$l_0^\infty(\sum)$ *no es totalmente tonelado*

por J. Arias de Reyna

Recibido: 24 septiembre 1982

Presentado por el académico correspondiente Antonio de Castro Brzezicki

Abstract

Let Σ be an infinite σ-field and denote by $l_0^\infty(\Sigma)$ the space spanned by the characteristic functions of elements of Σ, endowed with the supremum norm. We prove that $l_0^\infty(\Sigma)$ is not totally barrelled.

Valdivia (1979) demostró que el espacio $l_0^\infty(\Sigma)$ generado por las funciones características de los elementos de una σ-álgebra Σ es supratonelado. Posteriormente Valdivia-Pérez Carreras (1981) plantean el problema de si este espacio será totalmente tonelado. Aquí probamos que, si Σ es infinita, $l_0^\infty(\Sigma)$ no es totalmente tonelado.

Construiremos una sucesión de subespacios E_n cerrados de $l_0^\infty(\Sigma)$, tales que:

a) $l_0^\infty(\Sigma) = \bigcup E_n$.
b) Cada E_n es de codimensión infinita en $l_0^\infty(\Sigma)$.

De esto se deduce que existe un recubrimiento numerable de $l_0^\infty(\Sigma)$ por subespacios no tonelados (Valdivia-Pérez Carreras (1981)).

Teorema. *Sea Σ una σ-álgebra infinita. El espacio* $l_0^\infty(\Sigma)$ *no es totalmente tonelado.*

Demostración. Denotemos por 2^ω el espacio de las sucesiones $\langle x_n : n \in \omega\rangle$ tales que $x_n \in \{0, 1\}$ para cada n. Sea $l_n \subset 2^\omega$ el conjunto de las sucesiones cuya coordenada n-ésima es 0. El conjunto $\{l_n : n \in \omega\}$ genera el álgebra $\mathscr{C}$ de las uniones finitas de cilindros de 2^ω.

Como Σ es una σ-álgebra infinita, existe una sucesión $\langle C_n : n \in \omega\rangle$ en Σ de conjuntos distintos dos a dos. Podemos construir entonces (Sierpinski (1958), p. 107) una sucesión $\langle B_n : n \in \omega\rangle$ en Σ de conjuntos disjuntos dos a dos. Finalmente, a partir de $\langle B_n : n \in \omega\rangle$ es fácil obtener una sucesión $\langle A_n : n \in \omega\rangle$ de conjuntos independientes de Σ (Semadeni (1971), p. 469).

Por ser $\{l_n : n \in \omega\}$ un conjunto independiente y generador de $\mathscr{C}$, existe un único homomorfismo de álgebra de Boole $u : \mathscr{C} \longrightarrow \Sigma$ tal que $u(l_n) = A_n$ (Sikorski (1964), p. 36). Este homomorfismo es inyectivo, pues puede verse fácilmente en un isomorfismo entre $\mathscr{C}$ y el álgebra generada por $\{A_n : n \in \omega\}$ en Σ.

Designamos por X e Y los espacios de Stone correspondientes a las álgebras Σ y $\mathscr{C}$, respectivamente. El homomorfismo u induce una aplicación continua entre los compactos $\bar{u} : X \longrightarrow Y$ y por ser u inyectiva, $\bar{u}$ es sobreyectiva (Semadeni (1971), p. 281).

Tomemos $Z \subset X$ cerrado tal que $\bar{u} \mid Z$ sea irreducible (Semadeni (1971), p. 108). Sea $\langle J_n : n \in \omega \rangle$ una sucesión formada por todos los cilindros de $\mathscr{C}$. Para cada n, $\bar{J}_n$ denota el abierto y cerrado en Y correspondiente a J_n. Si G es un abierto en X tal que $G \cap Z \neq \emptyset$, existe un n tal que $\bar{u}^{-1}(\bar{J}_n) \cap Z \subset G$ (Semadeni (1971), p. 446).

El espacio $l_0^\infty(\Sigma)$ es isométrico al espacio $\mathscr{C}_0(X)$ de las funciones continuas definidas en X y que sólo toman un número finito de valores. Para cada natural n, denotemos por F_n el subespacio de $\mathscr{C}_0(X)$ formado por las funciones que toman un valor constante en $\bar{u}^{-1}(\bar{J}_n) \cap Z$.

$\mathscr{C}_0(X) = \bigcup F_n$. En efecto: sea $\phi \in \mathscr{C}_0(X)$ y tomemos $y \in Z$. Existe G abierto y cerrado de X tal que ϕ es constante en G y además $y \in G$. Por la propiedad antes mencionada existe n tal que $\bar{u}^{-1}(\bar{J}_n) \cap Z \subset G$ y, por tanto, $\phi \in F_n$.

Es claro que F_n es cerrado de $\mathscr{C}_0(X)$. Basta, pues, ver que ningún F_n es de codimensión finita.

Sea F_n uno de estos subespacios y fijemos arbitrariamente un número natural k. Vamos a encontrar k funciones $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k$ en $\mathscr{C}_0(X) / F_n$ que sean linealmente independientes. Tomemos k cilindros $J_{n_1}, J_{n_2}, ..., J_{n_k}$ en $\mathscr{C}$ disjuntos dos a dos y tales que $J_{n_1} \cup J_{n_2} \cup \cdots \cup J_{n_k} \subset J_n$. Como $\bar{u} \mid Z$ es sobre, existen puntos $y_i \in Z$ $(i = 1, 2, ..., k)$ tales que $\bar{u}(y_i) \in \bar{J}_{n_i}$ $(i = 1, 2, ..., k)$. Sean ahora G_i $(i = 1, 2, ..., k)$ abiertos y cerrados de X tales que $y_i \in G_i$ $(i = 1, 2, ..., k)$ e $y_j \notin G_i$ $(i \neq j)$. Sea ϕ_i la función característica de G_i. Puesto que $\phi_i(y_j) = \delta_{ij}$ es claro que las ϕ_i $(i = 1, 2, ..., k)$ son linealmente independientes. Además $y_i \in \bar{u}^{-1}(\bar{J}_n) \cap Z$ para todo i, luego toda $\phi \in F_n$ es constante en $\{y_1, ..., y_k\}$. Esto implica que el cociente $\mathscr{C}_0(X)/F_n$ el espacio generado por $\{\phi_1 + F_n, ..., \phi_k + F_n\}$ tiene dimensión $\geqslant k - 1$. Como esto es válido para todo k natural, F_n es de codimensión infinita en $\mathscr{C}_0(X)$.

BIBLIOGRAFIA

SEMADENI, Z.: *Banach spaces of continuous functions*, vol. 1, Polish Scientific Publishers, Warszawa (1971).

SIERPINSKI, W.: *Carinal and Ordinal numbers*, Polish Scientific Publishers, Warszawa (1958).

SIKORSKI, R.: *Boolean Algebras* (2.ª ed.), Springer, Berlín (1964).

VALDIVIA, M.: «On certain barrelled normed spaces», *Ann. Inst. Fourier*, 29, 3, 39-56 (1979).

——, y PÉREZ CARRERAS, P.: «On totally Barrelled Spaces», *Math. Z.*, 178, 263-269 (1981).

Facultad de Matemáticas.
Universidad de Sevilla