Acción óptima en una ecuación de la programación dinámica

Por GREGORIO DÍAZ

Recibido: 30 junio 1982

Presentado por el académico numerario A. Dou

Abstract

Being A_m the infinitesimal generators of diffusion processes with constant coefficients and with discount factor $a_0^m > 0$, the equation:

$$\sup_m \{A_m u(x) - f_m(x)\} = 0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega$$

(called the Hamilton-Bellman equation) can be interpreted as the Dynamic Programming equation of a control problem where $u(x)$ is the optimal cost functional in which one can switch from one stochastic system the another without penalty.

We want to determinate the *action* m_0 for which:

$$\sup_m \{A_m u(x) - f_m(x)\} = A_{m_0} u(x) - f_{m_0}(x)$$

at a particular point x.

By means of arguments of Functional Analysis we obtain, under simple hypothesis «$A_{m_0} f_m(x) - A_m f_{m_0}(x) > \gamma > 0$», the region where the action m_0 is *optimal.*

For $\Omega = \mathbb{R}^N$, Friedman-Lions (1980) have obtained a similar result on outside of balls.

We, also, prove that $A_{m_0} u = f_{m_0}$ on a subset of the boundary of a region implies, under adequate hypothesis, the above coincidence in a interior subset of the region.

About the not coincidence $A_{m_0} u < f_{m_0}$ we obtain a topological property.

Resumen

Siendo A_m el generador infinitesimal de procesos de difusión con coeficientes constantes y factor de actualización $a_0^m > 0$, la ecuación:

$$\sup_m \{A_m u(x) - f_m(x)\} = 0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega$$

(llamada ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman) representa la ecuación de la Programación Dinámica de un problema de control en el que $u(x)$ es el óptimo funcional de un coste en el que se puede pasar de un sistema estocástico a otro sin gasto adicional alguno.

Se está interesado en determinar la *acción* m_0 para la que:

$$\sup_m \{A_m u(x) - f_m(x)\} = A_{m_0} u(x) - f_{m_0}(x)$$

en un punto particular $x \in \Omega$.

Empleando argumentos de Análisis Funcional obtenemos la región en la que la *acción* m_0 *es óptima*, bajo hipótesis sencillas:

$$A_{m_0} f_m(x) - A_m f_{m_0}(x) > \gamma > 0, \quad m \neq m_0$$

Cuando $\Omega = \mathbb{R}^N$ un resultado análogo ha sido obtenido por Friedman-Lions (1980), en donde la coincidencia es mostrada sobre el exterior de bolas.

Por otro lado, mostraremos que si se tiene la coincidencia $A_{m_0} u = f_{m_0}$ sobre una parte de la frontera de un conjunto entonces, bajo hipótesis adecuadas, la coincidencia se extiende a una región interior. Sobre la no coincidencia $A_{m_0} u < f_{m_0}$ obtenemos una caracterización topológica.

1. INTRODUCCION

Consideremos la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\sup_{m \geqslant 1} \{A_m u(x) - f_m(x)\} = 0 \quad \text{en casi todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{1}$$

donde los operadores A_m son los generadores infinitesimales de procesos de difusión con factor de actualización $a_0^m > 0$. Es bien conocido (ver Bensoussan-Lions (1978), Krylov (1980), P. L. Lions (1981), Bensoussan (1982), etc.) que la solución puede ser representada como el *coste óptimo* de un funcional estocástico en el que no hay ningún gasto adicional al pasar de sistema a otro.

El presente trabajo trata de establecer condiciones para tener una *acción* óptima en puntos particulares.

Introduzcamos brevemente el problema. Para cada entero m, sea $\sigma^m = (\sigma_{ij}^m)$ una matriz cuadrada de orden N con coeficientes constantes y (a_i^m) una matriz de N vectores constantes.

Sea

$$a_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N} \sigma_{il}^m \sigma_{lj}^m$$

e introduzcamos el operador:

$$A_m \phi = - \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^m D_{ij} \phi + \sum_{i=1}^{N} a_i^m D_i \phi + a_0^m \phi \tag{2}$$

sobre el que supondremos:

$$\left.\begin{array}{l} a_{ij}^m \geqslant 0, \quad \text{en el sentido de las matrices simétricas,} \\ |a_{ij}^m|,\ |a_i^m| \leqslant M, \text{ para alguna constante positiva } M, \\ a_0^m \geqslant 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

Por otra parte, sean $f_m(x)$ funciones de $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ satisfaciendo:

$$\|f_m\|_{W^{2,\infty}} \leqslant M \tag{4}$$

Para cada *función control no anticipativo*, $v = v(t)$ tomando valores en 1, 2, 3, ..., consideremos la ecuación diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dy_x^v(t) = \sigma^{v(t)}\, d\omega(t) - a^{v(t)}\, dt \\ y_x^v(0) = x \end{cases} \tag{5}$$

y la función *coste*:

$$J(x, v) = E\left[\int_0^\infty f_{v(t)}(y_x^v(t)) \exp\left(-a_0^{v(t)} t\right) dt\right] \tag{6}$$

finalmente, se define el *coste óptimo* mediante:

$$u(x) = \inf_{v} J(x, v) \qquad [7]$$

Suege inmediatamente una pregunta: *¿cuál es la mejor difusión en un punto x?*

Empleando argumentos heurísticos de la *Programación Dinámica* (ver Fleming-Rishel (1975)) podemos caracterizar el coste óptimo. En efecto, si suponemos $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ por la regla de Ito, de la diferenciación estocástica, se tiene, para cada m:

$$A_m u(x) - f_m(x) \leqslant 0, \quad \text{en c.t. } x \in \mathbb{R}^N$$

con lo que el *principio de Bellman* concluye la ecuación [1]. Por tanto, la pregunta puede ser formulada en términos de la Programación Dinámica. ¿Para qué m_0 se tiene la igualdad:

$$\sup_{m \geqslant 1} \{A_m u(x) - f_m(x)\} = A_{m_0} u(x) - f_{m_0}(x) \qquad [8]$$

en un punto particular x?

Antes de dar respuesta a [8] conviene citar algunos resultados sobre la ecuación [1] que supondremos a lo largo de este trabajo.

Teorema 1 (P. L. Lions (1981)). Supongamos [3] y [4], así como existen $\theta_l \in]0, 1[(1 \leqslant l \leqslant n_0)$ y $1 \leqslant m_1 \leqslant m_2 < \cdots < m_{n_0}$ tales que:

$$\sum_{l=1}^{n_0} \theta_l = 1, \ \sum_{l=1}^{n_0} \sum_{i,j=1}^{N} \theta_l a_{ij}^{m} \xi_i \xi_j \geqslant \theta |\xi|^2 \qquad [9]$$

Para alguna constante positiva $\theta > 0$ y cualquier $\xi \in \mathbb{R}^N$. Entonces, existe una única solución $u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ de [1].

El supuesto [9] de *no degenración complementaria* es requerido para la regularidad $W^{2,\infty}$. En dicha referencia se tiene también existencia y unicidad de $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ para [1], sin el supuesto [9]. Otros resultados pueden encontrarse en Krylov (1980).

Para abiertos *acotados* existen resultados debidos a varios autores (Evans-Friedman (1979), Evans-Lions (1980), Evans (1981), etc.). El resultado que emplearemos aquí será:

Teorema 2. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ de frontera regular. Supuestos [3] y [4], referidos a Ω, así como:

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij}^{m} \xi_i \xi_j \geqslant \theta |\xi|^2 \qquad [10]$$

para alguna constante $\theta > 0$ y cualquier $\xi \in \mathbb{R}^N$. *Entonces:*

i) Existe una única solución $u \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,\infty}(\Omega)$ de la ecuación:

$$\max_{1 \leqslant m \leqslant k} \{A_m u(x) - f_m(x)\} = 0, \quad \text{en c.t. } x \in \Omega \qquad [11]$$

(ver Evans-Lions (1980)).

ii)

$$u \in C^{2,\beta}(\Omega) \qquad [12]$$

para algún $\beta > 0$, supuesto f_m regulares (Evans (1981)).

Existen también, en este caso, resultados para operadores con nodegenancia complementaria, debidos a P. L. Lions, que aquí no consideraremos. La solución de [11] admite atmbién una interpretación estocástica como en [7] para:

$$J(x, v) = E\left[\int_0^{\tau_x} f_{v(t)}(Y_x^{v(t)}(t)) \exp(-a_x^{v(t)} t)\, dt\right] \qquad [13]$$

donde τ_x es el *tiempo de salida* de $\bar{\Omega}$ del proceso $y_x^{v(t)}(t)$.

El plan del presente trabajo es el siguiente: En la sección 2 recogemos diversos resultados del autor (G. Díaz (1980a, 1980b, 1982)) relativas a un caso concreto de a ecuación [1]. Exactamente para $A_{m_0}\phi = \phi$ y bajo hipótesis de *convexidad* sobre las funciones f_m, obtenemos la región para la que la acción m_0 es *óptima*. También bajo el mismo tipo de hipótesis se obtienen otro tipo de resultados complementarios cuya extensión al caso general es el motivo de la sección 3. En ella obtenemos que si $A_{m_0}f_m - A_m f_{m_0} > \gamma > 0$, para $m \neq m_0$, sobre una región arbitraria G, entonces la acción m_0 es *óptima* sobre un subconjunto de G, que se explicita. Un resultado de esta naturaleza ha sido obtenido por Friedman-Lions (1980) cuando G era el exterior de una bola, no explicitando la región de coincidencia.

También obtenemos en esta sección 3 que, bajo hipótesis análogas, si m_0 es la acción óptima en una parte de la frontera de G, también lo es sobre una región interior; finalmente se prueba que bajo hipótesis adecuadas si m_0 no es la acción óptima sobre un subconjunto conexo, tampoco lo es sobre toda la componente conexa que contiene a dicho conjunto.

Se han tomado los coeficientes constantes porque en la prueba de los resultados de la sección 3 se requiere la conmutatividad de los operadores A_m, aunque los teoremas 1 y 2, así como en los de la sección 2, son igualmente válidos para coeficientes dependientes de x y v.

En lo que sigue se empleará el convenio de sumación del índice repetido. Sin pérdida de generalidad supondremos $m_0 = 1$.

2. EL PROBLEMA DE OBSTACULO

Comentemos, brevemente, el caso en que un *operador coincide con la identidad*, sea este el A_1 para simplificar. Obsérvese que entonces [3] será exigida para $m > 1$.

De esta forma la ecuación [1] queda en la forma:

$$\text{máx}\ \{u(x) - f_1(x),\ \sup_{m > 1}\ [A_m u(x) - f_m(x)]\} = 0 \qquad [14]$$

conocida como la *ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman con obstáculo* f_1, que representa la ecuación de la programación dinámica del problema de control estocástico:

$$u(x) = \inf_{m > 1,\, \theta} J(x, m, \theta) \qquad [15]$$

siendo:

$$J(x, m, \theta) = E\left[\int_0^\theta f_m(Y_x^m(t)) \exp(-a_0^m t)\, dt + \right. \\ \left. + f_1(Y_x^m(\theta)) \exp(-\theta a_0^m)\right] \qquad [16]$$

donde θ es un *tiempo de parada* para el proceso Y_x^m.

Cuando todos los operadores A_m y las funciones f_m coinciden entre sí, respectivamente, para $m > 1$, la situación es particularmente distinta. En este caso el problema de control [15] admite una caracterización sencilla del tiempo de parada *óptima*, esto es, del tiempo θ_x para el que

$$u(x) = J(x, \hat{\theta}_x)$$

mediante:

$$\hat{\theta}_x = \inf\{s \geqslant 0 : u(Y_x(s)) = f_1(Y_x(s))\}$$

(ver Bensoussan-Lions (1981)).

De esta manera se distinguen dos conjuntos:

$[u < f_1] = \{x : u(x) < f_1(x)\}$ conjunto de *continuación*
$[u = f_1] = \{x : u(x) = f_1(x)\}$ conjunto de *parada*

cuyo conocimiento permite una sencilla elección de la *estrategia óptima.*

Problemas de naturaleza distinta pueden también ser modelados por la ecuación [14], por ejemplo, la posición de equilibrio de una membrana elástica costreñida a estar por debajo de un obstáculo (en esta situación $[u < f_1]$ corresponde al *conjunto de equilibrio*).

Consideremos, a modo de ilustración, el siguiente:

Ejemplo 1. Sean:

$$A_m = -\frac{d^2}{dx^2},\ f_m = 0, \quad \text{para} \quad m > 1, \quad \text{y} \quad f_1 = x^2 - \frac{1}{4}$$

Entonces sobre $\Omega =]-1, +1[$ la función:

$$u(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{3 - 2\sqrt{3}}{-1 + \sqrt{3}}\right)(x + 1) & , \quad x \in \left[-1, \dfrac{-2 + \sqrt{3}}{2}\right] \\ x^2 - \dfrac{1}{4} & , \quad x \in \left[\dfrac{-2 + \sqrt{3}}{2}, \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}\right] \\ \left(\dfrac{3 - 2\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}\right)(x - 1) & , \quad x \in \left[\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}, +1\right] \end{cases}$$

es la única solución de [14], con condiciones de contorno homogéneas de tipo Dirichlet.

Este sencillo ejemplo pone de manifiesto dos cuestiones típicas de los *problemas no lineales:*

i) La solución no es, en general, de clase C^2 a pesar de la regularidad de los datos. Obsérvese que $f_1 \in C^w$.
ii) Asociado a la solución aparece una frontera desconocida a priori (*la frontera libre*) que separa las regiones de equilibrio y coincidencia.

Razonando con este tipo de ejemplos se observa que la región de coincidencia está contenida en la región en que f_1 es convexa. De una forma más concreta se tiene para la ecuación [14].

Teorema 3 (G. Díaz (1980a)). Supongamos que se tiene:

$$a_{ij}^m \xi_i \xi_j \geqslant \theta |\xi|^2, \quad \forall\, m > 1, \forall\, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N \qquad [17]$$

$$a_0^m \geqslant \frac{M^2 N}{4\theta^2}, \quad \forall\, m > 1 \qquad [18]$$

existe un conjunto abierto G, no necesariamente acotado, y una constante positiva γ tal que:

$$f_m(x) - A_m f_1(x) \geqslant \gamma > 0, \quad \forall\, m > 1 \quad \text{en c.t. } x \in G \qquad [19]$$

Entonces $u(x_0) = f_1(x_0)$, si existe $x_0 \in G$ tal que:

$$d(x_0, \partial G) \geqslant \left[\frac{24\theta}{M\gamma} \sup_{m > 1} \|f_m - A_m f_1\|_\infty\right]^{1/2}$$

Para la ecuación [1] sobre un abierto Ω, acotado, de $\mathbb{R}^N$ con condiciones de contorno homogéneas de tipo Dirichlet, se tiene:

Teorema 4 (G. Díaz (1980a)).

i) Supongamos que se verifica [17], [18] y [19] sobre un abierto G contenido en Ω. Entonces $u(x_0) = f_1(x_0)$, para todo $x_9 \in G$, tal que:

$$d(x_0, \partial G) \geqslant \left[\frac{6MN}{\gamma} \cdot \text{máx}\left(||f_1||_\infty, \frac{4\theta}{M^2N} \sup_{m>1} \{||f_m - A_m f_1||_\infty\}\right)\right]^{1/2}$$

ii) Supuesto [17] y [18] así como:

$$f_m(x) - A_m f_1(x) \geqslant \gamma, \quad \forall\, m > 1 \text{ en c.t. } x \in \Omega \qquad [20]$$

entonces:

$$u(x_0) = f_1(x_0), \quad \text{si} \quad x_0 \in \Omega$$

y

$$d(x_0, \partial\Omega) \geqslant \left[\frac{6MN}{\gamma} \cdot \sup_{\partial\Omega} f_1\right]^{1/2}$$

iii) Bajo los supuestos de ii), si existe $x_0 \in \partial\Omega$ y

$$r > \left[\frac{6MN}{\gamma} \cdot \sup_{\partial\Omega} f_1\right]^{1/2}, \text{ tales que } f_1(x) = 0 \text{ en } \partial\Omega \cap B(x_0, r)$$

entonces $u(x) = f_1(x)$ en $x \in \bar{\Omega} \cap B(x_0, s)$ con

$$s = r - \left[\frac{6MN}{\gamma} \cdot \sup_{\partial\Omega} f_1\right]^{1/2}$$

Sobre el conjunto de continuación o equilibrio es posible obtener una caracterización topológica.

Teorema 5 (G. Díaz (1980b)). Supongamos que $\partial\Omega$ es conexo y que se verifica:

$$f_m(x) - A_m f_1(x) \geqslant 0, \quad \forall\, m > 1 \text{ en c.t. } x \in \Omega \qquad [21]$$

Entonces, supuesto $f_1 > 0$ en $\partial\Omega$, se tiene que $[u < f_1]$ *es conexo.*

Nota 1. Cuando se considera un abierto Ω de $\mathbb{R}^N$ la función coste es:

$$\begin{aligned} J(x, m, \theta) = E\Bigg[&\int_0^{\theta \wedge \tau_x} f_m(Y_x^m(t)) \exp(-a_0^m t)\, dt + \\ &+ f_1(Y_x^m(\theta)) \underset{\theta < \tau_x}{\chi} \exp(-\theta a_0^m) + h(Y_x^m(\tau_x)) \underset{\theta \leqslant \tau_x}{\chi} \exp(-\tau_x a_0^m)\Bigg] \end{aligned} \qquad [22]$$

donde τ_x es el *tiempo de salida del proceso* Y_x^m *de* Ω. El último sumado de [22] representa el coste de la decisión de parar el proceso después del tiempo de salida.

Nota 2. Los teoremas anteriores indican que bajo hipótesis de *convexidad* los valores de u y f_1 se disponen de forma sencilla: el corazón de G o de Ω está contenido en $[u = f_1]$, y $[u < f_1]$ contiene a la componente conexa de $\bar{\Omega}$, que contiene a $\partial\Omega$.

Nota 3. La hipótesis [20] puede ser considerada óptima. Por ejemplo, la función $u(x) = -e^{kx}(k < 1)$ verifica:

$$máx \{u, -u'' + u - (k^2 - 1)e^{kx}\} = 0$$

y no tiene coincidencia con el obstáculo.

Nota 4. En G. Díaz (1980a y 1980b) se obtienen los resultados anteriores incluso para coeficientes *no constantes.* En G. Díaz (1982) se extiende los anteriores resultdos a problemas de obstáculos gobernados por operadores diferenciales elípticos de segundo orden no cuasilineales expresados en su forma más general.

Nota 5. En G. Díaz (1980b) se obtienen resultados como los anteriores para condiciones de contorno de tipo Neumann.

Nota 6. De los resultados anteriores es posible extraer información sobre la extrategia óptima en algunos puntos x.

3. EL CASO GENERAL

El propósito de esta sección es extender los resultados anteriores a la ecuación [1], dando así respuesta a la pregunta señalada en [8]. Comenzaremos obteniendo resultados para el problema sobre un abierto Ω, acotado, de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular Γ. Supondremos, por tanto, el teorema 2. ii) (ver Evans (1981)).

La hipótesis [19] será ahora expresada por $A_1f_m - A_mf_1$.

Teorema 6. Supongamos que se tiene:

$$a_0^m \geqslant \frac{M^2N}{4\theta}, \quad \text{para } 1 < m \leqslant k \qquad [23]$$

existe un abierto G tal que $\bar{G} \subset \Omega$, y una constante positiva γ verificando:

$$A_1f_m(x) - A_mf_1(x) \geqslant \gamma > 0, \quad x \in G, 1 < m \leqslant k \qquad [24]$$

Entonces, $A_1u(x_0) = f_1(x_0)$, para todo $x_0 \in G$ tal que:

$$d(x_0, \partial G) \geqslant \left[\frac{24\theta}{M\gamma} \cdot \max_{1 < m \leqslant k} \|A_1f_m - A_mf_1\|_\infty\right]^{1/2}$$

Demostración. Emplearemos la siguiente aproximación debida a L. C. Evans (1981). Para cada $0 < \varepsilon < 1$, consideremos funciones $\phi_\varepsilon \in C^\infty$ convexas, tales que:

$$\begin{matrix} \phi_\varepsilon(t) = 0, \text{ si } t \leqslant 0 \\ 0 \leqslant \phi'_\varepsilon(t) \leqslant 1 \end{matrix} \quad ; \quad \phi'_\varepsilon(t) = 1, \text{ si } t \geqslant \varepsilon \qquad [25]$$

Sea, por otra parte, $F_\varepsilon(t_1, t_2) = t_1 + \phi_\varepsilon(t_2 - t_1)$ y

$$F^k_\varepsilon(t_1, ..., t_k) = F_\varepsilon(t_1, F^{k-1}_\varepsilon(t_2, ..., t_k)) \qquad [26]$$

Se comprueba fácilmente que:

$$0 \leqslant \frac{\partial F^k_\varepsilon}{\partial t_m} \leqslant 1 \quad ; \quad \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial F^k}{\partial t_m} = 1 \qquad [27]$$

$F^k{}_e$ es convexa y creciente en cada t_m.

Consideremos finalmente la solución regular u_ε de la *ecuación penalizada*:

$$F^k_\varepsilon(A_1u_\varepsilon - f_1, A_2u_\varepsilon - f_2, ..., A_ku_\varepsilon - f_k) = 0 \qquad [28]$$

L. C. Evans (1981) ha probado que xiste una única función $u \in C^{2,\beta}(\Omega) \cap W^{1,\infty}_0(\Omega)$ para algún, aunque pequeño, $\beta > 0$, que verifica:

$$\max_{1 \leqslant m \leqslant k} \{A_mu(x) - f_m(x)\} = 0, \quad x \in \Omega \qquad [29]$$

además:

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \quad \text{y} \quad A_1u_\varepsilon \longrightarrow A_1u \qquad [30]$$

uniformemente sobre compactos.

Con el fin de simplificar la notación, supondremos, sin pérdida de generalidad, que $f_1 = 0$, en caso contrario, bastaría con introducir $u - u_1$ con $A_1u_1 = f_1$ en Ω, $u_{1\,|\,\Gamma} = 0$. Por tanto, [24] queda en la forma:

$$A_1f_m(x) \geqslant \gamma > 0, \quad 1 < m \leqslant k, \quad \forall\, x \in G \qquad [31]$$

Aplicando A_1 a la ecuación penalizada [28] se obtiene, de [25] y [26]:

$$\sum_{m=1}^{k} D_mF^k_\varepsilon(-)[A_m(A_1u_\varepsilon) - A_1f_m] \geqslant 0 \qquad [32]$$

Consideremos ahora las funciones:

$$z(x) = A_1u_\varepsilon(x) + \eta|x - x_0|^2 \qquad [33]$$

con x, $x_0 \in G$, siendo η una constante positiva determinar, y

$$g_m(x) = \eta A_1|x - x_0|^2 + A_1f_m, \quad \text{para } 1 < m \leqslant k \qquad [34]$$

Por otra parte, para cualquier $\xi = (\xi_1, ..., \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ y $\xi_0 \in \mathbb{R}$, se tiene para $1 < m \leqslant k$:

$$a_{ij}^m \xi_i \xi_j + a_i^m \xi_i \xi_0 + a_0^m \xi_0^2 \geqslant \theta |\xi|^2 - \frac{M}{2\delta} |\xi|^2 - \frac{MN}{2} \delta \xi_0^2 + \frac{M^2 N}{4\theta} \xi_0^2 \quad [35]$$

para cualquier $\delta \in \mathbb{R}$, y es $\geqslant 0$ para $\delta \geqslant \frac{M}{2\theta}$, con lo que:

$$a_i^m \xi_i \xi_0 + a_0^m \xi_0^2 \geqslant -a_{ij}^m \xi_i \xi_j \geqslant -a_{ii}^m |\xi|^2 \quad [36]$$

Tomando $\xi_0 = |x - x_0|$ y $\xi_i = \dfrac{2(x^i - x_0^i)}{\xi_0}$, para $x, x_0 \in G$, $x \neq x_0$, se tiene:

$$2a_i^m (x^i - x_0^i) + a_0^m |x - x_0|^2 \geqslant -4a_{ii}^m \quad [37]$$

Entonces, sobre una bola $B = B(x_0, \rho) \subset G$, con $\rho > 0$, por determinar, y para cada $1 < m \leqslant k$, se tiene:

$$g_m(x) \geqslant (-2a_{ii}^m - 4a_{ii}^m)\eta + \gamma \geqslant (-6MN)\eta + \gamma \geqslant 0 \quad [38]$$

supuesto $\eta \leqslant \dfrac{\gamma}{6MN}$, para $x \neq x_0$, $g_m(x_0) \geqslant 0$.

Considerando ahora ρ tal que:

$$0 \leqslant -(C + \varepsilon) + \eta\rho^2 \leqslant A_1 u_\varepsilon(x) + \eta |x - x_0|^2 \quad [39]$$

se tendrá $z(x) \geqslant 0$ sobre ∂B, supuesto:

$$\rho^2 \geqslant \frac{C + \varepsilon}{\eta}, \quad \text{siendo} \quad C = \frac{4\theta}{M^2 N} \max_{1 < m \leqslant k} ||A_1 f_m - A_m f_1||_\infty$$

y ε destinado a tender hacia 0 (ver el final de la prueba).

Si suponemos $A_1 u(x_0) < 0$. Entonces por [30], para ε suficientemente pequeño, existirá $v > 0$, independiente de ε, tal que $A_1 u_\varepsilon(x_0) < -v$.

Sea $y_0 \in \bar{B}$, tal que $z(y_0) = \min_{\bar{B}} z(x)$. Claramente:

$$z(y_0) \leqslant z(x_0) = A_1 u_\varepsilon(x_0) < -v < 0$$

con lo que:

$$y_0 \in B \quad \text{y} \quad A_1 u_\varepsilon(y_0) < -v \quad [40]$$

De la ecuación [28], escrita en la forma:

$$0 = A_1 u_\varepsilon + \phi_\varepsilon(F_\varepsilon^{k-1}(A_2 u_\varepsilon - f_2, ..., A_k u_\varepsilon - f_k) - A_1 u_\varepsilon)$$

se obtiene *en* y_0, escogiendo ε tan pequeño que $\varepsilon < v$

$$F_\varepsilon^{k-1}(A_2 u_\varepsilon - f_2, \ldots, A_k u_\varepsilon - f_k) - A_1 u_\varepsilon \geqslant \varepsilon$$

(recuérdese $\phi_\varepsilon(s) \leqslant s$), y puesto que

$$D_1 F_\varepsilon^k(t_1, \ldots, t_k) = 1 - \phi'_\varepsilon(F_\varepsilon^{k-1}(t_2, \ldots, t_k) = 0, \quad \text{si} \quad F_\varepsilon^{k-1}(t_2, \ldots, t_k) - t_1 \geqslant \varepsilon$$

concluimos, de [32], *en* y_0:

$$\sum_{m=2}^{k} D_m F_\varepsilon^k(-)[A_m(A_1 u_\varepsilon) - A_1 f_m] \geqslant 0$$

Por otra parte

$$A_m z(y_0) \leqslant a_0^m z(y_0) < 0 \quad ; \quad -g_m(y_0) \leqslant 0, \quad (1 < m \leqslant k)$$

obteniéndose *en* y_0:

$$0 \leqslant \sum_{m=2}^{k} D_m F_\varepsilon^k(-)[A_m(A_1 u_\varepsilon + \eta|y_0 - x_0|^2) - \eta A_m|y_0 - x_0|^2 - A_1 f_m] =$$

$$= \sum_{m=2}^{k} D_m F_\varepsilon^k(-)[A_m z(y_0) - g_m(y_0)] < 0$$

Como indicábamos anteriormente, la prueba acaba verificando [39], para lo que, regresando al caso general $f_1 \neq 0$, basta con obtener:

$$||f_1 - A_1 u||_\infty \leqslant \frac{4\theta}{M^2 N} \max_{1 < m \leqslant k} ||A_1 f_m - A_m f_1||_\infty \qquad [41]$$

y finalmente concluir [39] de [30].

Por los resultados de regularidad (ver teorema 2) existirá $\bar{x} \in \Omega$ tal que $(f_1 - A_1 u)(\bar{x}) = ||f_1 - A_1 u||_{C(\bar{\Omega})}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $(f_1 - A_1 u)(\bar{x}) > 0$, pues en caso contrario [41] resulta evidente. Entonces, aseguramos que en algún entorno E de $\bar{x}$ se verifica:

$$(f_1 - A_1 u)(x) > 0 \quad \text{y} \quad A_{m'} u(x) = f_{m'}(x), \quad \forall\, x \in E \qquad [42]$$

para algún $1 < m' \leqslant k$. Razonemos por inducción sobre $k \geqslant 2$: [42] es evidente para $k = 2$.

Supuesto [42] cierto para $k - 1$, demostrémoslo para k. Como en algún entorno E de $\bar{x}$ $(f_1 - A_1 u)(x) > 0$, por [29] se tiene que:

$$\max_{1 < m \leqslant k} \{A_m u(x) - f_m(x)\} = 0, \quad \forall\, x \in E$$

Por otra parte, como $u \in C^{2,\beta}(\Omega)$, existirá $m'(1 < m' \leqslant k)$ para el que $A_{m'}u(\bar{x}) = f_{m'}(\bar{x})$. Entonces, si $\forall\, x \in E' - \{\bar{x}\}$, $A_{m'}u(x) < f_{m'}u(x)$, para algún entorno $E' \subset E$, de $\bar{x}$ se sigue de [29]:

$$\max_{1 < m \leqslant k,\, m \neq m'} \{A_m u(x) - f_m(x)\} = 0, \quad \forall\, x \in E' - \{\bar{x}\}$$

pero por continuidad se tendrá:

$$\max_{1 < m \leqslant k,\, m \neq m'} \{A_m u(x) - f_m(x)\} = 0, \quad \forall\, x \in E'$$

con lo que [42] se sigue de la etapa $k - 1$.

Una vez probado [42] se tiene sobre E:

$$A_{m'}A_1 u = A_1 A_{m'} u = A_1 f_m$$

y así del principio del máximo:

$$a_0^{m'}(f_1 - A_1 u)(\bar{x}) \leqslant A_{m'}(f_1 - A_1 u)(\bar{x}) = (A_{m'}f_1 - A_1 f_{m'})(\bar{x}) \qquad [43]$$

de donde fácilmente se obtiene [41]. Finalmente haciendo tender ε hacia cero se concluye la prueba.

Nota 7. Obsérvese que para obtener [43] se ha necesitado la coincidencia:

$$A_{m'}A_1 u = A_1 A_{m'} u = A_1 f_{m'}$$

sobre algún abierto.

El resultado anterior puede extenderse a la ecuación [1] referida a todo $\mathbb{R}^N$.

Teorema 7. Supongamos que se tiene:

$$a_0^m \geqslant \frac{M^2 N}{4\theta}, \quad \text{para } 1 < m \qquad [44]$$

$$f_m \in C^2(\mathbb{R}^N), \quad \text{para } 1 \leqslant m \qquad [45]$$

existe un abierto G, no necesariamente acotado, y una constante positiva γ verificando:

$$A_1 f_m(x) - A_m f_1(x) \geqslant \gamma > 0, \quad \forall\, x \in G,\ 1 < m \qquad [46]$$

Entonces, $A_1 u(x_0) = f_1(x_0)$, en casi todo $x_0 \in G$, tal que:

$$d(x_0, \partial G) \geqslant \left[\frac{24\theta}{M\gamma} \cdot \sup_{m > 1} \|A_1 f_m - A_m f_1\|_\infty\right]^{1/2}$$

Nota 8. El teorema 7 fue obtenido por Friedman-Lions (1980) para un tipo concreto de abiertos G, exáctamente para el exterior de una bola. Además, en esa referencia no se explicitaba completamente la región de coincidencia.

La prueba del teorema 6, y su versión correspondiente para el teorema 7, permiten estimar algunos *conjuntos de nivel.*

Corolario 1. Bajo los supuestos del teorema 6, y sobre cualquier bola $B(x_0, R_c) \subset G$, se tiene:

$$0 \geqslant A_1 u(x) + f_1(x) \geqslant -\frac{\gamma}{6MN} |x - x_0|^2, \quad \forall\, x \in B(x_0, R_c)$$

siendo:

$$R_c = \left[\frac{24\theta}{M\gamma} \cdot \max_{1 < m \leqslant k} ||A_1 f_m - A_m f_1||_\infty\right]^{1/2}$$

Corolario 2. Supuestos [23] y [24], se tiene:

$$0 \geqslant A_1 u(x) - f_1(x) \geqslant -\frac{\gamma}{6MN} (\text{máx } \{0, R_c - d(x, \partial G)\})^2, \quad \forall\, x \in G$$

La regularidad interior $u \in C^{2,\beta}(\Omega)$ permite obtener resultados complementarios sobre la ecuación [11] (ó [29]).

Teorema 8. Supongamos [23] y [24]. Si existe $x_0 \in \partial G$ y

$$r > \left[\frac{24\theta}{M\gamma} \cdot \max_{1 < m \leqslant k} ||A_1 f_m - A_m f_1||_\infty\right]^{1/2}$$

tales que $A_1 u(x) = f_1(x)$, $\forall\, x \in B(x_0, r) \cap \partial G$, entonces $A_1 u(x)$, $\forall$ x $\in$ G $\cap$ B(x_0, s), con:

$$s = r - \left[\frac{24\theta}{M\gamma} \cdot \max_{1 < m \leqslant k} ||A_1 f_m - A_m f_1||_\infty\right]^{1/2}$$

Demostración. La idea es repetir la prueba del teorema 6 sobre G. Supongamos, por tanto, [25]-[36], y tomemos:

$$\xi_0 = (|x - x_0| - s) \quad \text{y} \quad \xi_i = \frac{2}{\xi_0}\left((x^i - x_0^i) - \frac{(x^i - x_0^i)}{|x - x_0|} s\right) (1 \leqslant i \leqslant N)$$

que para cada $1 < m \leqslant k$ conduce a:

$$2a_i^m\left((x^i - x_0^i) - \frac{(x^i - x_0^i)}{|x - x_0|} s\right) + a_0^m(|x - x_0| - s)^2 \geqslant -4a_{ii}^m \qquad [47]$$

Por otra parte, tras cálculos elementales (ver G. Díaz (1980b)), se tiene para cada $1 < m \leqslant k$:

$$a_{ij}^m D_{ij}(|x - x_0| - s)^2 \leqslant 2a_{ii}^m \qquad [48]$$

Considerando la función:

$$v_s(x) = \begin{cases} \eta(|x - x_0| - s)^2 & , \text{ si } \ x \in \bar{G},\ |x - x_0| > s \\ 0 & , \text{ si } \ x \in \bar{G},\ |x - x_0| \leqslant s \end{cases} \qquad [49]$$

definamos, para $x \in G$:

$$\tilde{g}_m(x) = A_1 v_s(x) + A_1 f_m(x), \text{ para cada } \ 1 < m \leqslant k \qquad [50]$$

que verifican:

$$\tilde{g}_m(x) \geqslant (-2a_{ii}^m - 4a_{ii}^m)\eta + \gamma \geqslant (-6MN)\eta + \gamma \geqslant 0 \qquad [51]$$

supuesto:

$$\eta \leqslant \frac{\gamma}{6MN}$$

Por otra parte, la función:

$$\tilde{z}(x) = A_1 u_\varepsilon(x) + v_s(x), \quad x \in G \qquad [52]$$

es tal que:

$$\tilde{z}(x) \geqslant -(c + \varepsilon) + \eta(r - s)^2 \geqslant 0, \quad \forall\, x \in \bar{G}, \text{ con } |x - x_0| \geqslant r \quad [53]$$

supuesto $(r - s)^2 \geqslant \dfrac{C + \varepsilon}{\eta}$, para $C = \dfrac{4\theta}{M^2 N} \cdot \max\limits_{1 < m \leqslant k} ||A_1 f_m - A_m f_1||_\infty$

y ε destinado a tender hacia 0.

Además, $A_1 u(x) = 0$, para $x \in \partial G$, $|x - x_0| \leqslant r$, de donde por [30] se tiene:

$$\tilde{z}(x) = A_1 u_\varepsilon(x) + v_s(x) \geqslant A_1 u_\varepsilon(x) \geqslant -\nu/2 \qquad [54]$$

para $\varepsilon < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\nu/2, G)$, con $\nu > 0$.

Supongamos que $A_1 u(\bar{x}) < 0$, para algún $\bar{x} \in G$ con $|\bar{x} - x_0| \leqslant s$, claramente, como en la prueba del teorema 6, se tendrá:

$$A_1 u_\varepsilon(\bar{x}) \leqslant -\nu < 0 \qquad [55]$$

para $\varepsilon < \bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0(\nu, \bar{x})$.

Sea entonces $y_0 \in G$ tal que $\tilde{z}(y_0) = \min_{\bar{G}} \tilde{z}(x)$, con lo que:

$$\tilde{z}(y_0) = A_1 u_\varepsilon(y_0) + v_s(y_0) \leqslant \tilde{z}(\bar{x}) = A_1 u_\varepsilon(\bar{x}) \leqslant -v \qquad [56]$$

y

$$\tilde{z}(y_0) \leqslant -v, \quad A_1 u_\varepsilon(y_0) \leqslant -v \qquad [57]$$

Por otra parte, $y_0 \in G$. En efecto, si $y_0 \in \partial G$, por [53] se tendrá a fortiori $|y_0 - x_0| \leqslant r$, derivándose de [54] y [57] la contradicción:

$$-v/2 \leqslant \tilde{z}(y_0) \leqslant -v \qquad [58]$$

para $\varepsilon < \text{mín}\ \{\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}_0\}$.

La demostración acaba como en la prueba del teorema 6, obteniéndose la contradicción:

$$0 \leqslant \sum_{m=2}^{k} D_m F_\varepsilon^k(-)\,[A_m \tilde{z}(y_0) - \tilde{g}_m(y_0)] < 0 \qquad [59]$$

Nota 9. El teorema anterior indica que bajo condiciones adecuadas si se tiene la coincidencia $A_1 u = f_1$ sobre una parte de la frontera de G entonces se puede asegurar la coincidencia sobre alguna región interior de G.

Finalicemos este trabajo con un resultado sobre $A_1 u < f_1$.

Teorema 9. Sea $a_0^m > 0$, para $1 < m \leqslant k$. Sea G tal que ∂G es convexo y $\bar{G} \subset \Omega$, verificándose:

$$A_1 f_m(x) - A_m f_1(x) \geqslant 0, \quad \forall\, x \in G,\ 1 < m \leqslant k \qquad [60]$$

$$A_1 u(x) < f_1(x), \quad \text{para todo} \quad x \in \partial G \qquad [61]$$

Entonces $\{x \in \bar{G} : A_1 u(x) = f_1(x)\}$ es convexo.

Demostración. Sea U la componente conexa de $\{x \in \bar{G} : A_1 u(x) < f_1(x)\}$ que contiene a ∂G. Supongamos que U' es otra conexa de $\{x \in \bar{G} : A_1 u(x) < f_1(x)\}$ distinta de U.

Razonemos la argumentación del teorema 6, suponiendo [25]-[32]. Sobre $\partial U'$ se tendrá $A_1 u(x) = 0$, esto es:

$$A_1 u_\varepsilon(x) \geqslant -v/2, \quad \text{para} \quad x \in \partial U' \qquad [62]$$

con $\varepsilon < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(v/2, \bar{U}')$ y $v > 0$.

Por otro lado, sobre U' se tendrá $A_1 u(x) < 0$, esto es:

$$A_1 u_\varepsilon(x) \leqslant -v, \quad \text{para} \quad x \ni U' \qquad [63]$$

con $\varepsilon < \bar{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0(v, \bar{U}')$.

Consideremos:

$$y_0' \in \bar{U}' \quad \text{tal que} \quad Au_\varepsilon(y_0) = \min_{U'} Au_\varepsilon \leqslant -v < 0$$

$y_0' \notin \partial U'$, pues en caso contrario se tendrá:

$$-v/2 \leqslant Au_\varepsilon(y_0) \leqslant -v$$

para $\varepsilon < \text{mín} \{\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}_0\}$.

Pero tampoco $y_0 \in U'$, pues razonando como en la prueba del teorema 6 se tendría:

$$A_m(A_1 u_\varepsilon(y_0)) \leqslant a_0^m A_1 u_\varepsilon(y_0) < 0$$
$$A_1 f_m(y_0) \geqslant 0$$
$$F_\varepsilon^{k-1}(A_2 u_\varepsilon - f_2, \ldots, A_k u_\varepsilon - f_k) - \mathrm{z}\mathrm{A}_1\mathrm{u}_\varepsilon \geqslant \varepsilon \quad en\ y_0$$

para $\varepsilon < v$, con lo que de [32] se derivaría *en* y_0:

$$0 \leqslant \sum_{m=2}^{k} \mathrm{D}_m \mathrm{F}^k(-) \left[A_m(A_1 u_\varepsilon(y_0)) - A_1 f_m(y_0)\right] < 0$$

Luego podemos concluir que $U' = U$.

Nota 10. Obsérvese que el teorema anterior suministra información sobre *acciones múltiples.*

Nota 11. En un próximo trabajo se abordarán cuestiones análogas sobre el problema de evolución.

BIBLIOGRAFIA

BENSOUSSAN, A.: *Stochastic Control by Functional Analysis Methods*, Amsterdam, North-Holland (1982).

——, y LIONS, J. L.: *Applications des Inequations Variationelles en Controle Stochastique*, París, Dunold (1978).

DÍAZ, G.: «Estimation de l'ensemble de coincidence de la solution des problemes d'obstacle pour les equations de Hamilton-Jacobi-Bellman», *C. R. Acad. Sc.*, t. 290, p. 587, París (1980a).

——: *Problemas en Ecuaciones en Derivadas Parciales con No lineales sobre Operadores Diferenciales de Segundo Orden*, Madrid, Editorial de la Universidad Complutense (1980b).

——: «Fully nonlinear inequalities and certain question about their free boundary», aparecerá en *Annales de la Facultad de Ciencias de Tolouse* (1982).

EVANS, L. C.: «Classical solutions of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation for uniformly elliptic operators», aparecerá (1981).

——, y FRIEDMAN, A.: «Optional stochastic switching and Dirichlet problem for the Bellman equations», *Trans. A. M. S.*, 253, p. 365 (1979).

FLEMING, W., y RISHEL, R.: *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Nueva York, Springer (1975).

FRIEDMAN, A., y LIONS, P. L.: «The optimal strategy in the control problem associated with the Hamilton-Jacobi-Bellman equations», *SIAM J. Control*, 18, p. 191 (1980).

——: «The optimal strategy in the control problem associated with the Hamilton-Jacobi-Bellman equation», *SIAM J. Control*, 20, p. 152 (1982).

KRYLOV, N. V.: *Controlled Diffusion Processes*, Nueva York, Springer (1980).

LIONS, P. L.: «Control of diffusion processes in $\mathbf{R}^N$, *Comm. Pure Appl. Math.*, 34, p. 121 (1981).

Departamento de Ecuaciones Funcionales.
Facultad de Matemáticas de Madrid.