de h^{-1} de que, para todo b de **BX**, $h^{-1}(u(b)) \subset b$ y de ser $h(x)$ ultrafiltro.

Teorema 4. Si **K** es un cuerpo no discreto, $\mathbf{SCX} > \mathbf{SBX}$ en el sentido de orden de compactificaciones.

Demostración. **SCX** es la compactificación de Banaschewski de X (Van-Rooij, p. 27 y 28) y, por tanto, $\mathbf{SCX} \geqslant \mathbf{SBX}$, del teorema 6.4, p. 155, Bell *et al.*, y del teorema 2 se deduce que $\mathbf{SBX} \not\geqslant \mathbf{SCX}$.

Teorema 5. Las condiciones siguientes son equivalentes:

a) **SBX** es ultrametrizable.
b) **BX** es numerable.
c) **X** es separable.

Demostración. La equivalencia de *a*) y *b*) se deduce de Van-Rooij, p. 74, y de Bell *et al.*, p. 143, *b*) $\Rightarrow$ *c*): Si **BX** es numerable, aplicando el axioma de elección numerable, podemos tomar un punto de cada elemento de **BX** con lo que **X** es separable; el *recíproco* se deduce de que todo punto de una bola de **X** puede servir de centro y de Narici *et al.* (1971), p. 59.

Corolario 6. Si **K** es no discreto, **SBX** es ultrametrizable si, y sólo si, **SBX** es un espacio de Cantor.

Demostración. Es conocido que si **A** es un álgebra de Boole, **SA** es perfecto si, y sólo si, **A** no tiene átomos y evidentemente si **K** es no discreto **BX** no tiene átomos, por el teorema 5 si **SBX** es ultrametrizable **BX** es numerable, luego **SBX** es un espacio de Cantor. Recíprocamente, si **SBX** es un espacio de Cantor tiene una base numerable de clopen y como todo clopen de **SBX** es compacto el álgebra de los clopen de **SBX** está contenida en las uniones finitas de elementos de la base numerable, luego el álgebra de los clopen de **SBX** es numerable.

Teorema 7. Las condiciones siguientes son equivalentes:

a) **X** es localmente compacto.
b) **SBX** es isomorfo a la compactificación de Alexandroff $\mathbf{X}^+$ de **X**.
c) La imagen de **X** por la aplicación canónica en **SBX** tiene interior no vacío.

Demostración. Como los complementarios de las bolas de **X** tienen la propiedad de intersección finita, son base de filtro en **BX** y por el teorema 1 generan un único ultrafiltro en **BX**, F_∞ que estará formado por los no acotados de **BX**.

a) $\Rightarrow$ *b*): Sea $h^+ : \mathbf{X}^+ \longrightarrow \mathbf{SBX}$ la extensión de h tal que al punto del infinito le hace corresponder F_∞, evidentemente h^+ es inyectiva; si $y \in \mathbf{SBX} \setminus \{F_\infty\}$ existe una bola de **BX** tal que $b \in y$, como b es compacto de todo recubrimiento de b por bolas de radio ε, se puede extraer un subrrecubrimiento finito y, como y es ultrafiltro, alguna de las bolas del subrrecubrimiento pertenece a y, como **X** es completo por Narici *et al.* (1971), p. 24, haciendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ existe un $x \in \mathbf{X}$ tal que $y = h^+(x)$, con lo que h^+ es sobreyectiva. Para ver que h^+ es continua basta probar que es continua en el punto del infinito, y esto se deduce de que todo entorno de F_∞ contiene a un $u(b)$ para un b no acotado que contendrá al complementario de una bola.

b) $\Rightarrow$ *c*) es trivial ya que $h(\mathbf{X})$ es abierto.

c) $\Rightarrow$ *a*): Si y pertenece al interior de $h(\mathbf{X})$, existe un b, acotado, tal que $y \in u(b) \subset h(\mathbf{X})$, por ser y ultrafiltro podemos suponer que b es una bola, como **X** es espacio vectorial la traslación es continua en **X** y h(**X**) es abierto en **SBX** compacto de dimensión cero, luego **X** es localmente compacto.

Teorema 8. **SBX** es el completado de **X** respecto la uniformidad inicial de las funciones características en **K** de **BX**.

Demostración. Como $u(b)$ para $b \in$ **BX** es una base de la topología de **SBX** compacto, la uniformidad de **SBX** admite como sistema fundamental de vecindades el dado a partir de los recubrimientos finitos de **SBX** por $u(b)$ para $b \in$ **BX** y la uniformidad inducida en **X** por la de **SBX** es la dada por los recubrimientos finitos de **X** por elementos de **BX** que, por ser **BX** álgebra de Boole, coincide con la uniformidad inicial de las funciones características de **BX**.

Sea $v_{\mathbf{K}}\mathbf{X}$ el completado de **X** respecto la uniformidad inicial de las funciones continuas de **X** en **K** (es un análogo de la compactificación real para espacios no arquimedianos, ver Narici *et al.* (1974), p. 316); sea también $\mathbf{X}^{\delta}$, la $\mathbb{N}$-compactificación de **X**, el completado de **X** respecto la uniformidad inducida por las particiones numerables de clopen de **X** (Van-Rooij, p. 43), es conocido que si **X** es un e.v.n.a., $\mathbf{X}^{\delta}$ coincide con la compactificación real de **X**.

Corolario 9. La aplicación canónica de **X** en **SBX** puede prolongarse a sendas aplicaciones uniformemente continuas de la compleción métrica de **X** en **SBX**, de $v_{\mathbf{K}}\mathbf{X}$ en **SBX** y de $\mathbf{X}^{\delta}$ en **SBX**.

Demostración. La uniformidad métrica de **X**, la inducida por $v_{\mathbf{K}}\mathbf{X}$ y la inducida por $\mathbf{X}^{\delta}$ son más finas que la inducida por **SBX**.

Corolario 10. Si **X** es un espacio de Banach no arquimediano $\mathbf{SBX} \setminus \mathbf{X}$ es un $\mathbf{F}_{\sigma}$ de primera categoría con interior vacío.

Demostración. Identificamos **X** con su imagen por la aplicación canónica, evidentemente **X** es un $\mathbf{G}_{\delta}$, denso en **SBX**.

Decimos que **T** es un agujero de **X** si es un conjunto totalmente ordenado de bolas de **X** con intersección vacía (Gruson, p. 287). Es conocido que **X** e.v.n.a. es esféricamente completo si no tiene agujeros.

Teorema 11. El conjunto de elementos de **SBX** que contienen un agujero dado de **X** es un $\mathbf{G}_{\delta}$, compacto, no vacío, raro de **SBX**.

Demostración. El conjunto de las bolas de un agujero de **X** es una base de filtro en **BX**, sea b_n una sucesión de bolas del agujero **T** tales que el límite de sus radios coincida con el ínfimo de los radios de las bolas de **T**, ya que en **T** no puede haber una bola de radio el ínfimo de los radios de las bolas de **T**, los ultrafiltros de **BX** que contienen a **T** son $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} u(b_n)$ que, por ser **SBX** compacto, es un compacto no vacío, si tuviera interior no vacío existiría algún elemento de h(**X**) en $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} u(b_n)$ en contra de ser **T** agujero.

Corolario 12. Para cada agujero **T** de **X** existe una función continua f: **SBX** $\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que el conjunto de elementos de **SBX** que contienen a **T** es $f^{-1}(0)$.

Demostración. Por el lema 5 de Banaschewski los $f^{-1}(0)$ son exactamente los $\mathbf{G}_\delta$ cerrados de **SBX** y como **SBX** es compacto de dimensión cero se sigue que los $\mathbf{G}_\delta$ cerrados son exactamente las intersecciones numerables de clopen de **SBX**, y por el teorema 11 se deduce el corolario.

BIBLIOGRAFIA

[1] BANASCHEWSKI, B.: «The duality of distributive σ-continuous lattices», *Lecture Notes in Mathematics*, **871**, p. 12-19, Springer, Berlín (1981).

[2] BACHMAN G.; BECKENSTEIN E.; NARICI, L., y WARNER, S.: «Rings of continuous functions with values in a topological field», *Trans. Amer. Math. Soc.*, **204**, p. 91-112 (1975).

[3] BELL, J., y MACHOVER, M.: *A course in mathematical logic*, North-Holland, Amsterdam (1977).

[4] GRUSCN, L.: «Catégories d'espaces de Banach ultramétriques», *Bull. Soc. Math. France*, **94**, p. 287-299 (1966).

[5] NARICI, L.; BECKENSTEIN, E., y BACHMAN, G.: *Functional analysis and valuation theory*, Marcel Dekker, Nueva York (1971).

[6] ——: «Some recent developments on repletions and Stone-Cech compactifications of 0-dimensional spaces», *Lectures Notes in Mathematics*, **378**, p. 310-321, Springer, Berlín (1974).

[7] NARICI, L., y BECKENSTEIN, E.: «Strange terrain-nonarchimedean spaces», *Amer. Math. Monthly*, **88**, p. 667-676 (1981).

[8] VAN ROOIJ, A. C. M.: *Non-archimedean functional analysis*, Marcel Dekker, Nueva York (1978).

[9] WAGNER F. J.: «Notes on compactifications I y II», *Indag. Math.*, **19**, p. 171-181 (1957).

[10] ——: «Normal base compactifications», *Indag. Math.*, **26**, p. 78-83 (1964).

Departamento de Teoría de Funciones.
Facultad de Matemáticas de Sevilla