Polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad. El camino de ida y vuelta (*)

Por L. VIGIL

Abstract

In this study, we consider the usual elements of the theory (measures, orthogonal polynomials, N-kernels, recurrence relations, polynomials of second kind, ...) and we introduce new parameters $\{\hat{P}_n(0)\}$. We establish a correspondence between sequences of these parameters and functions of the unit ball of $H^\infty(T)$. We use this method to obtain a classification of measures in the context of the theory and in this way the following aspects are studied: *a*) Elementary measures starting from the parameters; *b*) Equivalence classes of measures; *c*) Inner composition laws in the parameter sequence space; *d*) Singular measures and jumps; *e*) Shift operator.

We present illustrated examples, some results, and open problems.

Se manejan los siguientes elementos de la teoría:

i) Medida definida positiva: $d\mu(\theta) = \mu'(\theta)\, d\theta + d\mu_s(\theta)$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$.

ii) Matriz hermitiana DP (de Toeplitz, en este caso) $[c_n]_0^\infty = m$ y sus menores $m_n = [c_h]_0^n$.

iii) Sucesión $\{\Delta_n\}_{n=0}^\infty$ $(\Delta_n = |c_h|_0^n > 0)$ y sucesión de «excesos» $\{e_n\}_0^\infty$, donde:

$$0 < e_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \leqslant 1 \quad \text{y} \quad \{e_n\} \downarrow e \geqslant 0$$

iv) Sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n(z)\}_0^\infty$ y sus normalizados $\{\hat{P}_n(z)\}_0^\infty$.

v) N-núcleos $K_n(z, 0) = \sum_0^n \overline{\hat{P}_h(0)}\hat{P}_h(z)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ y sus normalizados $(\hat{K}_n(z, 0))_0^\infty$. (Estos son los $\hat{P}_n^*(z)$ clásicos, $P_n^*(z) = z^n\overline{P}_n(1/z)$).

vi) Valores en el origen $(P_n(0))_0^\infty$ o sus normalizados $(\hat{P}_n(0))_0^\infty$.

vii) Parámetros de Geronimus: $a_n = -\sqrt{e_{n+1}}\, \hat{P}_{n+1}(0)$ con $|a_n| < 1$ y de Alfaro $w_n = -e_{n-1}\sqrt{e_n}\, \hat{P}_n(0)$ con las fórmulas:

$$\left(\frac{|w_n|}{e_{n-1}}\right)^2 + \frac{e_n}{e_{n-1}} = 1, \quad (n \in N)$$

viii) Fórmulas de recurrencia normalizadas:

$$z\hat{P}_{n-1}(z) = \sqrt{\frac{e_n}{e_{n-1}}}\, \hat{P}_n(z) + \frac{w_n}{e_{n-1}}\hat{K}_{n-1}(z, 0)$$

y sus tres equivalentes:

(*) Presentada en la sesión científica del 6 de junio de 1984.

ix) Función analítica:

$$F(z) = c_0 + 2 \sum_1^{\infty} c_{-n} z^n \quad (|z|<1)$$

tal que:

$$ReF(e^{i\theta}) = \mu'(\theta) \text{ a.e. y } F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \text{ (Herglotz)}$$

x) Funciones analíticas $f(z)$ con $|f(z)| < 1$ para $|z| < 1$ ligadas con las $F(z)$ por $(1 + f(z))(1 + F(z)) = 2$.

Si normalizamos la medida, sin pérdida de generalidad, se tiene:

$$c_0 = \Delta_0 = e_0 = 1,\ \hat{P}_0(z) = \hat{K}_0(z, 0) = 1,\ F(0) = 1 \quad ; \quad f(0) = 0.$$

Se toman como referencias iniciales $(\hat{P}_n(0))_0^{\infty}$ (ida) y $f(z)$ (vuelta), a partir de los cuales se definen los restantes elementos en el siguiente orden:

A) Dada la sucesión compleja $(\hat{P}_n(0))$ se definen consecutivamente (e_n), (a_n), (w_n) y mediante fórmulas de recurrencia $(\hat{P}_n(z))_0^{\infty}$, $(\hat{K}_n(z, 0))_0^{\infty}$. Si se parte de $(-\hat{P}_n(0))$ resultan los mismos (e_n), (a_n), pero $(-w_n)$ y de ahí $(\hat{Q}_n(z))$ (son los polinomios de segunda especie de la teoría clásica) y $(\hat{L}_n(z, 0))$ sus N-núcleos normalizados. Se define:

$$F_n(z) = \frac{\hat{L}_n(z, 0)}{\hat{K}_n(z, 0)} = 1 + 2 \sum_1^{n-1} c_{-h} z^h + 2 \sum_n^{\infty} c_m^{(n} z^m, |z| < 1,\ n \in N$$

que define $[c_n]$. Además $F_n(z) \rightarrow F(z)$ $(|z| < 1)$ (uniform. en compactos) y:

$$f_n(z) = \frac{1 - F_n(z)}{1 + F_n(z)} \rightarrow f(z) = \frac{1 - F(z)}{1 + F(z)}$$

análogamente. De aquí, aún:

$$\mu'(\theta) = \frac{1 - |f(e^{i\theta})|^2}{|1 + f(e^{i\theta})|^2} = Re\, F(e^{i\theta}) \quad \text{a.e.} \qquad [1]$$

B) Partiendo de una $f(z)$, se tiene, además del $\mu'(\theta)$ indicado:

$$F(z) = \frac{1 - f(z)}{1 + f(z)}$$

cuya serie de Taylor da $[c_n]_0^{\infty}$. Es más cómodo, si $f(z) = \sum_1^{\infty} b_n z^n$, utilizar:

$$\left(1 + \sum_1^{\infty} b_n z^n\right)\left(1 + \sum_1^{\infty} c_{-n} z^n\right) = 1.$$

De $[c_n]$ se obtiene (Δ_n), (e_n), $(P_n(z))$, $(P_n(0))$, $(K_n(z, 0))$ y de ellos por normalización $(\hat{P}_n(0))$, $(\hat{K}_n(z, 0))$, (a_n) y (w_n).

Ejemplos de aplicaciones:

a) Medidas elementales a través de los parámetros:

i) $(\hat{P}_n(0))_1^\infty = (0) \to f(z) = 0 \sim F(z) = 1 \sim \mu'(\theta) = 1 \sim [c_n] = I$ (S.F.).

ii) $\hat{P}_h(0) \neq 0$, $\hat{P}_j(0) = 0, j \neq h \to f(z) = \bar{w}_h z^h \sim \mu'(\theta) = \dfrac{1 - |w_h|^2}{|1 + \bar{w}_h e^{ih\theta}|^2}$.

iii) $(\hat{P}_n(0)) = 0$, $n > k \to f(z) = f_k(z) \sim F(z) = F_k(z)$ racionales, etc. $\left(\text{útil para el paso al límite clásico de } \mu_n'(\theta) = \dfrac{1}{|\hat{P}_n(e^{i\theta})|^2}\right)$.

b) Agrupación natural de medidas a partir de $(\hat{P}_n(0))_0^\infty$. Conocido un caso:

$$(\hat{P}_n(0)) \to F(z) \to f(z) \to \mu'(\theta) = \frac{1 - |f(e^{i\theta})|^2}{|1 + f(e^{i\theta})|^2}$$

se tiene:

i) $$(-\hat{P}_n(0)) \to \frac{1}{F(z)} \to -f(z) \to v'(\theta) = \frac{1 - |f(e^{i\theta})|^2}{|1 - f(e^{i\theta})|^2}.$$

ii) $$(\hat{P}_n(0)e^{i\beta}) \to \frac{i \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} F(z) + 1}{F(z) + i \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \to e^{-i\beta} f(z) \to \mu_\beta'(\theta) = \frac{1 - |f(e^{i\theta})|^2}{|1 + e^{-i\beta} f(e^{i\theta})|^2}.$$

2) $\overline{(\hat{P}_n(0))} \to \bar{F}(z) \sim [c_{-n}] \to \bar{f}(z) \to v'(\theta) = \mu'(-\theta)$.

3) Si $\hat{P}_n(0) \in R$, $\forall\, n$ resulta $\mu'(\theta)$ par.

c) Se estudian leyes de composición interna, sobre todo combinaciones lineales convexas en f, en F, en $d\mu$, finitas o infinitas con su repercusión en los demás elementos. También producto y función compuesta en f.

d) La expresión [1] indica que si f es interna $d\mu$ es singular determinándose los saltos, cuando los haya (conjunto finito o numerable), por:

$$s(\theta) = \lim_{\rho \uparrow 1} \frac{1 - \rho}{1 + f(\rho e^{i\theta})}.$$

Situaciones más amplias están en estudio.

e) Se obtienen ejemplos de que la aplicación h veces del operador traslación a $\{\hat{P}_n(0)\}$ equivale a la misma, es decir, a multiplicar por z^h, en f, transformándose la medida [1] $\mu'(\theta)$ en:

$$T_h \mu'(\theta) = \frac{1 - |f(e^{i\theta})|^2}{|1 + e^{ih\theta} f(e^{i\theta})|^2}.$$

La proposición es cierta, pero aún no hay demostración redactada.