Procesos estocásticos en dos y tres dimensiones de natalidad, mortalidad y migración con adquisición de un carácter permanente

Por DARIO MARAVALL CASESNOVES

Recibido: 10 octubre 1984

Abstract

Some two-dimensional and three-dimensional stochastic processes concerning birth, death and migration phenomena with acquisition of permanent character are investigated. The mathematical solutions of the above mentioned processes present outstanding curiosities. A population theory problem which is solvable through a system of two linear differential equations whith random initial conditions is also presented. These results have applications in the study of dynamical populations in both Physics and Biology. The law of the almost-certain events is finally obtained as the inverse of the odds events law of Poisson.

Resumen

Se investigan exhaustivamente procesos estocásticos bi y tridimensionales de natalidad e inmigración con adquisición de un carácter permanente, y de mortalidad con emigración, los cuales tienen aplicaciones en la dinámica de poblaciones de la Física y de la Biología. Los últimos antecitados tienen cierto parecido, pero son distintos de los que se presentan en la teoría de la desintegración radioactiva y de las series radiactivas (véanse fuentes) que ya habíamos obtenido previamente. Damos la generación y propiedades de la ley de los sucesos casi seguros, como proceso estocástico inverso del de la generación de la ley de los sucesos raros de Poisson.

1. UN PROCESO ESTOCASTICO BIDIMENSIONAL DE NATALIDAD Y DE ADQUISICION DE UN CARACTER PERMANENTE

Vamos a investigar el proceso estocástico del crecimiento de una población, simultáneamente al de la adquisición de un carácter permanente por parte de algunos de sus individuos. La población total de los individuos la denotamos por $\xi(t)$, y la subpoblación de los que ya han adquirido el carácter la denotamos por $\eta(t)$. Las velocidades de crecimiento de ξ y η las suponemos proporcionales a ξ y $\xi - \eta$, respectivamente.

Antes de desarrollar la teoría estocástica, vamos a exponer la teoría determinista, que coincide con la de los valores medios de las variables aleatorias (v.a.) ξ y η; la cual es muy sencilla. Denotemos por x e y los valores medios ξ y η. Las dos variables ciertas x e y evolucionan en el tiempo de acuerdo con las ecuaciones diferenciales:

$$dx = \lambda dt \quad ; \quad dy = \mu(x - y)\, dt \qquad [1]$$

La solución de la primera es:

$$x = x_0 e^{\lambda t} \tag{2}$$

con lo que la segunda [1] se escribe:

$$\frac{dy}{dt} + \mu y = \mu x_0 e^{\lambda t} \Rightarrow y = y_0 e^{-\mu t} + \frac{\mu x_0}{\mu + \lambda}(e^{\lambda t} - e^{-\mu t}) \tag{3}$$

Se tiene que:

$$y_0 \leqslant x_0 \Rightarrow y \leqslant x \tag{4}$$

porque de [2] y [3] se sigue que:

$$x - y = \frac{\lambda x_0}{\mu + \lambda} e^{\lambda t} + \left(\frac{\mu x_0}{\mu + \lambda} - y_0\right) e^{-\mu t} \tag{5}$$

y de aquí:

$$y_0 \leqslant x_0 \Rightarrow \text{mín}\,(x - y) \geqslant \frac{\lambda x_0}{\mu + \lambda}(e^{\lambda t} - e^{-\mu t}) \geqslant 0 \tag{6}$$

De [2] y [3] se sigue que:

$$\lim_{t \to \infty} (x e^{-\lambda t}) = x_0 \quad ; \quad \lim_{t \to \infty} (y e^{-\lambda t}) = \frac{\mu x_0}{\mu + \lambda} \tag{7}$$

Si las poblaciones iniciales x_0, y_0 son aleatorias y su función característica (f.c.) es:

$$\varphi(z_1, z_2, 0) \tag{8}$$

entonces la f.c. (véanse fuentes) de las v.a. $x(t)$, $y(t)$ es:

$$\varphi(z_1, z_2, t) = \varphi(\langle \vec{z}, \vec{e}_1(t) \rangle, \langle \vec{z}, e_2(t) \rangle >, 0) \tag{9}$$

donde $\vec{e}_1(t)$ y $\vec{e}_2(t)$ son las soluciones del sistema [1] que para $t = 0$ valen:

$$\vec{e}_1(0) = ||1, 0|| \quad ; \quad \vec{e}_2(0) = ||0, 1|| \quad ; \quad \vec{z} = ||z_1, z_2|| \tag{10}$$

Como éstas son:

$$\vec{e}_1(t) = ||e^{\lambda t}, \frac{\mu}{\mu + \lambda}(e^{\lambda t} - e^{-\mu t})|| \quad ; \quad \vec{e}_2(t) = ||0, e^{-\mu t}|| \tag{11}$$

se sigue que:

$$\varphi(z_1, z_2, t) = \varphi\left(z_1 e^{\lambda t} + z_2 \frac{\mu}{\mu + \lambda}(e^{\lambda t} - e^{-\mu t}), z_2 e^{-\mu t}, 0\right) \tag{12}$$

y cuando el tiempo t tiende a infinito, la f.c. de:

$$xe^{-\lambda t} \quad ; \quad ye^{-\lambda t} \tag{13}$$

es:

$$\varphi\left(z_1 + z_2 \frac{\mu}{\mu + \lambda}, 0, 0\right) \tag{14}$$

que muestra que la v.a. $\mu x(\infty)/(\mu + \lambda)$ converge en probabilidad a la $y(\infty)$. Como he demostrado en otro lugar (véanse fuentes), si $F(x)$ es la función de distribución (f.d.) correspondiente a la f.c. $\varphi(z, 0, 0)$ [14], la f.d. correspondiente a la f.c. [14] es $G(x, y)$ dada por:

$$G(x, y) = F\left(\text{mín}\left(x, \frac{\mu + \lambda}{\mu} y\right)\right) \tag{15}$$

La teoría estocástica de este fenómeno se desarrolla de la siguiente manera: $\xi(t)$ y $\eta(t)$ son dos v.a., que en un instante t pueden tomar los valores n y m, sujetos a las siguientes restricciones:

$$0 \leqslant m \leqslant n \quad ; \quad 1 \leqslant n \tag{16}$$

en el instante $t + dt$, ξ y η pueden tomar los valores $n + 1$, m con la probabilidad infinitesimal $\lambda n\, dt$, o los valores n, $m + 1$ con la probabilidad infinitesimal $\mu(n - m)\, dt$, o permanecer con los mismos valores n, m con la probabilidad complementaria a la unidad de la suma de las dos anteriores; porque el esquema probabilístico de las transiciones posibles al estado n, m en el instante $t + dt$ es:

$$\begin{array}{lcl} n - 1, m, t & & \text{Prob.: } \lambda(n - 1)\, dt \\ \quad n, m, t & \longrightarrow n, m, t + dt \longrightarrow & \text{Prob.: } 1 - (\lambda n + \mu(n - m))dt \\ n, m - 1, t & & \text{Prob.: } \mu(n - m + 1)\, dt \end{array} \tag{17}$$

De acuerdo con este esquema, si llamamos $P(n, m, t)$ a la probabilidad de que en el instante t, ξ y η tengan los valores n y m, por las reglas de las probabilidades totales y compuestas es:

$$\begin{aligned} P(n, m, t+dt) = {} & \lambda(n-1)P(n-1, m, t)\, dt + \mu(n-m+1)P(n, m-1, t) + \\ & + (1 - (\lambda n + \mu(n-m))\, dt)P(n, m, t) \end{aligned} \tag{18}$$

y de aquí:

$$\begin{aligned} P'(n, m, t) = {} & \lambda(n-1)P(n-1, m, t) + \mu(n-m+1)P(n, m-1, t) - \\ & - (\lambda n + \mu(n-m))P(n, m, t) \end{aligned} \tag{19}$$

Si multiplicamos por $z^n w^m$, y efectuamos la sumación:

$$g(z, w, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} z^n w^m P(n, m, t) \qquad [20]$$

se obtiene para la función generatriz (f.g.) $g(z, w, t)$, la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = z(\lambda z + \mu w - \lambda - \mu) \frac{\partial g}{\partial z} + \mu w(1 - w) \frac{\partial g}{\partial w} \qquad [21]$$

Si inicialmente para $t = 0$, es $\xi(0) = b$, $\eta(0) = 0$, se tiene que:

$$g(z, w, 0) = z^b \qquad [22]$$

y, por tanto, la integral particular de [21], que para $t = 0$ coincide con [22], da la solución de este proceso.

El sistema auxiliar de ecuaciones diferenciales de la [21] es el:

$$-dt = \frac{dz}{z(\lambda z + \mu w - \lambda - \mu)} = \frac{dw}{\mu w(1 - w)} \qquad [23]$$

De la primera y tercera se sigue que:

$$\frac{dw}{w(w - 1)} = \mu\, dt \Rightarrow \frac{w - 1}{w} = Ce^{\mu t} \qquad [24]$$

La primera y la segunda [23] se escriben:

$$\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dt} + \lambda + \frac{\mu(w - 1) - \lambda}{z} = 0 \qquad [25]$$

y si hacemos el cambio de variable $z = 1/v$, y sustituimos w por su valor deducido de [24] se obtiene la:

$$\frac{dv}{dt} + \left(\lambda + \frac{Ce^{\mu t}\mu}{Ce^{\mu t} - 1}\right)v - \lambda = 0 \qquad [26]$$

cuya integral es:

$$v = \frac{1}{z} = \frac{(C-1)he^{-(\lambda+\mu)t} - e^{-\mu t} - \left(\frac{\lambda C}{\lambda+\mu} - 1\right)e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda C}{\lambda+\mu}}{C - e^{-\mu t}} \qquad [27]$$

Las h y C deducidas de [27] y [24] son dos integrales primeras del sistema [23] y, por tanto, cualquier función arbitraria de las mismas es integral de [21]. Si hacemos $t = 0$ en [27] se obtiene:

$$\frac{1}{z} = h \qquad [28]$$

y habida cuenta de la [22] el resultado de sustituir en:

$$g = \frac{1}{h^b} \qquad [29]$$

h y C por sus valores deducidos de [24] y [27], da la f.g. solución, que es:

$$g(z, w, t) = [w(1 - e^{-\mu t}) + e^{-\mu t}]^b \times$$

$$\left[\frac{ze^{-\lambda t}}{1 - zw(1 - e^{-\lambda t}) + \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})z(w - 1)}\right]^b \qquad [30]$$

La f.g. de la distribución marginal de ξ se obtiene haciendo $w = 1$ en [30] es:

$$g(z, 1, t) = \left[\frac{ze^{-\lambda t}}{1 - z(1 - e^{-\lambda t})}\right]^b \qquad [31]$$

la cual es la solución de la ecuación en derivadas parciales que resulta de hacer $w = 1$ en [21], es decir, de un proceso puro de natalidad, corresponde a una v.a. binomial negativa.

La f.g. de la distribución marginal de η se obtiene haciendo $z = 1$ en [30], es:

$$g(1, w, t) = [w(1 - e^{-\mu t}) + e^{-\mu t}]^b \times$$

$$\times \left[\frac{e^{-\lambda t}}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) - w\left(1 - e^{-\lambda t} - \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})\right)}\right]^b \qquad [32]$$

que es la suma de una v.a. binomial, cuya f.g. es el primer paréntesis y una binomial negativa, cuya f.g. es el segundo paréntesis. Esta solución a diferencia de la anterior, la [31], no puede obtenerse directamente haciendo $z = 1$ en [21].

La f.g. de la v.a. $\xi - \eta$, se obtiene sustituyendo w por $1/z$ en [30], es:

$$g\left(z, \frac{1}{z}, t\right) = \left[\frac{e^{-\lambda t}(1 - e^{-\mu t} + ze^{-\mu t})}{e^{-\lambda t} + \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) - \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})z}\right]^b \qquad [33]$$

que es la suma de dos v.a., una binomial de f.g.:

$$[1 + e^{-\mu t}(z - 1)]^b \qquad [34]$$

y la otra binomial negativa de f.g.:

$$\left[\frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t} + \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})(1 - z)}\right]^b \qquad [35]$$

Obsérvese que en todas las f.g. de [30] a [35] figura el exponente b, que es el valor inicial $\xi(0)$, se sigue, por tanto, que este proceso estocástico es aditivo, es decir, que es la suma de b v.a. independientes, cuyas f.g. son las raíces de orden b de las anteriores, es decir que este proceso estocástico es la suma de b procesos estocásticos iguales, de las mismas [19] y [21], pero con $\xi(0) = 1$. Por tanto, si $\xi(0)$ en vez de ser una variable cierta es una v.a. de f.g.:

$$k(z) \qquad [36]$$

la solución de este proceso estocástico se obtiene sustituyendo en [36] z por la raíz de orden b de [30], es decir haciendo en [36] la sustitución:

$$k(\sqrt[b]{g(z, w, t) \equiv [30]}) \qquad [37]$$

Cuando t tiende a infinito, las cuatro f.g. [30], [31], [32] y [33] tienden a cero, es decir las dos v.a. ξ y η tienden a infinito. Para hallar las distribuciones de probabilidad asintóticas de las v.a.:

$$\xi(t)e^{-\lambda t} \quad ; \quad \eta(t)e^{-\lambda t} \qquad [38]$$

cuando t tiende a infinito, hemos de pasar de las f.g. a las funciones características (f.c.) para lo cual en [30] hacemos los cambios:

$$z \longrightarrow e^{iz} \quad ; \quad w \longrightarrow e^{iw} \qquad [39]$$

y después para pasar a las f.c. de las [38] los cambios:

$$e^{iz} \longrightarrow e^{ize^{-\lambda t}} \quad ; \quad e^{iw} \longrightarrow e^{iwe^{-\lambda t}} \qquad [40]$$

y teniendo en cuenta los valores límites:

$$\lim_{t\to\infty} e^{ize^{-\lambda t}} = 1 \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} e^{\lambda t}(e^{ize^{-\lambda t}} - 1) = iz; \ldots \qquad [41]$$

se obtienen para la f.c. de la distribución conjunta de las [38] el valor:

$$\left[\frac{1}{1 - iz - \dfrac{\mu}{\mu + \lambda} iw}\right]^b \qquad [42]$$

que muestra que la v.a.:

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu} \xi(t)e^{-\lambda t} \qquad [43]$$

converge en probabilidad a la segunda [38], que es el mismo resultado [14]. La f.c. de la primera [38] es la:

$$\left(\frac{1}{1 - iz}\right)^b \qquad [44]$$

La f.c. de la diferencia de las dos [38], se obtiene sustituyendo w por $-z$ en [42], es, por tanto:

$$\left(\frac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{\mu + \lambda} iz}\right)^b \qquad [45]$$

Las [44] y [45] son f.c. de distribuciones gamma. Como figura el exponente b en estas f.c. también, se sigue que asintóticamente este proceso estocástico conserva la aditividad.

2. UN PROCESO ESTOCASTICO TRIDIMENSIONAL DE NATALIDAD, INMIGRACION Y ADQUISICION DE UN CARACTER PERMANENTE

Supongamos ahora que la población total $\xi(t)$ crezca aleatoriamente con una velocidad que sea función lineal de $\xi(t)$; denotemos por $\chi(t)$ la subpoblación de $\xi(t)$ que posee una velocidad de crecimiento constante. Entonces $\xi(t)$ sigue un proceso estocástico de natalidad (proporcional a su tamaño) y de inmigración, siendo $\chi(t)$ el número de inmigrantes y $\xi(t) - \chi(t)$ el número de individuos nacidos en el seno de la población. Sea, como antes, $\eta(t)$ la subpoblación de $\xi(t)$ que adquiere el carácter permanente, cuya velocidad de crecimiento es proporcional a $\xi(t) - \eta(t)$.

Los valores medios x, y, z de $\xi(t)$, $\chi(t)$, $\eta(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + \nu \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \nu \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = \mu(x - z) \qquad [46]$$

cuyas soluciones, para las condiciones iniciales:

$$x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad z_0 = 0 \qquad [47]$$

son:

$$\begin{gathered} x=\frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda t}-1) \quad ; \quad y=\nu t \quad ; \quad z=\frac{\nu}{\mu+\lambda}\left(\frac{\mu}{\lambda} e^{\lambda t}+e^{-\mu t}-\frac{\mu}{\lambda}-1\right) \\ x-z=\frac{\nu}{\mu+\lambda}(e^{\lambda t}-e^{-\mu t}) \quad ; \quad z \leqslant x \quad ; \quad y \leqslant x \end{gathered} \qquad [48]$$

Las soluciones del sistema [46] con las condiciones iniciales:

$$x_0 \neq 0 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad z_0 = 0 \qquad [49]$$

se obtienen sumando a x, z de [48] los valores x, y de [3] soluciones del [1], dejando y en [48] como está.

Si llamamos $P(x, y, z, t)$ la probabilidad de que en el instante t, las v.a. ξ, χ, η valgan, respectivamente, x, y, z, el esquema de las probabilidades de transición al estado en que en el instante $t + dt$, el estado de valores de ξ, χ, η, sea x, y, z, es el:

$$\left.\begin{array}{c} x, y, z, t \\ x-1, y-1, z, t \\ x-1, y, z, t \\ x, y, z-1, t \end{array}\right\} x, y, z, t+dt \quad \begin{array}{l} \text{Prob.: } 1-(\lambda x+\nu+\mu(x-z))\,dt \\ \text{Prob.: } \nu\,dt \\ \text{Prob.: } \lambda(x-1)\,dt \\ \text{Prob.: } \mu(x-z+1)\,dt \end{array} \qquad [50]$$

Por las reglas de las probabilidades totales y compuestas se cumple que:

$$\begin{aligned} P(x, y, z, t+dt) &= P(x, y, z, t)(1-(\lambda x+\nu+\mu(x-z))\,dt) + \\ &+ P(x-1, y-1, z, t)\nu\,dt + P(x-1, y, z, t)\lambda(x-1)\,dt + \\ &+ P(x, y, z-1, t)\mu(x-z+1)\,dt \end{aligned} \qquad [51]$$

de donde:

$$\begin{aligned} P'(x, y, z, t) &= P(x-1, y-1, z, t)\nu + P(x-1, y, z, t)\lambda(x-1) + \\ &+ P(x, y, z-1, t)\mu(x-z+1) - P(x, y, z, t)(\lambda x+\nu+\mu(x-z)) \end{aligned} \qquad [52]$$

Multiplicando por $u^x v^y w^z$ y sumando se obtiene para la f.g.:

$$g(u, v, w, t) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{x} \sum_{z=0}^{x} u^x v^y w^z \qquad [53]$$

la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = u(\lambda u + \mu w - \lambda - \mu)\frac{\partial g}{\partial u} + \mu w(1-w)\frac{\partial g}{\partial w} + \nu(uv-1)g \qquad [56]$$

El sistema auxiliar de ecuaciones diferenciales de la anterior es el:

$$dt = -\frac{u}{u(\lambda u+\mu w-\lambda-\mu)} = \frac{dv}{0} = -\frac{dw}{\mu w(1-w)} = \frac{dg}{\nu(uv-1)g} \qquad [57]$$

De la primera y la cuerta se sigue la [24]; de la segunda y la cuarta se sigue la [25], y de la tercera la:

$$v = a \qquad [58]$$

La condición inicial que ha de cumplir la f.g. g es:

$$g(u, v, w, 0) = 1 \tag{59}$$

por considerar que inicialmente es:

$$\xi(0) = 0 \quad ; \quad \chi(0) = 0 \quad ; \quad \eta(0) = 0 \tag{60}$$

De [27] se sigue sustituyendo z por v, que:

$$u = \frac{C - e^{-\mu t}}{(C - 1)he^{-(\lambda+\mu)t} - e^{-\mu t} - \left(\dfrac{\lambda C}{\lambda + \mu} - 1\right)e^{-(\lambda+\mu)t} + \dfrac{\lambda C}{\lambda + \mu}} \tag{61}$$

y sustituyendo este valor de u en la quinta [57], de esta quinta [57] y de la primera se sigue que:

$$g = e^{-vt+vv \int_0^t u(h, C, t)\, dt} \tag{62}$$

Como de [24] y [61] se sigue que $h = h(u, w, t)$ y $C = C(w, t)$, es decir h y C son funciones respectivamente de u, w y t, la primera, y de w, t, la segunda, si $k(h, C, t)$ es una función tal que:

$$\frac{\partial k(h, C, t)}{\partial t} = u(h, C, t) \tag{63}$$

el significado de la integral de [62] es:

$$\int_0^t u(h, C, t)\, dt = k\big(h(u, w, t), C(w, t), t\big) - k\big(h(u, w, t), C(w, t), 0\big) \tag{64}$$

que sustituida en [62] da la solución de la [56] con la condición inicial [59].
Se comprueba fácilmente que se cumple la:

$$g(1, 1, 1, t) = 1 \tag{65}$$

o bien a partir de la [56] o de que para $u = 1$, $w = 1$, las [24] y [61] dan $C = 0$, $h = 1$, y que para estos valores de C y h la [61] da $u(h, C, t) = 1$.

Si λ es un múltiplo entero de μ, haciendo en [61] el cambio de variable independiente de $e^{-\mu t}$ por τ, u es un cociente de polinomios en τ, y la integral [64] se calcula con facilidad. Si μ es un múltiplo entero de λ haciendo el cambio de $e^{-\lambda t}$ por τ, sucede lo mismo. El caso más sencillo de integración es cuando $\lambda = \mu$.

Si al proceso estocástico le imponemos la condición inicial:

$$g(u, v, w, 0) = u^b \tag{66}$$

en vez de la [59], como es solución de la [56] el producto de una solución cualquiera de [56] por la potencia de cualquier orden de cualquier solución de la [21], se sigue que en este caso es la solución de [56] con la condición inicial [66] el producto de la f.g. [62] por la f.g. [30], es decir:

$$f \cdot g \cdot [30] \quad ; \quad f \cdot g \cdot [62] \tag{67}$$

Y si la población inicial es aleatoria de f.g.:

$$g(u, v, w, 0) = k(u) \tag{68}$$

la solución de [56] con la condición inicial [68] es:

$$f \cdot g \cdot [62] \cdot k \cdot (\sqrt[b]{f \cdot g \cdot [30]}) \tag{69}$$

por la misma razón que el caso anterior.

Los valores medios que tanto en este proceso, ecuaciones [46] a [48], como en el anterior, [1] a [3], hemos obtenido directamente, se pueden calcular a partir de las [56] y [21], respectivamente.

Obsérvese que de [62] se sigue que:

$$g(1, v, 1, t) = e^{\nu(v-1)t} \tag{70}$$

3. CASOS PARTICULARES DEL PROCESO ESTOCASTICO ANTERIOR

Si en la [56] hacemos $\nu = 0$ se obtiene la [21], se ha eliminado la inmigración.

Si hacemos $\lambda = 0$, se obtiene:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \mu u(w - 1)\frac{\partial g}{\partial u} + \mu w(1 - w)\frac{\partial g}{\partial w} + \nu(u - 1)g \tag{71}$$

Se suprime la natalidad, y el proceso estocástico se transforma en uno de inmigración y mortalidad, porque la adquisición de un carácter permanente, es equivalente a la muerte; las dos v.a. $\xi(t)$ y $\chi(t)$ coinciden, $\xi(t)$ es el número total de inmigrantes, $\eta(t)$ el de muertos y $\xi(t) - \eta(t)$ el de vivos. Lo hemos resuelto anteriormente (véanse fuentes), pero vamos a dar aquí una solución distinta, porque aunque es más complicada, que la que ya habíamos dado, tiene la ventaja de que es útil para ilustrar el método de integración de [56] expuesto en el parágrafo 2.

Si llamamos x e y a los valores medios de $\xi(t)$ y $\eta(t)$ se cumplen las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = \nu \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \mu(x - y) \tag{72}$$

cuyas soluciones, tales que:

$$x_0 = 0 \quad ; \quad y_0 = 0 \qquad [73]$$

son:

$$x = \nu t \quad ; \quad y = \nu t - \frac{\nu}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) \quad ; \quad x - y = \frac{\nu}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) \qquad [74]$$

Obsérvese que:

$$t \longrightarrow \infty \Rightarrow \text{lím}\,(x - y) = \frac{\nu}{\mu} \qquad [75]$$

La solución de la [71] tal que:

$$\xi(0) = 0 \quad ; \quad \eta(0) = 0 \qquad [76]$$

es decir, que:

$$g(u, w, 0) = 1 \qquad [77]$$

se obtiene a partir del sistema de ecuaciones diferenciales auxiliar de la [71], que se escribe:

$$dt = -\frac{du}{\mu u(w - 1)} = -\frac{dw}{\mu w(1 - w)} = \frac{dg}{\nu(u - 1)g} \qquad [78]$$

La primera y tercera anteriores dan la [24]. La segunda y la tercera dan:

$$\frac{du}{u} + \frac{dw}{w} = 0 \Rightarrow uw = h \qquad [79]$$

No vamos a utilizar la segunda y la cuarta, después de sustituir en la segunda w por su valor deducido de [79], como hemos hecho otras veces, sino que vamos a utilizar la primera y la cuarta, que dan:

$$g = e^{-\nu t + \nu \int_0^t u(h,\, C,\, t)\, dt} \qquad [80]$$

De [24] y [79] se sigue que:

$$u(h, C, t) = h(1 - Ce^{\mu t}) \qquad [82]$$

y de aquí la integral de [80] se escribe:

$$ht - hC\,\frac{e^{\mu t} - 1}{\mu} \qquad [83]$$

y sustituyendo en esta integral h y C por sus valores deducidos de [79] y [24] y este resultado en [80], se obtiene, como solución de [71] con la condición inicial [77], el valor:

$$g(u, w, t) = e^{vt(uw-1)+\frac{v}{\mu}u(1-w)(1-e^{-\mu t})} \quad [84]$$

La f.g. de $\xi(t) - \eta(t)$ se obtiene haciendo $w = 1/u$ en [84], y es:

$$g\left(u, \frac{1}{u}, t\right) = e^{\frac{v}{\mu}(u - 1)(1 - e^{-\mu t})} \quad [85]$$

que es una distribución de Poisson, que cuando t tiende a infinito, tiende a la:

$$g\left(u, \frac{1}{u}, \infty\right) = e^{\frac{v}{\mu}(u - 1)} \quad [86]$$

distribución de Poisson, cuyo parámetro v/μ vale [75].

La solución del sistema [72] para los valores iniciales:

$$x_0 = a \quad ; \quad y_0 = 0 \quad [87]$$

se obtiene sumando a las [74] las soluciones del sistema:

$$dx = 0 \quad ; \quad dy = \mu(x - y) \quad [88]$$

con los valores iniciales [87], que son:

$$x = a \quad ; \quad y = a(1 - e^{-\mu t}) \quad [89]$$

Por tanto, las soluciones del [72] con los valores iniciales [87] son:

$$x = a + vt \quad ; \quad y = vt + \left(a - \frac{v}{\mu}\right)(1 - e^{-\mu t})$$

$$x - y = ae^{-\mu t} + \frac{v}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) \quad [90]$$

Para resolver ahora la [71] con el valor inicial:

$$g(u, w, 0) = u^a \quad [91]$$

como es solución de [71] el producto de cualquier solución de [71] por cualquier potencia de cualquier solución, de la ecuación homogénea que resulta de hacer $v = 0$ en [71], que es la:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \mu u(w - 1)\frac{\partial g}{\partial u} + \mu w(1 - w)\frac{\partial g}{\partial w} \quad [92]$$

hemos de hallar la solución de [92] con la condición inicial [91], y el producto de esta por la f.g. [84] da la f.g. solución de [71] con la condición inicial [91].

Para hallar dicha solución, escribamos el sistema auxiliar de ecuaciones diferenciales de la [92], que es el:

$$dt = -\frac{du}{\mu u(w - 1)} = -\frac{dw}{\mu w(w - 1)} \qquad [93]$$

de la primera y tercera se obtiene la [24], y de la segunda y tercera la [79]. Como de [24] se sigue que:

$$t = 0 \Rightarrow w = \frac{1}{1 - C} \qquad [94]$$

y toda función arbitraria de h y C es solución de [92], se sigue que la solución de ésta, que cumple la condición inicial [91], es la:

$$g = h^a(1 - C)^a \qquad [95]$$

y sustituyendo en esta h y C por sus valores [24] y [79], se obtiene la solución de [92], que cumple la [91], que es:

$$g = u^a(e^{-\mu t} + w(1 - e^{-\mu t}))^a \qquad [96]$$

Por tanto, el producto de las f.g. [84] y [96]:

$$g(u, w, t) = f \cdot g \cdot [84] \quad ; \quad f \cdot g \cdot [96] \qquad [97]$$

da la solución de la [71] con la condición inicial [91].

Por la misma razón si inicialmente la población $\xi(0)$ en vez de tener el valor cierto a, es una v.a. de f.g.:

$$k(u) \qquad [98]$$

la solución de [71] con el valor inicial [98] es el producto de la f.g. que resulta de hacer en [98] la sustitución:

$$k(u) \longrightarrow k(u(e^{-\mu t} + w(1 - e^{-\mu t}))) \qquad [99]$$

por la f.g. [84], es decir:

$$f \cdot g \cdot [84] \cdot k(u(e^{-\mu t} + w(1 - e^{-\mu t}))) \qquad [100]$$

Para hallar la f.g. del número total de vivos, o lo que es lo mismo, del número de individuos que todavía no han adquirido el carácter permanente, hay que sustituir en las anteriores w por $1/u$, con lo que [96] y [99] se transforman en:

$$(ue^{-\mu t} + 1 - e^{-\mu t})^a \quad ; \quad k(ue^{-\mu t} + 1 - e^{-\mu t}) \qquad [101]$$

y la [84] hay que sustituirla por la [85]. La primera [101] es una v.a. de Bernoulli y la segunda [101] la adición en número aleatorio de f.g. $k(u)$ de v.a. binomiales.

Cuando t tiende a infinito, se tiene que:

$$f \cdot g \cdot [101] \longrightarrow 1 \qquad [102]$$

se conserva la propiedad de que la diferencia $\xi(t) - \eta(t)$ tiende $(t = \infty)$ a distribuirse según una v.a. de Poisson de parámetro v/μ.

Los dos casos anteriores son los únicos casos particulares del parágrafo 2 que responden al título de este trabajo, porque si en [56] hacemos $\mu = 0$, se suprime la propiedad de adquisición de un carácter permanente, y el proceso estocástico se transforma en uno de natalidad e inmigración bidimensional, con separación del tamaño de la población total del de la subpoblación fe inmigrantes, que ya habíamos resuelto anteriormente (véanse fuentes).

Vamos a resolver la [57] en el caso más sencillo en que $\lambda = \mu$. La integral de [62] haciendo el cambio de $e^{-\mu t}$ por τ se escribe:

$$\frac{vv}{a\mu}\int_1^\tau \frac{C - \tau}{a\tau(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)}\,d\tau \qquad [103]$$

siendo:

$$a = (C - 1)h - \frac{C}{2} + 1 \qquad [104]$$

y τ_1, τ_2 las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$\tau^2 - \frac{1}{a}\tau + \frac{C}{2a} = 0 = (\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2) \qquad [105]$$

Como la función subintegral de [103] se escribe:

$$\frac{\beta_0}{\tau} + \frac{\beta_1}{\tau - \tau_1} + \frac{\beta_2}{\tau - \tau_2} \qquad [106]$$

siendo:

$$\beta_0 = \frac{C}{\tau_1\tau_2} \quad ; \quad \beta_1 = \frac{C - \tau_1}{\tau_1(\tau_1 - \tau_2)} \quad ; \quad \beta_2 = \frac{C - \tau_2}{\tau_2(\tau_2 - \tau_1)} \qquad [107]$$

la [62] vale:

$$\left[\tau^{\beta_0}\left(\frac{\tau - \tau_1}{1 - \tau_1}\right)^{\beta_1}\left(\frac{\tau - \tau_2}{1 - \tau_2}\right)^{\beta_2}\right]^{\frac{vv}{a\mu}} e^{-vt} = g \qquad [108]$$

y sustituyendo en ésta τ por $e^{-\mu t}$, a, τ_1, τ_2, β_0, β_1, β_2 por sus valores [104], [105] y [106], después de sustituir en ellas h y C por sus valores en función de u, w, t, deducidos de [24] y [61], se obtiene la f.g. $g(u, v, w, t)$, solución de [57] cuando $\lambda = \mu$.

4. UN PROCESO ESTOCASTICO BIDIMENSIONAL DE MORTALIDAD Y EMIGRACION

Sea una población sujeta a mortalidad y emigración, y sean μ y λ los coeficientes de mortalidad y emigración, x el número de individuos vivos no emigrados e y el número total de emigrados (vivos o muertos).

El planteamiento analítico de la teoría determinista lleva al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = -(\mu + \lambda)x \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x \qquad [109]$$

cuyas soluciones para los valores iniciales:

$$x_0 = m \quad ; \quad y_0 = 0 \qquad [110]$$

son:

$$x = me^{-(\lambda+\mu)t} \quad ; \quad y = \frac{m\lambda}{\lambda + \mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) \qquad [111]$$

Para la teoría estocástica, si llamamos $\xi(t)$, $\eta(t)$ a los v.a. número de vivos no emigrados y número total de emigrados (vivos y muertos) en el instante, y $P(x, y, t)$ la probabilidad de que en el instante t sean ξ y η iguales a x e y, se cumple:

$$P'(x, y, t) = \mu(x + 1)P(x + 1, y, t) + \lambda(x + 1)P(x + 1, y - 1, t) - (\lambda + \mu)P(x, y, t) \qquad [112]$$

y multiplicando por $u^x v^y$ y sumando se obtiene para la f.g. $g(u, v, t)$ la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = (\mu + \lambda v - (\lambda + \mu)u)\frac{\partial g}{\partial u} \qquad [113]$$

El sistema auxiliar de ecuaciones diferenciales de [113] es el:

$$dt = \frac{du}{(\lambda + \mu)u - \mu - \lambda v} = \frac{dv}{0} \qquad [114]$$

cuyas integrales son:

$$v = \alpha \quad ; \quad (\lambda + \mu)\, dt = \frac{du}{u - \dfrac{\mu + \lambda\alpha}{\mu + \lambda}} \Rightarrow u - \frac{\mu + \lambda\alpha}{\mu + \lambda} = Ce^{(\lambda+\mu)t} \qquad [115]$$

y para $t = 0$, la última da:

$$t = 0 \Rightarrow C + \frac{\mu + \lambda\alpha}{\mu + \lambda} = u \qquad [116]$$

y si el número inicial de individuos que compone la población es m, se tiene:

$$g(u, v, 0) = u^m \qquad [117]$$

y sustituyendo en [117] u por su valor [116], se obtiene:

$$\left(C + \frac{\mu + \lambda\alpha}{\mu + \lambda}\right)^m \qquad [118]$$

y si en ésta sustituimos α y C por sus valores [115], se obtiene la f.g. solución de la [113] con la condición inicial [117], que es:

$$g(u, v, t) = \left[ue^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda v + \mu}{\lambda + \mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})\right]^m \qquad [119]$$

la cual corresponde a la suma de m v.a. trinomiales.

5. UN PROCESO ESTOCASTICO TRIDIMENSIONAL DE MORTALIDAD Y EMIGRACION

Si en el proceso estocástico anterior dentro de la población emigrada distinguimos entre emigrados vivos y muertos, y llamamos x al número de vivos no emigrados, y el número total de emigrados (vivos y muertos) y z al número de emigrados muertos; si además suponemos que el coeficiente de mortalidad en la emigración ν es distinto al μ de la población no emigrada, y llamamos como en el caso anterior λ al coeficiente de emigración, se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = -(\lambda + \mu)x \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = \nu(y - z) \qquad [120]$$

Para los valores iniciales:

$$x_0 = m \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad z_0 = 0 \qquad [121]$$

las dos primeras [120] tienen las mismas soluciones [111] y la tercera [120] se escribe:

$$\frac{dz}{dt} + vz = \frac{m\lambda v}{\mu + \lambda}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) \tag{122}$$

cuya integral para $z_0 = 0$ es:

$$z = \frac{\lambda m}{\mu + \lambda}(1 - e^{-vt}) + \frac{m\lambda v}{(\mu + \lambda)(v - \mu - \lambda)}(e^{-vt} - e^{-(\lambda+\mu)t}) \tag{123}$$

En el caso particular en que:

$$v = \lambda + \mu \tag{124}$$

se puede eliminar la indeterminación 0/0 en [123] aplicando la regla de L'Hôpital, y se obtiene:

$$z = \frac{\lambda m}{\mu + \lambda}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) - \lambda m e^{-(\lambda+\mu)t}t \tag{125}$$

Para la teoría estocástica con el mismo significado de las letras que en parágrafos anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned} P'(x, y, z, t) &= \mu(x + 1)P(x + 1, y, z, t) + \\ &+ \lambda(x + 1)P(x + 1, y - 1, z, t) + \\ &+ v(y - z + 1)P(x, y, z - 1, t) - \\ &- ((\lambda + \mu)x + v(y - z))P(x, y, z, t) \end{aligned} \tag{126}$$

y multiplicando por $u^x v^y w^z$ y sumando se obtiene para la f.g. $g(u, v, w, t)$ la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= (\mu + \lambda v - (\lambda + \mu)u)\frac{\partial g}{\partial u} + \\ &+ vv(w - 1)\frac{\partial g}{\partial v} + vw(1 - w)\frac{\partial g}{\partial w} \end{aligned} \tag{127}$$

El sistema auxiliar de ecuaciones diferenciales es el:

$$dt = \frac{du}{(\lambda+\mu)u - \lambda v - \mu} = \frac{dv}{vv(v-1)} = \frac{dw}{vw(w-1)} \tag{128}$$

La tercera y cuarta [128] dan:

$$\frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} = 0 \Rightarrow vw = h \tag{129}$$

la primera y cuarta dan:

$$\frac{w - 1}{w} = Ce^{vt} \quad (*) \tag{130}$$

la primera y segunda después de sustituir v por su valor deducido de las dos anteriores se escribe:

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} - (\lambda + \mu)u - \lambda h C e^{vt} + \lambda h + \mu = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow u = \alpha e^{(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda h C e^{vt}}{v - \lambda - \mu} + \frac{\lambda h + \mu}{\lambda + \mu} \end{aligned} \tag{131}$$

Por otra parte, las condiciones iniciales [121] dan origen a:

$$g(u, v, w, 0) = u^m \Rightarrow g = \left(\alpha + \frac{\lambda h C}{v - \lambda - \mu} + \frac{\lambda h + \mu}{\lambda + \mu}\right)^m \tag{132}$$

la última resulta de hacer $t = 0$ en [131]. Sustituyendo en esta última [132] α por su valor [131], h y C por sus valores [129] y [130], da la f.g. $g(u, v, w, t)$ solución de [127] con la condición inicial [132]. Es:

$$\begin{aligned} g(u, v, w, t) = \Bigg[& ue^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda v(w - 1)}{v - \lambda - \mu}(e^{-vt} - e^{-(\lambda+\mu)t}) + \\ & + \frac{\lambda v w + \mu}{\lambda + \mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t})\Bigg]^m \end{aligned} \tag{133}$$

Un caso particular interesante es cuando $v = \lambda$, es decir cuando los coeficientes de mortalidad en la población emigrada y en la no emigrada es el mismo.

La v.a. [133] es la suma de m v.a. cuatrinomiales.

Si se cumple la [124] se puede eliminar la indeterminación 0/0 en [133] aplicando la regla de L'Hópital y se obtiene:

$$\begin{aligned} g(u, v, w, t) = \Bigg[& ue^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda v w + \mu}{\lambda + \mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) - \\ & - \lambda v(w - 1)e^{-(\lambda+\mu)t}t\Bigg]^m \end{aligned} \tag{134}$$

Si en este proceso estocástico o en el del parágrafo 3 la población inicial en vez de ser cierta (igual a m) es una v.a. de f.g. $k(u)$, la solución se obtiene sustituyendo las anteriores f.g. [119], [133] ó [134] por las que resultan de sustituir en $k(u)$ u por las raíces emésimas de las antedichas f.g.

(*) Es la [24] cambiando μ por v.

Todos los casos que hemos visto en este trabajo cuando la población inicial es aleatoria en vez de cierta, por la aditividad de estos procesos estocásticos, son casos particulares de adición de v.a. en número aleatorio (véanse fuentes).

La f.g. del número aleatorio de emigrados vivos se obtiene sustituyendo en las f.g. [133] ó [134], según el caso, w por $1/v$ y haciendo $z = 1$. Son, pues:

$$g\left(1, v, \frac{1}{v}, t\right) = \begin{cases} \left[1 + \dfrac{\lambda(v - 1)}{\lambda + \mu - \nu}(e^{-\nu t} - e^{-(\lambda+\mu)t})\right]^m \\ [1 + \lambda(v - 1)e^{-(\lambda+\mu)t}t]^m \end{cases} \qquad [135]$$

Obsérvese como comprobación que los valores medios de la v.a. [135], que es $y - z$, que valen:

$$y - z = \frac{m\lambda}{\lambda + \mu - \nu}(e^{-\nu t} - e^{-(\lambda+\mu)t}) \quad ; \quad y - z = m\lambda e^{-(\lambda+\mu)t}t \qquad [136]$$

respectivamente, coinciden con los valores que se obtienen de restar a y [111] el valor de z [123] ó [125].

6. LA LEY DE LOS SUCESOS CASI SEGUROS

Llamamos sucesos casi seguros a los complementarios de los sucesos raros en el sentido de Poisson.

Si $1 - p$ es la probabilidad de extracción de una bola blanca de una urna, la diferencia $\xi(n) - n$, entre n y el número aleatorio $\xi(n)$ de bolas que hay que extraer, con restitución de la bola extraida a la urna, para obtener n bolas blancas, de modo que la última extraida sea blanca, es una v.a. de función característica (f.c.):

$$\left(\frac{1 - p}{1 - pe^{iz}}\right)^n \qquad [137]$$

Cuanto más pequeña sea p más segura es la extracción de una bola blanca, y por tanto si p tiende a cero, dicha extracción tiende a ser un suceso casi seguro. Si n tiende a infinito y p tiende a cero de modo que exista y sea finito el límite de su producto:

$$p \longrightarrow 0 \quad ; \quad n \longrightarrow \infty \quad ; \quad \text{lím}\, np = \lambda \qquad [138]$$

la f.c. [137] tiende a la:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \dfrac{\lambda}{n}}{1 - \dfrac{\lambda}{n}e^{iz}}\right)^n = e^{\lambda(e^{iz} - 1)} \qquad [139]$$

que corresponde a una v.a. de Poisson de parámetro λ. Este fenómeno aleatorio es el inverso del de la generación de la ley de Poisson a partir de los sucesos raros, que en este caso particular sería la extracción de una bola no blanca. Por eso proponemos llamarla ley de los sucesos casi seguros; en este caso lo que es fijo es el número de éxitos (bolas blancas extraidas) y lo que es aleatorio es el número de ensayos necesarios (extracciones de bolas), mientras que en la ley de los sucesos raros lo que es fijo es el número de ensayos (extracciones de bolas) y aleatorio el número de éxitos (en este caso bolas extraidas no blancas).

En la práctica estadística la operatividad de esta ley sería la siguiente: se extraen de un colectivo muestras muy grandes aleatorias $n_1, n_2, \ldots, n_m$ hasta obtener el mismo número cierto n de individuos que presentan el atributo casi seguro, de modo que el último individuo de la muestra lo presente, entonces los valores $n_1 - n, n_2 - n, \ldots, n_m - n$, siguen muy aproximadamente la ley de Poisson de parámetro:

$$\frac{\Sigma\, n_i}{m} - n \qquad [140]$$

siendo tanto mayor la aproximación, cuanto más grande sea n, el número de muestras m, y la frecuencia relativa del atributo en cuestión, en el colectivo del que se extraen las muestras. Cuando se dan estas circunstancias [140] tiende asintóticamente a la media aritmética de los números de individuos que no presentan el atributo (sucesos raros) en m muestras de n individuos, las cuales siguen también la distribución de Poisson, como es sabido. Las distribuciones de Poisson de las leyes de los sucesos casi seguros y de los sucesos raros tienen el mismo parámetro (valor medio). La [140] es una estimación de λ.

La f.c. del intervalo entre dos sucesos casi seguros disminuido en una unidad, es decir de $\xi(1) - 1$, es [137] sin elevar a n, y cuando p tiende a cero tiende a:

$$\lim_{p\to 0} \frac{1 - p}{1 - pe^{iz}} = 1 \qquad [141]$$

es decir esta v.a. tiende al número cierto cero. Si en [141] sustituimos $\xi(1) - 1$ por su cociente por p, su f.c. es:

$$\lim_{p\to 0} \frac{1 - p}{1 - pe^{iz/p}} = \frac{1}{1 - iz} \qquad [142]$$

que corresponde a una v.a. exponencial.

La f.c. del intervalo entre dos sucesos raros (complementarios de los anteriores) $\eta(1)$, cuando p tiende a cero es:

$$\lim_{p\to 0} \frac{pe^{iz}}{1 - (1 - p)e^{iz}} = 0 \qquad [143]$$

tiende a infinito. Si en [143] sustituimos $\eta(1)$ por su producto por p, su f.c. es:

$$\lim_{p\to 0} \frac{pe^{ipz}}{1-(1-p)e^{ipz}} = \frac{1}{1-iz} \tag{144}$$

que es la misma [142].

En la práctica estadística la operatividad de esta ley sería: se efectúan m conjuntos de extracciones de bolas, con restitución a la urna de la bola extraida después de cada extracción, hasta obtener la primera bola no blanca en cada conjunto, y sean N_1, N_2, ..., N_m los números de bolas extraidas; entonces los valores:

$$\frac{N_1 m}{\Sigma N_i}; \cdots; \frac{N_m m}{\Sigma N_i} \tag{145}$$

tienden a distribuirse según la exponencial de f.c. [142] con tanta más aproximación, cuanto mayor sea el número m.

O también se repiten m conjuntos de extracciones de bolas (con restitución) hasta obtener la primera bola blanca, y sean n_1, n_2, ..., n_m los números de bolas extraidas, entonces los valores:

$$\frac{n_1 - 1}{\frac{1}{m}\Sigma n_i - 1}; \cdots; \frac{n_m - 1}{\frac{1}{m}\Sigma n_i - 1} \tag{146}$$

tienden a distribuirse según una exponencial de f.c. [142].

En ambos casos:

$$\frac{m}{\Sigma N_i} \quad ; \quad \frac{1}{m}\Sigma n_i - 1 \qquad [147$$

son estimaciones de p (probabilidad de extracción de bola no blanca).

FUENTES

Las actuales investigaciones completan y prolongan otras anteriores en las memorias publicadas en la *Revista de la Real Academia de Ciencias* en 1958, 1959, 1979 y 1981 que llevan por títulos: «Nuevos modelos de distribuciones y de procesos estocásticos», «Algunos nuevos procesos estocásticos y sus aplicaciones», «El proceso estocástico del agente provocador», «Cadenas de Markov en poblaciones aleatorias y probabilidades en cadena generalizadas», y en el *Boletín del Instituto Politécnico de Jassy* en 1979, titulada: «Un proceso estocástico tridimensional de natalidad, mortalidad e inmigración».

Para profundizar estos métodos y objetivos, pueden consultarse mis libros *Líneas de investigación en los procesos estocásticos y el movimiento browniano*, editado por el Instituto de España en 1975, *Cálculo de Probabilidades y*

Procesos Estocásticos, Editorial Paraninfo, 1974; *Introducción a la Investigación en Física y Matemáticas*, Editorial Empeño 14, 1981, y *Diccionario de Matemática Moderna*, Editora Nacional, 1982.

Los procesos estocásticos de mortalidad y emigración que desarrollamos aquí, tienen cierto parecido, aunque son distintos de los que obtuvimos en la teoría estocástica de la desintegración radioactiva y de las series radiactivas, expuesta en la revista de esta Real Academia en 1969. Para estos casos y en general siempre que se pueda demostrar que la f.g. solución es suma de v.a. multinominales, se puede obtener ésta más fácilmente, porque las probabilidades de la distribución multinomial son los valores medios (o proporcionales a los mismos), los cuales se pueden obtener con mucha más facilidad resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales de la teoría determinista.