Medida de no compacidad y puntos fijos de aplicaciones condensantes y no expansivas en espacios localmente convexos

Por José Carmona Alvarez

Recibido: 7 noviembre 1982

Presentado por el académico correspondiente Antonio de Castro Brzezicki

Resumen

Se define una medida (α) de no precompacidad para los conjuntos acotados de un espacio localmente convexo (e.l.c.), y se prueba que dicha medida verifica propiedades análogas a las de la medida de Kuratowski. Se demuestra un teorema de punto fijo para aplicaciones α-condensantes que generaliza el teorema de Sadovskii a e.l.c. Finalmente se prueba la existencia genérica de puntos fijos para aplicaciones no-α-expansivas en espacios de Fréchet.

Abstract

In this paper it is defined a nonprecompactness measure for the bounded sets of a locally convex space (l.c.s.). The properties for this measure corresponding to the ones for the Kuratowski's are proved. A fixed point theorem for α-condensing mappings, which enlarges to l.c.s. the Sadovskii's fixed point theorem, is derived. Finally we prove the generic existence of fixed point of non-α-expansive mappings in Fréchet spaces.

1. INTRODUCCION

La medida de no compacidad (α_K) de Kuratowski [6], permite a Darbo [2] extender el Teorema del Punto Fijo de Schauder en el sentido de sustituir una hipótesis de compacidad por una de acotación más una de α_K-contractividad. Sadovskii [9] a su vez generaliza este resultado a aplicaciones α_K-condensantes. Recientemente, Lopes Pinto [7] utilizando la medida de no compacidad de De Blasi [3] para la topología debilitada de un Banach, obtiene teoremas del punto fijo en el sentido anterior.

En el presente trabajo, definimos una medida de no compacidad (α) en espacios localmente convexos (e.l.c.), que goza de las propiedades análogas a las de la de Kuratowski. En 4.2 demostramos un teorema de punto fijo que extiende el teorema de Sadovskii a e.l.c. completos, y que supone, asimismo, una generalización del teorema de Tychonoff [10] en el mismo sentido en el que el teorema de Sadovskii generaliza al de Schauder.

Finalmente, en la sección 5, se estudia la existencia de puntos fijos para aplicaciones no-α-expansivas desde un punto de vista genérico. Es conocido [8] que existen aplicaciones no-expansivas que no tienen puntos fijos ni aun en el contexto de los espacios de Hilbert. No obstante, De Blasi [4] y Butler [1] probaron, independientemente, la existencia genérica de puntos fijos para aplicaciones no-α_K-expansivas en espacios de Banach. En esta sección se prueba un resultado similar para aplicaciones no-α-expansivas en espacios de Fréchet, utilizando un resultado reciente de Domínguez Benavides [5].

2. NOTACION

Denotaremos por un E un e.l.c. sobre K ($K = R$ ó C), y por $B(E)$ la familia de los subconjuntos acotados de E. Λ denotará el conjunto de todas las seminormas continuas en E; y utilizaremos Γ para denotar subconjuntos de Λ que verifiquen:

i) $p \in \Gamma$, entonces $hp \in \Gamma$ para todo $h \in R$, $h > 0$;
ii) $\{\{x \in E : p(x) \leqslant 1\} : p \in \Lambda\}$ es una base de entornos de cero para la topología de E.

A tales conjuntos de seminormas los denominaremos *exhaustivos*. Por último, a la medida de no compacidad de Kuratowski [6] la denotaremos por α_K.

3. MEDIDA DE NO COMPACIDAD EN E.L.C.

3.1. *Definición:*

Sea $A \in B(E)$. Denotamos:

$$\alpha(A) = \left\{ p \in \Lambda\text{: para cada } \varepsilon > 0, \text{ existen } B_i \subset E,\ i = 1, \ldots, m, \right.$$

$$\left. \text{tales que } A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i \quad \text{y} \quad \delta_p(B_i) \leqslant 1 + \varepsilon \right\}$$

siendo

$$\delta_p(B_i) = \sup \{p(x - y) : x, y \in B_i\}$$

La aplicación: $A \in B(E) \longrightarrow \alpha(A)$ la denominaremos medida de no precompacidad (de no compacidad si E es completo) en E.

Nota 1:

Si $p \in \Lambda - \alpha(A)$, entonces existe $h \in R$, $0 < h \leqslant 1$ tal que:

a) $kp \in \alpha(A)$ si $0 \leqslant k < h$
b) $kp \in \Lambda - \alpha(A)$ si $h < k$.

En efecto, puesto que A es acotado, existe $M \in R$ tal que

$$p(x) \leqslant M \quad \text{para todo} \quad x \in A$$

y de aquí que

$$\frac{1}{2M} p \in \alpha(A)$$

Es inmediato, entonces, que

$$h = \sup \{k \in B : kp \in \alpha(A)\}$$

verifica $0 < h \leqslant 1$ y a) y b).

Nota 2

Si E es normado, una relación entre α y α_K es la siguiente:

$$\alpha_K(A) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha(A) = \Lambda \tag{1}$$

$$\alpha_K(A) = \varepsilon \ (\varepsilon > 0) \quad \text{si y sólo si} \quad \sup \{h \in R \colon h\| \ \| \in \alpha(A)\} = 1/\varepsilon \tag{2}$$

En efecto, (1) es consecuencia de 3.3 (que se probará más adelante) y de la caracterización de precompactos por α_K (véase [6]).

Para probar (2), sea

$$\alpha_K(A) = \varepsilon$$

Si $0 < k < 1/\varepsilon$, puesto que existen $B_i \subset E$, $i = 1, \ldots, m$, tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i \quad \text{con} \quad \delta_{\| \ \|}(B_i) \leqslant 1/k$$

tenemos que

$$\delta_{k\| \ \|}(B_i) \leqslant 1$$

por lo que

$$k\| \ \| \in \alpha(A)$$

Si $1/\varepsilon < k$ tenemos que

$$k\| \ \| \in \Lambda - \alpha(A)$$

ya que si

$$k\| \ \| \in \alpha(A)$$

tomando $0 < \varepsilon^* < \varepsilon k - 1$, existirían $B_i \subset E$, $i = 1, ..., m$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i \quad \text{con} \quad \delta_{k\| \,\|}(B_i) \leqslant 1 + \varepsilon^*$$

de donde

$$\delta_{\| \,\|}(B_i) < \varepsilon$$

en contradicción con

$$\alpha_K(A) = \varepsilon$$

Recíprocamente, si

$$\sup \{k \in R: k\| \,\| \in \alpha(A)\} < +\infty$$

entonces $\alpha(A) \neq A$, y por (1) se tendrá

$$\alpha_K(A) = \varepsilon > 0$$

La implicación resulta entonces de la anterior demostrada

3.2. *Proposición*

i) $A, B \in B(E)$, $A \subset B$; *entonces* $\alpha(B) \subset \alpha(A)$.

ii) $\alpha(A) = \alpha(\bar{A})$ para todo $A \in B(E)$.

iii) $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cap \alpha(B)$, para todo $A, B \in B(E)$.

iv) $\alpha(tA) = \dfrac{1}{|t|}\alpha(A)$, para todo $A \in B(E)$ y todo $t \in K$, $t \neq 0$.

v) $\alpha(A) = \alpha(co(A))$, para todo $A \in B(E)$.

Demostración: Las demostraciones de i) a iv) son triviales a partir de la definición de α.

Para probar v), bastará probar que $\alpha(A) \subset \alpha(co(A))$. Sea $p \in \alpha(A)$ y $0 < \varepsilon < 1$. Para cada $\varepsilon' : 0 < \varepsilon' < \varepsilon$, existen $B_i \subset E$, $i = 1, \ldots, m$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i \quad \text{con} \quad \delta_p(B_i) \leqslant 1 + \varepsilon'$$

Por otra parte, puesto que $co(A) \in B(E)$, existe $M \in R$, $M \geqslant 1$ tal que $p(x) \leqslant M$ para todo $x \in co(A)$.

Por ser $[0, 1]$ compacto, para cada $h > 0$, existe $\sigma \subset [0, 1]$ finito, tal que para cada $t \in [0, 1]$ existe

$$s \in \sigma \quad \text{con} \quad |t - s| < \frac{h}{mM}$$

1) Sea $t \in [0, 1]$ y $s \in \sigma$ tales que

$$|s - t| < \frac{h}{mM}$$

Denotemos por $\mathscr{E}(s(co(B_i)))$ al conjunto:

$$\left\{x \in E: \inf\{p(x - z): z \in s(co(B_i))\} \leqslant \frac{h}{mM}\right\}$$

Veamos que

$$t(co(B_i)) \subset \mathscr{E}(s(co(B_i)))$$

En efecto, si $y \in co(B_i)$ podemos expresar

$$ty = sy + (t - s)y$$

en donde

$$p((t - s)y) \leqslant \frac{h}{m}$$

(hemos supuesto sin pérdida de generalidad que $B_i \subset A$).

2) Para cada $\{s_i \in \sigma: i = 1, \ldots, m\}$ tales que

$$\left|1 - \sum_{i=1}^{m} s_i\right| \leqslant h$$

definimos:

$$U_j = \sum_{i=1}^{m} \mathscr{E}(s_i(co(B_i)))$$

La familia $\{U_j: j \in L\}$ es evidentemente finita y verifica:

$$co(A) \subset \bigcup_{j \in L} U_j$$

En efecto, si $w \in co(A)$, entonces

$$w = \sum_{k=1}^{l} r_k x_k \quad \text{con} \quad r_k \geqslant 0$$

$$\sum_{k=1}^{l} r_k = 1 \quad \text{y} \quad x_k \in A$$

Sea

$$J_1 = \{k\colon 1 \leqslant k \leqslant l \quad \text{y} \quad x_k \in B_1\}$$

Definido J_n con $n < m$, definimos J_{n+1} por:

$$J_{n+1} = \{k\colon 1 \leqslant k \leqslant l, \quad x_k \in B_{n+1}, \quad k \notin J_i, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

Obtenemos así una familia finita de conjuntos disjuntos (algunos pueden ser vacíos) y tal que si $k \in J_i$, entonces $x_k \in B_i$.

Sean $t_i = \sum_{k \in J_i} r_k$ ó $t_i = 0$ si $J_i = \phi$. Para cada t_i elegimos $s_i \in \sigma$ tal que

$$|s_i - t_i| \leqslant \frac{h}{mM}$$

Entonces,

$$\left|\sum_{i=1}^{m} s_i - 1\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} (s_i - t_i)\right| \leqslant h$$

Por otra parte, y puesto que

$$w = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k \in J_i} r_k x_k\right)$$

en donde podemos expresar:

$$\sum_{k \in J_i} r_k x_k = t_i \sum_{k \in J_i} t_i^{-1} r_k x_k \quad \text{si} \quad t_i \neq 0$$

Tenemos, por tanto,

$$\sum_{k \in J_i} r_k x_k \in t_i(co(B_i))$$

y por 1)

$$w \in \sum_{i=1}^{m} \mathscr{E}(co(B_i))$$

que es un U_j.

3) $\delta_p(U_j) < 1 + \varepsilon' + 4h$, para todo $j \in L$.

En efecto

$$\delta_p(U_j) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \delta_p(\mathscr{E}(s_i(co(B_i)))) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left(s_i \delta_p(B_i) + \frac{2h}{m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \varepsilon') \sum_{i=1}^{m} s_i + 2h \leqslant 1 + \varepsilon' + h(\varepsilon' + 3) < 1 + \varepsilon' + 4h$$

4) Puesto que h es arbitrario, tomando

$$h = \frac{(\varepsilon - \varepsilon')}{4}$$

tenemos por 2) y 3) que

$$co(A) \subset \bigcup_{j \in L} U_j \quad \text{con} \quad \delta_p(U_j) < 1 + \varepsilon$$

y, por tanto, que

$$p \in \alpha(co(A))$$

3.3. *Proposición:*

Sea $A \in B(E)$. Son equivalentes:

a) A es precompacto.
b) $\alpha(A) = \Lambda$.
c) Existe $h \in R$, $h > 1$ y $\Gamma \subset \Lambda$ exhaustivo, tal que $\alpha(A) \supset h(\alpha(A) \cap \Gamma)$.
d) Existe $\Gamma \subset \Lambda$ exhaustivo, tal que $\alpha(A) \supset \Gamma$.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ *b*): Sea $p \in \Lambda$, puesto que

$$U_p = \left\{x \in E\colon \mathrm{p}(x) \leqslant \frac{1}{2}\right\}$$

es un entorno de cero y A es precompacto, existen $x_i \in E$, $i = 1, \ldots, m$ tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} (x_i + U_p)$$

en donde

$$\delta_p(x_i + U_p) \leqslant 1$$

Por tanto,

$$p \in \alpha(A)$$

b) $\Rightarrow$ *c*): Trivial.
c) $\Rightarrow$ *d*): Sea $p \in \Gamma$, según la nota 1 de 3.1, existe $k \in R$ tal que

$$kp \in \alpha(A)$$

Tomando $n \in N$ tal que

$$h^n k > 1$$

se tendrá en virtud de c) que

$$(h^n k)p \in \alpha(A)$$

y de aquí que

$$p \in \alpha(A)$$

$d) \Rightarrow a)$: Sea U un entorno de cero. Existe $p \in \Gamma$ tal que

$$\{x \in E\colon p(x) \leqslant 2\} \subset U$$

Sea $0 < \varepsilon < 1$, puesto que $p \in \alpha(A)$, existen $B_i \subset E$, $i = 1, \ldots, m$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i \quad \text{con} \quad \delta_p(B_i) \leqslant 1 + \varepsilon$$

Tomando $x_i \in B_i$ tenemos que

$$B_i \subset x_i + U$$

ya que si $y \in B_i$,

$$p\,(y - x_i) \leqslant 1 + \varepsilon < 2$$

Por tanto,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} (x_i + U).$$

La siguiente proposición es un resultado de tipo Cantor-Kuratowski.

3.4. *Proposición:*

Sea E además completo. Si

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots \quad ; \quad A_i \in B(E)$$

no vacíos, cerrados, y existe $\Gamma \subset \Lambda$ exhaustivo, tal que para cada $p \in \Gamma$ existe $n_p \in N$ de tal forma que $p \in \alpha(A_{n_p})$, entonces $\bigcap_{n \in N} A_n$ es no vacío y compacto.

Demostración:

Para cada $n \in N$ elegimos $x_n \in A_n$. Sea $A = \{x_n: n \in N\}$. A es precompacto: en efecto, sea $p \in \Gamma$ existe $n_p \in N$ tal que $p \in \alpha(A_{n_p})$ y, por tanto,

$$p \in \alpha(\{x_n: n \geqslant n_p\}) = \alpha(A)$$

Tenemos entonces que $\Gamma \subset \alpha(A)$ y por 3.3 que A es precompacto.

Por ser A precompacto, existe un punto adherente de $\{x_n\}$. Sea x punto adherente de $\{x_n\}$, entonces $x \in A_n$ para todo n, y de aquí que $\bigcap_{n\in N} A_n$ es no vacío.

Veamos por último que $\bigcap_{n\in N} A_n$ es precompacto y, por tanto, que es compacto por ser intersección de cerrados. Si $p \in \Gamma$ existe $n_p \in N$ tal que

$$p \in \alpha(A_{n_p}) \subset \alpha\left(\bigcap_{n\in N} A_n\right)$$

y, por tanto,

$$\Gamma \subset \alpha\left(\bigcap_{n\in N} A_n\right).$$

4. UN TEOREMA DEL PUNTO FIJO

4.1. *Definición:*

Sea $\Omega \in B(E)$ y $T: \Omega \longrightarrow \Omega$ continua.

Si existen $k \in R$, $k > 1$ y $\Gamma \subset \Lambda$ exhaustivo tal que:

$$\alpha(T(A)) \supset k(\alpha(A) \cap \Gamma)$$

para todo $A \subset \Omega$, diremos que T es *α-contractiva.* Si $k = 1$ entonces diremos que T es *no-α-expansiva.*

Si existe $\Gamma \subset \Lambda$ exhaustivo tal que

$$\alpha(T(A)) \cap \Gamma \supset \alpha(A) \cap \Gamma \text{ (estrictamente)}$$

para todo $A \subset \Omega$ no precompacto, diremos que T es *α-condensante.*

Nota 1:

Eivdentemente: α-contractiva $\Rightarrow$ α-condensante $\Rightarrow$ no-α-expansiva.

Nota 2:

Si E es normado, se deduce de la nota 2 a 3.1, tomando:

$$\Gamma = \{t\| \ \|: t > 0\}$$

que: α_K-contractiva $\Rightarrow$ α-contractiva; α_K-condensante $\Rightarrow$ α-condensante; no-α_K-expansiva $\Rightarrow$ no-α-expansiva.

4.2. *Teorema:*

Sea E además completo. Si $\Omega \subset E$ no vacío, cerrado, acotado y convexo; y T: $\Omega \longrightarrow \Omega$ α-condensante. Entonces

$$F = \{z \in \Omega: T(z) = z\}$$

es no vacío y compacto.

Demostración:

Sea $x_0 \in \Omega$, denotamos

$$\mathscr{A} = \{A \subset \Omega: \text{cerrados, convexos, } x_0 \in A,\ T(A) \subset A\}$$

$\mathscr{A}$ es no vacío ya que $\Omega \in \mathscr{A}$. Sea $\Omega_0 = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A$. Ω_0 es no vacío, cerrado, convexo, y $T(\Omega_0) \subset \Omega_0$. Veamos que Ω_0 es compacto: si Ω_0 no es compacto,

$$\alpha(T(\Omega_0)) \cap \Gamma \supset \alpha(\Omega_0) \cap \Gamma$$

estrictamente, para algún Γ exhaustivo. Sea entonces,

$$A_1 = \overline{co}\{\{x_0\} \cup T(\Omega_0)\}$$

Tenemos que $A_1 = \Omega_0$, ya que $A_1 \subset \Omega_0$ según se deduce de la definición de A_1 y de las propiedades de Ω_0; y por otra parte

$$T(A_1) \subset T(\Omega_0) \subset A_1$$

implica que

$$A_1 \in \mathscr{A}$$

y, por tanto,

$$\Omega_0 \subset A_1$$

Como además

$$\alpha(A_1) = \alpha(T(\Omega_0))$$

en virtud de 3.2, llegamos a contradicción con la hipótesis de ser T α-condensante.

Basta aplicar ahora el Teorema de Tychonoff [10] a $T: \Omega_0 \to \Omega_0$ para obtener que $F \neq \phi$. Por otra parte, F es cerrado por ser $I - T$ continua, y precompacto por ser T α-condensante.

Nota 1:

Según la nota 2 a 4.1 el teorema anterior generaliza el Teorema de Sadovskii [9].

5. EXISTENCIA GENERICA DE PUNTOS FIJOS PARA APLICACIONES NO-α-EXPANSIVAS

Sea E un espacio de Fréchet, y d una métrica acotada e invariante por traslación que define la topología de E. Sea $\Omega \subset E$, no vacío, cerrado, acotado y convexo. Denotaremos por $\mathscr{M}$ el conjunto de todas las aplicaciones de Ω en Ω no-α-expansivas respecto de un mismo $\Gamma \subset \Lambda$ exhaustivo, y dotado de la topología de la convergencia uniforme con la distancia:

$$d(T, S) = \sup \{d(T(x), S(x) \ : \ x \in \Omega\}$$

5.1. *Teorema:*

Con la notación anterior, $\mathscr{M}$ es completo y existe $\mathscr{M}' \subset \mathscr{M}$ residual, tal que para cada $T \in \mathscr{M}'$ se satisfacen:

i) $\{x \in \Omega\colon T(x) = x\}$ es no vacío y compacto.

ii) Si $\{T_n\}$ converge a T en $\mathscr{M}$, y x_n es un punto fijo de T_n, entonces existe una subsucesión de $\{x_n\}$ que converge a un punto fijo de T.

Demostración:

Puesto que $\mathscr{M}$ es subespacio métrico del espacio métrico completo $\mathscr{C}(\Omega, \Omega)$, para probar que $\mathscr{M}$ es completo bastará probar que es cerrado.

Sea $\{T_n\}$ una sucesión en $\mathscr{M}$ convergente a T, uniformemente en Ω. Probaremos que $T \in \mathscr{M}$, es decir,

$$(T(A)) \supset \alpha(A) \cap \Gamma \quad \text{para todo} \quad A \subset \Omega$$

Sea $A \subset \Omega$, $p \in \alpha(A) \cap \Gamma$, y $\varepsilon > 0$. Para cada ε': $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, existe $n_0 \in N$, tal que

$$p(T_{n_0}(x) - T(x)) < \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2} \quad , \quad \text{para todo } x \in A$$

Por otra parte, puesto que $T_{n_0} \in \mathscr{M}$ tenemos que

$$p \in \alpha(T_{n_0}(A))$$

y, por tanto, existen $B_i \subset E$, $i = 1, \ldots, m$ tales que

$$T_{n_0}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i \quad \text{con} \quad \delta_p(B_i) \leqslant 1 + \varepsilon'$$

Sean:

$$C_i = \left\{T(x) \ : \ \inf\{p(T(x) - y) \ : \ y \in B_i\} < \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2}\right\} \ ; \ i = 1, \ldots, m$$

Tenemos que

$$T(A) \subset \bigcup_{i=1}^{m} C_i \quad \text{con} \quad \delta_p(C_i) \leqslant 1 + \varepsilon' + 2\,\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2} = 1 + \varepsilon$$

y por tanto que

$$p \in \alpha(A)$$

Para completar la demostración del Teorema será suficiente probar, según el resultado principal de [5], lo siguiente:

1) $\mathcal{N}$ es denso en $\mathcal{M}$. Siendo $\mathcal{N}$ el conjunto de todas las aplicaciones de Ω en Ω, α-contractivas para el mismo Γ anterior.

2) Para cada $T \in \mathcal{N}$: $\{x \in \Omega\colon T(x) = x\}$ es no vacío y compacto.

3) Si $\{T_n\}$ converge a T uniformemente en Ω, $T \in \mathcal{N}$, y x_n es punto fijo de T_n; entonces existe una subsucesión de $\{x_n\}$ convergente.

Para demostrar 1) basta considerar la sucesión $\{T_n\}$, donde

$$T_n = \frac{n}{n+1}\,T$$

En efecto, si $A \subset \Omega$,

$$\alpha(T_n(A)) = \frac{n+1}{n}\,\alpha(T(A)) \supset \frac{n+1}{n}\,\alpha(A) \cap \Gamma$$

y, por tanto,

$$T_n \in \mathcal{N}$$

Por otra parte, para cada $\varepsilon > 0$, existe $p \in \Gamma$ tal que:

$$\{z \in E \;:\; p(z) < \varepsilon\} \subset \{y \in E \;:\; d(y, 0) < \varepsilon\}$$

y puesto que

$$p(T_n(x) - T(x)) = \frac{1}{(n+1)}\,p(T(x)) \leqslant \frac{1}{(n+1)}\,M \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

existirá $n_0 \in N$ tal que para todo $n \geqslant n_0$:

$$p(T_n(x) - T(x)) < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega$$

En resumen,

$$\{T_n(x) - T(x) \;:\; n \geqslant n_0\} \subset \{y \in E \;:\; d(y, 0) < \varepsilon\}$$

y, por tanto, $\{T_n\}$ converge a T uniformemente en Ω.

Para demostrar 2) basta aplicar 4.2, teniendo en cuenta la nota 1 a 4.1.

Para demostrar 3) bastará probar que $M = \{x_n \ : \ n \in N\}$ es precompacto. Probaremos que

$$\alpha(M) \supset \alpha(T(M))$$

con lo cual,

$$\alpha(M) \supset h\, \alpha(M) \cap \Gamma$$

y, por tanto, M será precompacto en virtud de 3.3.

Sea $p \in \alpha(T(M))$ y $\varepsilon > 0$. Si

$$0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$$

existe $n_0 \in N$ tal que

$$p(T_n(x_n) - T(x_n)) < \varepsilon' \quad \text{para todo} \quad n \geqslant n_0$$

Sea ε^*: $$0 < \varepsilon^* < \varepsilon - 2\varepsilon'$$

existen $B_i \subset E$, $i = 1, \ldots, m$ tales que

$$\{T(x_n) \ : \ n \geqslant n_0\} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i \quad \text{con} \quad \delta_p(B_i) \leqslant 1 + \varepsilon^*$$

ya que

$$p \in \alpha(T(M))$$

Sean

$$C_i = \{y \in \Omega \ : \ \inf\{p(y - x) \ : \ x \in B_i\} < \varepsilon'\}$$

Tenemos entonces que

$$\{T_n(x_n) \ : \ n \geqslant n_0\} \subset \bigcup_{i=1}^{m} C_i \quad \text{con} \quad \delta_p(C_i) \leqslant 1 + \varepsilon^* + 2\varepsilon' < 1 + \varepsilon$$

Por tanto,

$$p \in \alpha(\{x_n \ : \ n \geqslant n_0\}) = \alpha(M)$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BUTLER, G. J.: «Almost all 1-set-contractions have a fixed point». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 74 (2), 353-357, 1979.
[2] DARBO, G.: «Punti uniti in transformazioni a codominio no compatto». *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 24, 84-92, 1955.
[3] DE BLASI, F.: «On a property of the unit sphere in Banach space». *Bull. Math. Soc. Math. R. S. Roumanie*, 21 (69), 1977.
[4] DE BLASI, F.: «Some generic properties in fixed point theory». *J. Math Anal. Appl.*, 71, 161-166, 1979.
[5] DOMÍNGUEZ BENAVIDES, T.: «Generic existence of a non-empty compact set of fixed points». *J. Math. Anal. Appl.* (en prensa).
[6] KURATOWSKI, K.: *Topology*, vol. I, Academic Press, Nueva York, 1966.
[7] LOPES PINTO, A.: *Fixed point theorems.* Proceedings, Dundee Scotland, 1980. Lecture Notes in Math. 846. Springer, Berlín, 1981.
[8] MARTIN, R. H.: *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach spaces.* Wiley-Interscience, Nueva York, 1976.
[9] SADOVSKII, B. N.: «On a fixed point principle». *Funct. Anal. Appl.*, 1, 74-76, 1967.
[10] TYCHONOFF, A. N.: «Ein Fixpunktsatz». *Math. Ann.*, 111, 767-776, 1935.

Departamento de Teoría de Funciones.
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla.