Algunas propiedades de los semiespacios cerrados que contienen a la intersección de una familia de conjuntos

Por José Manuel Gutiérrez Diez

Recibido: 6 octubre 1982

Presentado por el académico numerario Manuel Valdivia Ureña

Abstract

Let $(X_i)_{i \in I}$ be a family of sets in a locally convex space $F[\Omega]$. Several properties of the set of closed halfspaces which contain the intersection of the family, are stated. A generalized definition, to families of sets, of the Property of Farkas-Minkowsky, is considered.

Resumen

Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos en un espacio localmente convexo $F[\Omega]$. Se establecen varias propiedades del conjunto de los semiespacios cerrados que contienen a la intersección de la familia. Se considera una definición generalizada, a familias de conjuntos, de la propiedad de Farkas-Minkowsky.

1. PRELIMINARES

Los espacios vectoriales que utilizamos aquí están definidos sobre el cuerpo R de los números reales. Si W es un conjunto en un espacio vectorial, entonces W^i es el interior algebraico de W y W^{ir} el conjunto de los puntos internos de W (ver parágrafo 16.2 en [8]).

En todo lo que sigue, $F[\Omega]$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo. Salvo advertencia en contrario, nos atenemos a la notación y terminología de [8]. En el dual F' de F se considera siempre la topología débil. Dado un conjunto X en $F[\Omega]$, denotamos $X^p \equiv \{a \in F' \,/\, \langle a, x \rangle \leqslant 0, \forall\, x \in X\}$.

Considérese un conjunto X en $F[\Omega]$. En este artículo se estudian algunas propiedades de la familia de los semiespacios cerrados que contienen a X, y de la subfamilia de los semiespacios cerrados que contienen a X y en cuya frontera está un punto dado $\bar{x} \in F$.

Los semiespacios cerrados de F se pueden representar mediante vectores de $(F' \sim \{0\}) \times R$, según se precisa en la siguiente observación.

Observación 1. Considérese los conjuntos:

$$A \equiv \left\{\{\tau(a,\alpha)/\tau > 0\} \,/\, (a, \alpha) \in (F' \sim \{0\}) \times R\right\}$$

$$B \equiv \{G/G \text{ es un semiespacio cerrado en } F\}$$

Entonces la función $\Phi : A \longrightarrow B$ definida por:

$$\Phi(\{\tau(a, \alpha)/\tau > 0\}) \equiv \{x \in F/\langle a, \alpha\rangle \leqslant \alpha\}$$

es una función biyectiva (ver 15.9 (1) en [8] y 19.1 en [7]).

Notación 1. Sea X un conjunto en $F[\Omega]$. Entonces definimos el conjunto discriminante de X:

$$\mathbf{D}(X) \equiv \{(a, \alpha) \in F' \times R \;/\; \langle a, \alpha\rangle \leqslant \alpha, \; \forall\, x \in X\}$$

Proposición 1. Sea X un conjunto en $F[\Omega]$. Entonces $\mathbf{D}(X)$ es un cono convexo y cerrado que contiene al origen.

Demostración. Vamos a ver que $\mathbf{D}(X)$ es cerrado (lo otro es trivial). Sea $((a_\delta, \alpha_\delta), d \in \Delta)$ una red de elementos de $\mathbf{D}(X)$ que converge a $(\bar{a}, \bar{\alpha})$. Entonces, para todo $x \in X$, la red real $(\langle a_\delta, x\rangle - \alpha_\delta, \delta \in \Delta)$ está incluida en $]-\infty, 0]$, y converge a $(\langle \bar{a}, x\rangle - \bar{\alpha})$. En consecuencia $(\bar{a}, \bar{\alpha}) \in \mathbf{D}(X)$.

Observación 2. Sea X un conjunto en $F[\Omega]$. Entonces:

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{D}(\overline{co(X)})$$

Proposición 2. Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos en $F[\Omega]$. Entonces:

$$\mathbf{D}(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} \mathbf{D}(X_i)$$

La proposición 3 puede considerarse como dual de la proposición 2.

Notación 2. Sea Λ un conjunto en $F' \times R$. Entonces se define el debilitado de Λ:

$$deb(\Lambda) = \{(b, \gamma) \in F' \times R : \exists\, (b, \beta) \in \Lambda/\beta \leqslant \gamma\}$$

Nota: Se podría haber debilitado en sentido opuesto. El sentido de debilitación depende del sentido de las desigualdades que se consideren.

Lema 1. Sea X un conjunto convexo cerrado no vacío en $F[\Omega]$. Sea Λ un conjunto no vacío en $F' \times R$. Entonces las dos proposiciones que siguen son equivalentes:

$$\text{(a)} \quad X = \bigcap_{(b,\beta) \in \Lambda} \{x \in F \;/\; \langle b, x\rangle \leqslant \beta\}$$

$$\text{(b)} \quad \mathbf{D}(X) = \overline{deb(co(K(\Lambda)))}$$

Demostración. Considérese los sistemas de desigualdades en F:

$$(Q_1) \quad \langle a, x\rangle \leqslant \alpha, \; (a, \alpha) \in \mathbf{D}(X)$$

$$(Q_2) \quad \langle b, x\rangle \leqslant \beta, \; (b, \beta) \in \Lambda$$

En virtud del teorema de Farkas generalizado (ver [2]), una desigualdad $\langle e_1, x\rangle \leqslant \eta_1$ es relación consecuente de (Q_1) si, y sólo si:

$$(e_1, \eta_1) \in \overline{deb(co(K(\mathbf{D}(X)))} = \mathbf{D}(X)$$

y $\langle e_2, x\rangle \leqslant \eta_2$ es relación consecuente de (Q_2) si, y sólo si:

$$(e_2, \eta_2) \in \overline{deb(co(K(\Lambda)))}$$

Luego (Q_1) y (Q_2) son equivalentes si, y sólo si:

$$\mathbf{D}(X) = \overline{deb(co(K(\Lambda)))}$$

Considérese ahora que X es igual a la intersección de los semiespacios cerrados que lo contienen.

Proposición 3. Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia no vacía de conjuntos convexos y cerrados en $F[\Omega]$ cuya intersección es no vacía. Entonces:

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \mathbf{D}(\bigcap_{i \in I} X_i) = \overline{co(\bigcup_{i \in I} \mathbf{D}(X_i))}$$

Demostración. Es inmediato que:

$$\bigcap_{(b,\beta) \in \bigcup_{i \in I} \mathbf{D}(X_i)} \{x \in F/\langle b, x\rangle \leqslant \beta\}$$

Considérese ahora el lema 1.

Definición 1. Sea $(X_1)_{i \in I}$ una familia de conjuntos en $F[\Omega]$. Entonces se dice que $(X_i)_{i \in I}$ satisface la propiedad $(\tilde{N})$ si:

$$\mathbf{D}(\bigcap_{i \in I} X_i) = co(\bigcup_{i \in I} \mathbf{D}(X_i))$$

Nota: La inclusión $co(\bigcup_{i \in I} \mathbf{D}(X_i)) \subset \mathbf{D}(\bigcap_{i \in I} X_i)$ se cumple para toda familia $(X_i)_{i \in I}$ de conjuntos en $F[\Omega]$ (ver II, parágrafo 2.4 en [1]). Se hubiera podido definir la propiedad $(\tilde{N})$ a partir de la inclusión $\mathbf{D}(\bigcap_{i \in I} X_i) \subset co(\bigcup_{i \in I} \mathbf{D}(X_i))$ en vez de a partir de la igualdad.

Es condición necesaria para que se satisfaga la propiedad $(\tilde{N})$ que $co(\bigcup_{i \in I} \mathbf{D}(X_i))$ sea cerrado. Esta condición es también suficiente si la familia $(X_i)_{i \in I}$ cumple las hipótesis de la proposición 3.

Considérese en $F[\Omega]$ un conjunto X y un punto $\bar{x}$. Estamos interesados en la familia de los semiespacios cerrados que contienen a X y que vienen limitados por un hiperplano que pasa por $\bar{x}$. La observación 3 cumple un papel análogo ahora al de la observación 1.

Observación 3. Sea $\bar{x} \in F$. Denotamos:

$$A(\bar{x}) \equiv \{\{\tau a/\tau > 0\} \;/\; a \in (F' \sim \{0\})\}$$
$$B(\bar{x}) \equiv \{G/G \text{ es un semiespacio cerrado en } F \wedge \bar{x} \in Fr(G)\}$$

Entonces la función $\Phi : A(\bar{x}) \longrightarrow B(\bar{x})$ definida por:

$$\Phi(\{\tau a/\tau > 0\}) \equiv \{x \in F/\langle a, x\rangle \leqslant \langle a, \bar{x}\rangle\}$$

es una función biyectiva.
Sea $X \subset F$ y sea $\bar{x} \in F$. Se tiene que:

$$\{a \in F' \;/\; \langle a, x\rangle \leqslant \langle a, \bar{x}\rangle,\ \forall\, x \in X\} = (X - \bar{x})^{\rho}$$

Observación 4. Si $(V_i)_{i \in I}$ es una familia no vacía de conos en $F[\Omega]$, cerrados, convexos, no vacíos y con vértice en $\bar{x}$, entonces:

$$(\bigcap_{i \in I} (V_i - \bar{x}))^{\rho} = \overline{co(\bigcup_{i \in I} (V_i - \bar{x})^{\rho})}$$

(ver parágrafo 20.8.(7) en [8]).

Definición 2. Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos en F y sea $\bar{x} \in F$. Entonces se dice que $(X_i)_{i \in I}$ satisface la propiedad $(\tilde{N}(\bar{x}))$ si:

$$(\bigcap_{i \in I} (X_i - \bar{x}))^{\rho} = co(\bigcup_{i \in I} (X_i - \bar{x})^{\rho})$$

Sean V_1 y V_2 conos convexos que contienen al origen. Si (V_1, V_2) cumple la propiedad (N) de Jameson, entonces cumple la propiedad $(\tilde{N}(0))$ (ver la demostración del teorema 1 en [6]).

2. LA PROPIEDAD DE FARKAS-MINKOWSKY

Tal como definimos la propiedad de Farkas-Minkowsky, una familia de conjuntos la satisface si se puede lograr cierto nivel de aproximación a la intersección de la familia mediante la intersección de una subfamilia finita.

Definición 3. Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos en F. Entonces se dice que $(X_i)_{i \in I}$ es de Farkas-Minkowsky (o que satisface la propiedad de Farkas-Minkowsky) si:

$$\forall\, (a, \alpha) \in \mathbf{D}(\bigcap_{i \in I} X_i)\ \exists\, r \in Z^+\ \exists\, i_1, \ldots, i_r \in I \;/\; (a, \alpha) \in \mathbf{D}(\bigcap_{j=1}^{r} X_{i_j})$$

Definición 4. Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos en F y sea $\bar{x} \in F$. Entonces se dice que $(X_i)_{i \in I}$ es de Farkas-Minkowsky en $\bar{x}$ si:

$$\forall\ (a, \langle a, \bar{x} \rangle) \in \mathbf{D}(\bigcap_{i \in I} X_i)\ \exists\ r \in Z^+\ \exists\ i_1, \ldots, i_r \in I\ /\ (a, \langle a, \bar{x} \rangle) \in \mathbf{D}(\bigcap_{j=1}^{r} X_{i_j})$$

La propiedad de Farkas-Mikowsky es más débil que la propiedad $(\tilde{N})$, y análogamente para las respectivas versiones locales.

Proposición 4. Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos en F. Entonces:

i) Si $(X_i)_{i \in I}$ satisface la propiedad $(\tilde{N})$, entonces es de Farkas-Minkowsky.
ii) Si $(X_i)_{i \in I}$ satisface la propiedad $(\tilde{N}(\bar{x}))$ en $\bar{x} \in F$, entonces es de Farkas-Minkowsky en $\bar{x}$.

Demostración. i) Sea $(a, \alpha) \in \mathbf{D}(\bigcap_{i \in I} X_i)$. Entonces $(a, \alpha) \in co(\bigcup_{i \in I} \mathbf{D}(X_i))$. En consecuencia (ver II, parágrafo 2.4 en [1]):

$$\exists\ r \in Z^+\ \exists\ i_1, \ldots, i_r \in I\ /\ (a, \alpha) = \sum_{j=1}^{r} (a_{i_j}, \alpha_{i_j})$$

donde:

$$(a_{i_j}, \alpha_{i_j}) \in \mathbf{D}(X_{i_j}),\ j = 1, \ldots, r$$

Se tiene que:

$$(a, \alpha) \in \mathbf{D}(\bigcap_{j=1}^{r} X_{i_j})$$

ii) La demostración es análoga a la de i).

En el caso finito-dimensional, y asumiendo ciertas hipótesis, la propiedad de Farkas-Minkowsky y la propiedad $(\tilde{N})$ son equivalentes, y también lo son las correspondientes versiones locales en los puntos de la intersección de los conjuntos de la familia.

Teorema 1. Supóngase que F es de dimensión finita. Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos convexos en $F[\Omega]$. Supóngase que las subfamilias finitas de $(X_i^{ir})_{i \in I}$ tienen intersección no vacía. Entonces:

i) $(X_i)_{i \in I}$ es de Farkas-Minkowsky si, y sólo si, satisface la propiedad $(\tilde{N})$.
ii) Para todo $x \in \bigcap_{i \in I} X_i, (X_i)_{i \in I}$ es de Farkas-Minkowsky en $\bar{x}$ si, y sólo si, satisface la propiedad $(\tilde{N}(\bar{x}))$.

Demostración. Tanto en i) como en ii) la implicación $(\Leftarrow)$ resulta de la proposición 4. Demostraremos, en consecuencia, la implicación $(\Rightarrow)$.

i) Sea $(X_{i_j})_{j=1}^{m}$ una subfamilia finita no vacía de $(X_i)_{i \in I}$. Vamos a probar que:

$$(X_{i_j})_{j=1}^{m} \text{ satisface la propiedad } (\tilde{N}) \qquad [1]$$

Procedemos por inducción sobre m. Es trivial que [1] se cumple para $m = 1$. Supóngase ahora que [1] se satisface para $m - 1$. Primeramente vamos a ver que:

$$co\left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \mathbf{D}(X_{i_j})\right) \cap (-\mathbf{D}(X_{i_m})) \text{ es un subespacio} \qquad [2]$$

Es evidente que $co(\bigcup_{j=1}^{m-1} \mathbf{D}(X_{i_j})) \cap (-\mathbf{D}(X_{i_m}))$ es un convexo que contiene al origen. Sea ahora:

$$(a, \alpha) \in co\left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \mathbf{D}(X_{i_j})\right) \cap (-\mathbf{D}(X_m))$$

Por la hipótesis de inducción:

$$(a, \alpha) \in \mathbf{D}\left(\bigcup_{j=1}^{m-1} X_{i_j}\right) \cap (-\mathbf{D}(X_m)) \qquad [3]$$

Existe $x_0 \in \bigcap_{j=1}^{m} X_{i_j}^{ir}$. Teniendo en cuenta que $\mathbf{D}(\bigcap_{j=1}^{m-1} X_{i_j})$ y $\mathbf{D}(X_{i_m})$ están incluidos en $\mathbf{D}(\bigcap_{j=1}^{m} X_{i_j})$, se concluye de [3] que $H \equiv \{x \in F \;/\; \langle a, x\rangle = \alpha\}$ es un hiperplano soporte de $\bigcap_{j=1}^{m-1} X_{i_j}$ y de X_{i_m} en x_0. Pero se tiene que:

$$x_0 \in \left(\bigcap_{j=1}^{m-1} X_{i_j}\right)^{ir} \quad ; \quad x_0 \in X_m^{ir}$$

Luego:

$$\bigcap_{j=1}^{m-1} X_{i_j} \subset H \quad ; \quad X_{i_m} \subset H$$

(ver parágrafo 6.C en [5]). En consecuencia:

$$-(a, \alpha) \in \mathbf{D}\left(\bigcap_{j=1}^{m-1} X_{i_j}\right) \cap (-\mathbf{D}(X_{i_m}))$$

y con ello:

$$-(a, \alpha) \in co\left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \mathbf{D}(X_{i_j})\right) \cap (-\mathbf{D}(X_{i_m}))$$

Luego (2) se cumple.

En virtud de un resultado conocido (ver parágrafo 3.2 *in fine* en [10]), la suma de dos conos cerrados convexos V_1 y V_2 es cerrada si $V_1 \cap (-V_2)$ es un subespacio. En consecuencia, $co(\bigcup_{j=1}^{m-1} \mathbf{D}(X_{i_j})) + \mathbf{D}(X_{i_m})$ es cerrado. Se concluye que $co(\bigcup_{j=1}^{m} \mathbf{D}(X_{i_j}))$ es cerrado (ver II, parágrafo 2.4 en [1]). Considerando ahora la proposición 3 y que:

$$\bigcap_{j=1}^{m} \overline{X_{i_j}} = \overline{\bigcap_{j=1}^{m} X_{i_j}}$$

se infiere [1].

Hemos de demostrar que:

$$\mathbf{D}(\bigcap_{i \in I} X_i) \subset co(\bigcup_{i \in I} \mathbf{D}(X_i))$$

y esto es inmediato, considerando [1] y que $(X_i)_{i \in I}$ es de Farkas-Minkowsky.

ii) El resultado es obvio, teniendo en cuenta que la propiedad $(N(\bar{x}))$ se satisface para toda subfamilia finita no vacía $(X_{i_j})_{j=1}^{m}$ de $(X_i)_{i \in I}$ (ver el corolario 23.8.1 en [9]).

La hipótesis de que las subfamilias finitas de $(X_i^{ir})_{i \in I}$ tengan intersección no vacía, no es dispensable en el teorema 1. Véase el contraejemplo 1 en relación con i), y parágrafo 3.2 de [10] en relación con ii).

Contraejemplo 1. Considérese los conjuntos convexos:

$$X_1 \equiv \{(x, y) \in R^2 \,/\, y \geqslant x^2\}$$

$$X_2 \equiv \{(x, y) \in R^2 \,/\, y \leqslant 0\}$$

Se tiene que $X_1^{ir} \cap X_2^{ir} = \phi$. Vamos a ver que $(X_i)_{i=1,2}$ no satisface la propiedad $(\tilde{N})$. Supóngase que la satisfaciera. Entonces:

$$\mathbf{D}(X_1 \cap X_2) = \mathbf{D}(X_1) + \mathbf{D}(X_2) \qquad [4]$$

Es sencillo probar que:

$$\mathbf{D}(X_2) = \{(0, \nu, \tau) \in R^3 \,/\, \nu \geqslant 0,\ \tau \geqslant 0\}$$

Luego, considerando que $(1, 0, 0) \in \mathbf{D}(X_1 \cap X_2)$, se obtiene de [4] que:

$$\exists\, \gamma \geqslant 0\ \exists\, \eta \geqslant 0 \,/\, (1, -\gamma, -\eta) \in \mathbf{D}(X_1) \qquad [5]$$

De [5] concluimos que $x \leqslant \gamma\, x^2$, $\forall\, x \in R$, lo cual es una contradicción.

Consideramos ahora la relación entre una familia de conjuntos convexos y ciertas subfamilias suyas de particular interés, en cuanto a la propiedad local de Farkas-Minkowsky y a la propiedad $(\tilde{N}(\bar{x}))$.

Proposición 5. Sea $(X_k)_{k \in K}$ una familia de conjuntos convexos en F y sea $\bar{x} \in \bigcap_{k \in K} X_k$. Supóngase que $(X_k)_{k \in K}$ es de Farkas-Minkowsky en $\bar{x}$. Sea $J \subset K$, $J \neq \emptyset$, tal que $\bar{x} \in X_k^i$ para todo $k \in (K \sim J)$. Entonces:

i) $(\bigcap_{k \in K} (X_k - \bar{x}))^p = (\bigcap_{k \in J} (X_k - \bar{x}))^p$.

ii) $(X_k)_{k \in J}$ es de Farkas-Minkowsky en $\bar{x}$.

Demostración. i) Es evidente que:

$$(\bigcap_{k \in J} (X_k - \bar{x}))^p \subset (\bigcap_{k \in K} (X_k - \bar{x}))^p$$

Recíprocamente, sea $a \in (\bigcap_{k \in K} (X_k - \bar{x}))^p$. Existe $K_1 \subset K, K_1$ finito y no vacío, tal que $a \in (\bigcap_{k \in K_1} (X_k - \bar{x}))^p$. Supóngase ahora que:

$$a \notin (\bigcap_{k \in J} (X_k - \bar{x}))^p \qquad [6]$$

Sea $J_1 = J \cap K_1$. Entonces $a \notin (\bigcap_{k \in J_1} (X_k - \bar{x}))^p$ (si $J_1 = \phi$, $\bigcap_{k \in J_1} (X_k - \bar{x}) = F$). En consecuencia:

$$\exists\, x_1 \in (\bigcap_{k \in J_1} X_k) \,/\, \langle a, x_1 \rangle > \langle a, \bar{x} \rangle \qquad [7]$$

Puesto que $\bar{x} \in X_k^i$ para $k \in (K_1 \sim J_1)$:

$$\exists\, \gamma \in]0, 1[\,/\, \bar{x} + \gamma(x_1 - \bar{x}) \in (\bigcap_{k \in K_1} X_k) \qquad [8]$$

Por otra parte, por [7]:

$$\langle a, \bar{x} + \gamma(x_1 - \bar{x}) \rangle > \langle a, \bar{x} \rangle \qquad [9]$$

[8] y [9] contradicen que $a \in (\bigcap_{k \in K_1} (X_k - \bar{x}))^p$. Luego [6] es falso, y $a \in (\bigcap_{k \in J} (X_k - \bar{x}))^p$.

ii) Considérese la demostración de i).

Teorema 2. Sea $(X_k)_{k \in K}$ una familia de conjuntos convexos en F y sea $\bar{x} \in \bigcap_{k \in K} X_k$. Sea $J \subset K, J \neq \phi$, tal que $\bar{x} \in X_k^i$, para todo $k \in (K \sim J)$. Entonces las dos proposiciones que siguen son equivalentes:

a) $(X_k)_{k \in K}$ satisface la propiedad $(N(\bar{x}))$.

b) $(X_k)_{k \in J}$ satisface la propiedad $(\tilde{N}(\bar{x}))$ y $(X_k)_{k \in K}$ es de Farkas-Minkowsky en $\bar{x}$.

Demostración. Considérese la proposición 4 y la proposición 5, teniendo en cuenta que:

$$co\left(\bigcup_{k \in J} (X_k - \bar{x})^\rho\right) = co\left(\bigcup_{k \in K} (X_k - \bar{x})^\rho\right)$$

Notación 3. Sea $Y \subset F$. Considérese el sistema de desigualdades en Y:

$$(Q) \quad q_j(x) \leqslant 0, \; j \in J$$

donde J es un conjunto arbitrario, y $q_j : Y \longrightarrow R$ es una función, para todo $j \in J$.

Denotamos $S_j \equiv \{x \in Y \,/\, q_j(x) \leqslant 0\}, j \in J$. Entonces:

i) Se dice que el sistema (Q) es de Farkas-Minkowsky si lo es la familia $(S_j)_{j \in J}$.

ii) Si $\bar{x} \in F$, se dice que el sistema (Q) es de Farkas-Minkowsky en $\bar{x}$ si lo es la familia $(S_j)_{j \in J}$.

El material expuesto en este artículo puede ser aplicado al estudio de las cualificaciones de restricciones en optimización convexa. En esta línea publicaremos un próximo trabajo, en el que nos basaremos también en [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, N.: *Eléments de mathématique, Livre V (Espaces vectorielles topologiques)*, París, 1966-1964 (2 vols.).

[2] FAN, K.: «On infinite systems of linear inequalities», *J. Math. An. Appl.*, 21, 475-478 (1968).

[3] GUTIÉRREZ, J. M.: «Infragradientes y direcciones de decrecimiento», *Rev. Real Acad. Ciencias Madrid*, LXXVIII (4), 523-532 (1984).

[4] HOLMES, R.: *A Course on Optimization and Best Approximation*, Springer, Berlín-Heidelberg-Nueva York (1972).

[5] ——: *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer, Berlín-Heidelberg-Nueva York (1975).

[6] JAMESON, G. J. O.: «The duality of Pairs of Wedges», *Proc. London Math. Soc.* (3), 24, 531-547 (1972).

[7] ——: *Topology and Normed Spaces*, Champman and Hall, Londres (1974).

[8] KÖTHE, G.: *Topological Vector Spaces I*, Springer, Berlín-Heidelberg-Nueva York (1969).

[9] ROCKAFELLAR, T.: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton (N. J.) (1970).

[10] STOER, J., y WITZGALL, C. J.: *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*, Springer, Berlín-Heidelberg-Nueva York (1970).

Facultad de Matemáticas.
Universidad de Valencia.