El producto integral de Riemann-Stieltjes y su aplicación a las funciones medias de las distribuciones truncadas

Por P. ZOROA* y J. M. RUIZ GÓMEZ

Recibido: 8 octubre 1982

Abstract

In this paper one give a definition, as the manner of Riemann-Stieltjes, of the product integral that is adequate to solve the following problem. If F is a distribution function of probability it is defined $m = \omega(F)$ by

$$m(x) = \int_{(-\infty, x]} t\, dF(t)/F(x)$$

In this case m is called the function of mean values of truncated distribution of F.

It is intended to find the inverse transformation ω^{-1} such that $\omega^{-1}(\omega(F)) = F$ and this can be done by means of the product integral above defined.

1. INTRODUCCION

Llamaremos $\mathscr{F}$ al conjunto de las funciones de distribución de probabilidad en R, funciones que supondremos continuas por la derecha ($F(x+) = F(x)$ para $F \in \mathscr{F}$, $x \in R$).

Para cada $F \in \mathscr{F}$ se puede definir una función $m = \omega(F)$ con dominio de definición el conjunto

$$\mathscr{D} = \{x : F(x) > 0\} \quad [1.1]$$

mediante la igualdad

$$m(x) = \int_{(-\infty, x]} \frac{t\, dF(t)}{F(x)} \quad [1.2]$$

y llamaremos a m la *función de medias de F* por truncamiento por la derecha.

---

* Académico correspondiente.

Trataremos de resolver el problema de calcular F a partir de $m \in \mathcal{M} = \omega(\mathcal{F})$. Para ello daremos previamente una definición de producto integral de Riemann-Stieltjes.

2. PRODUCTO INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES

Definiremos bajo ciertas condiciones para las funciones reales f y g, el producto integral de f respeto de g, que denotaremos por cualquiera de las dos expresiones

$$\mathop{\mathcal{P}}_{[a,b]} (1 + f(x)\,dg(x)) = \exp \int_{[a,b]} \log(1 + f(x)\,dg(x)) \qquad [2.1]$$

Esta notación es distinta de la utilizada en [1] que es

$$\prod_a^b \exp A(S)\mu(ds) \qquad [2.2]$$

y tiene un valor distinto (véase el apartado 3.d del presente trabajo).

Supondremos que la función

$$f\colon [a, b] \to R$$

cumple las acotaciones

$$0 \leqslant f(x) \leqslant K \qquad [2.3]$$

y que la función de repartición de la medida μ_g

$$g : [a, b] \to R$$

es monótona creciente

$$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b \Rightarrow g(x_1) \leqslant g(x_2) \qquad [2.4]$$

y es continua por la derecha

$$g(x) = g(x+) \quad ; \quad x \in [a, b)$$

admitiendo además la existencia de un número $g(a-) \leqslant g(a)$ para que quede determinada la medida μ_g en cada intervalo cerrado $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ por la igualdad

$$\mu_g([\alpha, \beta]) = g(\beta) - g(\alpha-)$$

Una partición π del intervalo $[a, b]$ es un conjunto de puntos $\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ que cumplen

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

y la norma de π relativa a g la definimos por

$$N_g(\pi) = \max_i (g(x_{i+1}-) - g(x_i)) \tag{2.5}$$

Con estos elementos f, g, π definimos la suma del tipo de Riemenn-Stieltjes

$$\begin{aligned} S(f, g, \pi) &= \sum_{i=0}^{n-1} \log(1 + f(x_i'))(g(x_{i+1}) - g(x_i)) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n} \log(1 + f(x_i))(g(x_i) - g(x_i-)) = S_1(f, g, \pi) + S_2(f, g, \pi) \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde

$$x_i \leqslant x_i' \leqslant x_{i+1}$$

Establecido esto daremos la siguiente definición.

Definición. Llamaremos producto integral (Riemann-Stieltjes) de la función f respecto de g en $[a, b]$ al número $\exp J$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda partición π que cumpla $N_g(\pi) < \delta$ se verifica

$$|S(f, g, \pi) - J| < \varepsilon$$

en cuyo caso escribiremos

$$J = \int_{[a, b]} \log(1 + f(x)\, dg(x))$$

o bien

$$\exp J = \mathscr{P}_{[a, b]} (1 + f(x)\, dg(x))$$

Llamaremos

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\} \subset [a, b] \tag{2.7}$$

al conjunto de puntos de discontinuidad de la función $g(x)$, y $g_c(x)$, $g_d(x)$ a las componentes continua y discreta de $g(x)$, o sea,

$$g_d(x) = \sum_{a \leqslant a_j \leqslant x} (g(a_j) - g(a_j-)) \tag{2.8}$$

$$g_c(x) = g(x) - g_d(x) \quad ; \quad x \in [a, b] \tag{2.9}$$

Teorema. Si la función $f(x)$ es integrable Riemann-Stieltjes respecto de la función $g_c(x)$, o sea, si existe la integral de Riemann-Stieltjes

$$J_1 = \int_a^b f(x)\, dg_c(x) \tag{2.10}$$

entonces existe

$$J = \int_{[a,b]} \log(1 + f(x)\, dg(x))$$

y vale

$$J = \int_a^b f(x)\, dg_c(x) + \sum_j \log(1 + f(a_j)(g(a_j) - g(a_j-))) = J_1 + J_2 \tag{2.11}$$

donde la suma representada por J_2, si es una serie, es convergente.

Demostración. En primer lugar si el conjunto A de discontinuidades de g es infinito, la convergencia de la serie J_2 se debe a que también converge la serie de términos positivos (o no negativos)

$$\sum_j f(a_j)(g(a_j) - g(a_j-))$$

que tiene como mayorante por [2.3], la serie

$$\sum_j K(g(a_j) - g(a_j-)) \leqslant K(g(b) - g(a-))$$

Seguiremos suponiendo que A es infinitivo, pues de lo contrario los cambios del razonamiento son triviales.

Sea ε un número positivo dado. Determinaremos $m = m_\varepsilon$ de modo que

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} K(g(a_j) - g(a_j-)) < \varepsilon \tag{2.12}$$

y llamaremos

$$A_m = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

Sea

$$\delta_1 = \min_{a_j \varepsilon A_m} (g(a_j) - g(a_j-))$$

Por la definición de integral de Riemann-Stieltjes, la existencia de [2.10] nos asegura que fijado el número $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_2 > 0$ tal que si

$$N_{g_c}(\pi) < \delta_2 \tag{2.13}$$

se tiene que

$$|\Sigma f(x_i')(g_c(x_{i+1}) - g_c(x_i)) - J_1| < \varepsilon \tag{2.14}$$

Llamaremos ahora

$$\delta = \min\left(\delta_1, \delta_2, \frac{1}{2K}, \frac{\varepsilon}{K^2(g(b) - g(a-))}\right)$$

Para cualquier participación

$$\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

tal que

$$N_g(\pi) < \delta \tag{2.15}$$

se tiene, en primer lugar, que

$$A_m \subset \pi \tag{2.16}$$

En efecto, si se supone que

$$a_r \in A_m - \pi$$

y es $a_r \in (x_i, x_{i+1})$ se tendría

$$N_g(\pi) \geqslant g(x_{i+1}-) - g(x_i) \geqslant g_d(a_r) - g_d(a_r-) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{a_j \in A_m} (g(a_j) - g(a_j-)) = \delta_1 \geqslant \delta$$

lo que contradiría a [2.15].

Probada [2.16] se tiene

$$J_2 - S_2(f, g, m) = \sum_{j=1}^{\infty} \log(1 + f(a_j)(g(a_j) - g(a_j-))) - \qquad [2.17]$$

$$- \sum_{x_i \in \pi} \log(1 + f(x_i)(g(x_i) - g(x_i-))) =$$

$$= \sum_{a_j \in A - \pi \cap A} \log(1 + f(a_j)(g(a_j) - g(a_j^-))) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{a_j \in A - A_m} \log(1 + f(a_j)(g(a_j) - g(a_j-))) =$$

$$= \sum_{m+1}^{\infty} f(a_j)(g(a_j) - g(a_j-)) \leqslant \sum_{m+1}^{\infty} K(g(a_j) - g(a_j-)) \leqslant \varepsilon$$

por [2.12].

Para conseguir una acotación análoga para $J_1 - S_1$ utilizaremos la desigualdad

$$|S_1(f, g, \pi) - J_1| \leqslant \qquad [2.18]$$

$$\leqslant \left| S_1(f, g, \pi) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i')(g(x_{i+1}-) - g(x_i)) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i')(g(x_{x+1}-) - g(x_i)) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i')(g_c(x_{i+1}) - g_c(x_i)) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i')(g_c(x_{i+1}) - g_c(x_i)) - J_1 \right| = B_1 + B_2 + B_3$$

Llamando, para abreviar

$$A_i = f(x_i')(g(x_{i+1}-) - g(x_i))$$

se tiene

$$0 \leqslant A_i \leqslant KN_g(\pi) < K\delta \leqslant 1/2$$

y resulta de las desigualdades

$$x - x^2 \leqslant \log(1 + x) \leqslant x \qquad (|x| < 1/2)$$

que

$$\sum_{i=0}^{n-1} (A_i - A_i^2) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \log(1 + A_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} A_i$$

o sea

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i')(g(x_{i+1}-) - g(x_i)) - S_1(f, g. \pi) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} A_i^2 < K^2 N_g(\pi)(g(b) - g(a-)) < \varepsilon$$

y, por tanto,

$$B_1 < \varepsilon \tag{2.19}$$

También se tiene para

$$B_2 = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i')(g(x_{i+1}-) - g(x_i)) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i')(g_c(x_{i+1}) - g_c(x_i))\right| = \tag{2.20}$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i')(g_d(x_{i+1}-) - g_d(x_i))\right| \leqslant K \sum_{x_i \in \pi} (g_d(x_{i+1}-) - g_d(x_i)) =$$

$$= K \sum_{a_j \in A - \pi} (g(a_j) - g(a_j-)) \leqslant K \sum_{a_j \in A - A_m} (g(a_j) - g(a_j-)) < \varepsilon$$

por [2.12]; y por último se verifica que

$$B_3 < \varepsilon \tag{2.21}$$

que es la [2.14], ya que se cumple [2.13] debido a que

$$N_{g_c}(\pi) \leqslant N_g(\pi) < \delta \leqslant \delta_2$$

De [2.19], [2.20], [2.21] y [2.18] resulta

$$|S_1(f, g, \pi) - J_1| < 3\varepsilon \tag{2.22}$$

y ahora de [2.17] y [2.22]

$$|S(f, g, \pi) - J| = |S_1(f, g, \pi) + S_2(f, g, \pi) - J_1 - J_2| < 4\varepsilon$$

lo que prueba el teorema.

3. GENERALIZACIONES Y OBSERVACIONES

Daremos unas notas complementarias sencillas que generalizan el alcance del producto-integral definido.

a) Es fácil ver que en la suma $S_1(f, g, \pi)$ puede sustituirse $f(x_i')$ $(x_i \leqslant x_i' \leqslant x_{i+1})$ por ξ_i con la condición

$$\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \leqslant \xi_i \leqslant \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \qquad [3.1]$$

sin que se modifique el concepto definido.

b) Adoptando las definiciones

$$\int_{\{c\}} \log(1 + f(x)\,dg(x)) = \log(1 + f(c)(g(c) - g(c-))) \qquad [3.2]$$

$$\int_{(c,d]} \log(1 + f(x)\,dg(x)) = \qquad [3.3]$$

$$= \int_{[c,d]} \log(1 + f(x)\,dg(x)) - \int_{\{c\}} \log(1 + f(x)\,dg(x))$$

y otras análogas para los intervalos (c, d) y $[c, d)$ resulta la igualdad

$$\int_{[a,b]} \log(1 + f(x)\,\mathrm{d}g(x)) = \qquad [3.4]$$

$$= \int_{[a,c]} \log(1 + f(x)\,dg(x)) + \int_{(c,d]} \log(1 + f(x)\,dg(x))$$

y otras análogas para uniones de intervalos disjuntos.

c) Si f y g están definidas en $[a, \infty]$ y cumplen las condiciones requeridas en la definición de producto-integral dada para todo intervalo finito $[a, b]$ se puede definir

$$\int_{[a,+\infty)} \log(1 + f(x)\,dg(x)) = \lim_{b \to +\infty} \int_{[a,b]} \log(1 + f(x)\,dg(x)) \qquad [3.5]$$

quedando definido el producto impropio

$$\mathscr{P}_{[a,+\infty)} (1 + f(x)\,dg(x)) = \exp \int_{[a,+\infty)} \log(1 + f(x)\,dg(x))$$

para el intervalo infinito $[a, +\infty)$. Lo mismo podría hacerse para los intervalos $(-\infty, b]$ y $(-\infty, \infty)$.

d) La misma expresión [2.11] puede servir para generalizar el concepto si se supone $f(x)$ integrable Lebesgue-Stieltjes respecto de la función de repartición $g(x)$, pero nosotros no haremos uso de esta generalización.

Aplicando la definición dada en capítulo 5 de [1] a matrices 1×1 se llega a

$$\prod_{x}^{y} \exp A(s)\mu(ds) = \exp \int_{y}^{x} A(s)\mu(ds) \qquad [3.7]$$

con la notación utilizada allí. Véase, por ejemplo, 5.2, Teorema 2.2.iii de [1]. Es patente la diferencia del valor de [3.7] y el de $\exp J$ con J dado por [2.11] (por supuesto identificando $f = A$, $\mu(ds) = dg$).

Véase, sin embargo, en el capítulo 1 de [1], 1.7. Definición 7.1 con $f(z) = 1 + z$ aunque aquí no se utilizan medidas de Stieltjes.

4. LA FORMULA DE INVERSION

Sea $F \in \mathscr{F}$ una función de distribución arbitraria y $m = \omega(F)$ su función de medias

$$m(x) = \frac{1}{F(x)} \int_{(-\infty,x]} t\,dF(t) \qquad [4.1]$$

definida para $x \in \mathscr{D}$ dado en [1.1].

De [4.1] se deduce el límite por la izquierda

$$m(x-) = \frac{1}{F(x-)} \int_{(-\infty,x)} t\,dF(t) \qquad [4.2]$$

Necesitamos las dos relaciones siguientes que se deducen de las igualdades anteriores [4.1] y [4.2]

$$\frac{F(a)}{F(a-)} - \frac{a - m(a-)}{a - m(a)} = 0 \quad (F(a-) > 0) \qquad [4.3]$$

$$\frac{F(b-)}{F(a)} - \frac{b - m(a)}{b - m(b-)} = \tag{4.4}$$

$$= \frac{1}{F(a)(b - m(b-))} \int_{(a,b)} (b - t)\, dF(t) \leqslant \frac{(b - a)(F(b-) - F(a))}{F(a)(b - m(b-))}$$

siendo en esta última $a < b$, $F(a) > 0$.

La obtención de estas relaciones no ofrecen dificultad y pueden verse en [4], lema 3.1.

Teniendo en cuenta que de $B \geqslant A \geqslant 1$ se sigue por el teorema del valor medio que $\log B - \log A = (B - A)/\xi \leqslant B - A$, y que

$$\frac{F(b-)}{F(a)} \geqslant \frac{b - m(a)}{b - m(b-)} \geqslant 1$$

se sigue de [4.4]

$$\log\frac{F(b-)}{F(a)} - \log\frac{b - m(a)}{b - m(b-)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{F(b)}{F(a)} - \frac{b - m(a)}{b - m(b-)} \leqslant \frac{(b - a)(F(b-) - F(a))}{F(a)(b - m(b-))} \tag{4.5}$$

Otra propiedad de la función $m = \omega(F)$ de la que se hará uso es la siguiente: si $F \in \mathscr{F}$, $m = \omega(F)$ y $m(a) < a$ vale

$$\inf_{x \geqslant a} (x - m(x)) = k > 0 \tag{4.6}$$

que puede verse en [4], lema 5.1.

Además por ser $m(x)$ monótona (véase [4], proposición 3.4) $x - m(x)$ es de variación acotada en $[a, b]$ y, por tanto, según [4.6], también $1/(x - m(x))$ es de variación acotada, luego es integrable Riemann-Stieltjes respecto de cualquier función monótona y continua.

Sentado esto podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema. Si $m = \omega(F)$, $a < b$, y $m(a) < a$, entonces

$$\log\frac{F(b)}{F(a)} = \int_{(a,b]} \log\left(1 + \frac{dm(x)}{x - m(x)}\right) \tag{4.7}$$

o con otra notación

$$\frac{F(b)}{F(a)} = \mathscr{P}_{(a,b]}\left(1 + \frac{dm(x)}{x - m(x)}\right) \tag{4.8}$$

Demostración. La existencia del producto-integral anterior es consecuencia del teorema previo visto en 2, y de la nota anterior acerca de la integrabilidad de $1/(x - m(x))$.

Falta demostrar la igualdad del teorema.

Calcularemos para cualquier partición

$$\pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n = b$$

la suma de Riemann-Stieltjes con $f(x_i') = f(x_{i+1}-)$, [sección 3.a) de este artículo],

$$S\left(\frac{1}{x - m(x)}, m(x), \pi\right) = \tag{4.9}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \log\left(1 + \frac{m(x_{i+1}-) - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1}-)}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \log\left(1 + \frac{m(x_i) - m(x_i-)}{x_i - m(x_i)}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \log \frac{x_{i+1} - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1}-)} + \sum_{i=1}^{n} \log \frac{x_i - m(x_i-)}{x_i - m(x_i)}$$

Haciendo uso de [4.3] y [4.5] resulta

$$\log\frac{F(x_i)}{F(x_i-)} - \log\frac{x_i - m(x_i-)}{x_i - m(x_i)} = 0 \tag{4.10}$$

$$0 \leqslant \log\frac{F(x_{i+1}-)}{F(x_i)} - \log\frac{x_{i+1} - m(x_i)}{x_{i+1} - m(x_{i+1}-)} \leqslant \tag{4.11}$$

$$\leqslant \frac{(x_{i+1} - x_i)(F(x_{i+1} - F(x_i))}{F(x_i)(x_{i+1} - m(x_{i+1}-))} \leqslant \frac{h(F(x_{i+1}-) - F(x_i))}{F(a)k}$$

donde se utiliza [4.6] y hemos llamado

$$h = \max_i (x_{i+1} - x) \tag{4.12}$$

Sumando las [4.10] y [4.11] y teniendo en cuenta la [4.9] resulta

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \log\frac{F(x_{i+1}-)}{F(x_i)} + \sum_{i=1}^{n} \log\frac{F(x_i)}{F(x_i-)} - \tag{4.13}$$

$$- S\left(\frac{1}{x - m(x)}, m(x), \pi\right) \leqslant \frac{h}{kF(a)}$$

que es equivalente a

$$0 \leqslant \log \frac{F(b)}{F(a)} - S\left(\frac{1}{x - m(x)}, m(x), \pi\right) \leqslant \frac{h}{kF(a)} \qquad [4.14]$$

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si

$$N_g(\pi) < \delta \qquad [4.15]$$

vale

$$\left| S(1/(x - m(x)), m(x), \pi) - \int_{(a,b]} \log\left(1 + \frac{dm(x)}{x - m(x)}\right) \right| < \varepsilon \qquad [4.16]$$

la cual, junto con [4.14] nos da

$$\left| \log \frac{F(b)}{F(a)} - \int_{(a,b]} \log\left(1 + \frac{dm(x)}{x - m(x)}\right) \right| < \frac{h}{kF(a)} + \varepsilon$$

y como ε y h pueden elegirse arbitrarimente pequeños, queda probada la [4.7] y, por tanto, el teorema.

Como corolario, de [4.8], haciendo $b \sim +\infty$ resulta

$$F(a) = 1/ \mathop{\mathscr{P}}_{(a, +\infty)} \left(1 + \frac{dm(x)}{x - m(x)}\right)$$

válida para todo $a \in \mathscr{D}$ de [1.1].

Para cada $a \notin \mathscr{D}$ se tiene $F(a) = 0$.

Esta fórmula [4.17] constituye la fórmula de inversión $(F = \omega^{-1}(m))$ de la fórmula [4.1].

La [4.17] prueba que dos funciones de distribución distintas $F \neq G$ darán dos funciones de medias distintas $\omega(F) \neq \omega(G)$, por lo que las funciones de medias caracterizan la distribución de la que proceden.

Problemas que quedan pendientes son el de encontrar las condiciones intrínsecas que caracterizan las funciones de la familia $\mathscr{M} = \omega(\mathscr{F})$ y la continuidad que pueda existir en la transformación ω.

BIBLIOGRAFIA

[1] DOLLAR, J. D., y FRIEDMAN, CH. N.: *Product Integration with Applications to Differential Equations*. Addison Wesley Publishing Company, 1979.

[2] ROSS, K. A.: «Another approach to Riemann-Stieltjes integrals». *The American Mathematical Monthly*, núm. 8, 660-662, Washington, 1980.

[3] RUIZ GÓMEZ, J. M.: «Funciones de medias de distribuciones discretas truncadas». *Trabajos de Estadística e Investigación Operativa*, vol. 34, páginas 60-87, Madrid, 1983.

[4] ZOROA, P., y RUIZ GÓMEZ, J. M.: «Propiedades de las funciones de medias de las distribuciones truncadas». *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa*, vol. 32, págs. 95-134, Madrid, 1981.

[5] ZOROA, P., y RUIZ GÓMEZ, J. M.: «Distribuciones continuas truncadas y sus funciones de medias». *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa*, vol. 33, págs. 86-109, Madrid, 1982.

Departamento de Matemáticas y Estadística.
Universidad de Murcia