Solitones como modelos de partículas (*)

Por L. MARTÍNEZ ALONSO

Departamento de Métodos Matemáticos, Universidad Complutense de Madrid.

Abstract

The analogies between solitons and particles are considered. Through the inverse spectral transform method it is shown how the solition degrees of freedom describe classical particles of several types. Under quantization these models exhibit a discrete spectrum ofquantum particles.

Una de las más importantes aportaciones del estudio de modelos físicos no lineales es el concepto de solitón. El término fue introducido en 1965 por Kruskal y Zabuski [1] para denominar a la onda solitaria de la ecuación de Korteweg-de Vries y desde entonces su popularidad ha crecido extraordinariamente. En una primera aproximación el solitón puede definirse como un tipo especial de solución que surge al incorporar ciertos términos no lineales a ecuaciones de evolución lineales dispersivas. Lo especial de estas soluciones es que satisfacen las siguientes propiedades:

i) Son no dispersivas.
ii) Son los únicos residuos asintóticos cuando $t \longrightarrow \pm\infty$ de cualquier solución de la ecuación no lineal.
iii) Su número y su forma permanecen invariables al pasar del límite $t \longrightarrow -\infty$ al $t \longrightarrow +\infty$.

La ilustración de este fenómeno es especialmente simple en la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV):

$$v_t = -v_{xxx} + 6vv_x,$$

El solitón de esta ecuación es la solución particular:

$$-2\eta^2 \operatorname{sech}^2 [\eta(x - q(t))], \quad q(t) = q + 4\eta^2 t$$

que depende de dos parámetros (η, q) y que representa un pulso rígido centrado en $q(t)$, moviéndose libremente con velocidad $4\eta^2$. Cualquier solución $v(t, x)$ de KdV se reduce, cuando $t \longrightarrow \pm\infty$, a expresiones de la forma:

$$\sum_{l=1}^{n} -2\eta_l^2 \operatorname{sech}^2 [\eta_l(x - q_l^{\pm}(t))], \quad q_l^{\pm}(t) = q_l^{\pm} + 4\eta_l^2 t$$

El número n de solitones y sus velocidades $4\eta_l^2$ son los mismos en ambos límites $t \longrightarrow \pm\infty$. El único cambio es un desplazamiento $q_l^{+} - q_l^{-}$ de la trayectoria libre de cada solitón.

(*) Presentada en la sesión científica del 14 de marzo de 1984.

La constatación de que la existencia de solitones es compartida por una clase amplia de ecuaciones no lineales fue posible gracias al descubrimiento del método de la transformada espectral inversa por Gardner-Greene-Kruskal-Miura [2] en 1967. Estos autores demostraron que dada una solución $v(t, x)$ de KdV, los datos espectrales (autovalores, coeficiente de reflexión...) del operador de Schrödinger $-\partial_{xx} + v(t, x)$ varían con el tiempo de forma muy simple. Como consecuencia de este análisis surge una imagen clara de la estructura de modos normales asociada con los solitones. Sus grados de libertad resultan ser descritos por los datos espectrales asociados al espectro discreto. En particular la preservación asintótica de los solitones y sus velocidades aparece como consecuencia de que los autovalores son constantes del movimiento. El desarrollo y generalización de este análisis durante la última década [3] ha conducido al descubrimiento de familias infinitas de ecuaciones no lineales con solitones entre las que se cuentan más de una veintena de modelos físicos no lineales de gran importancia.

El deseo de comprender las analogías entre solitones y partículas nos condujo hace tres años a iniciar un estudio de los solitones desde una perspectiva basada en los principios de invariancia. De acuerdo a las ideas de Wigner los diferentes modelos de partículas vienen determinados mediante realizaciones de los grupos de invariancia. Nuestra principal aportación ha sido el demostrar que varios de los tipos más importantes de solitones responden a realizaciones tipo partícula de los grupos de Galilei y Poincaré. Ello nos ha permitido definir magnitudes físicas como la masa, la posición, el momento, y la energía interna, asociada a los solitones. Asimismo, nuestro análisis proporciona un marco intrínseco para clasificar los distintos tipos de solitones. Las ecuaciones que hemos estudiado hasta el momento son, además de KdV [4], las siguientes:

i) La ecuación de Schrödinger no lineal [5]:

$$i\psi_t = -\frac{1}{2m}\psi_{xx} - 2g|\psi|^2\psi, \quad g > 0$$

Sus solitones son partículas galileanas con un grado de libertad interno de tipo oscilatorio.

ii) La ecuación de «Sine-Gordon» [6]:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \frac{m^3}{\sqrt{g}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{g}}{m}\phi\right) = 0.$$

Sus dos tipos de solitones «Kinks» y «Breathers» son partículas relativistas elementales y partículas relativistas con un grado de libertad interno de tipo oscilatorio, respectivamente.

iii) El modelo masivo de Thirring [7]:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi - g^2(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)\gamma_{\mu}\psi = 0$$

Sus solitones se identifican con los solitones tipo «Breather» de sine-Gordon a través de una transformación canónica.

Como prolongación natural de nuestro trabajo estamos abordando también el estudio de los solitones cuánticos por medio de la formulación cuántica del método de la transformada espectral inversa. Los resultados obtenidos para la ecuación de Schrödinger no lineal muestran [8] que a nivel cuántico sus solitones se manifiestan como los fragmentos asintóticos en que se descomponen los estados formados por los bosones fundamentales del sistema. Estos fragmentos son partículas cuánticas elementales con masas y energías internas cuantificadas.

Finalmente, queremos destacar una aplicación reciente de nuestro análisis al problema de la interacción entre solitones y radiación en ecuaciones no lineales. La componente dispersiva (radiación) de un campo no lineal es descrita por los datos espectrales asociados al espectro continuo del operador lineal correspondiente. Hemos encontrado una manera de definir la velocidad de grupo de la radiación a través de los generadores del grupo de invariancia. Esta noción de velocidad de grupo resulta ser fundamental a la hora de obtener expresiones explícitas para los desplazamientos de las trayectorias de los solitones como consecuencia de su interacción con la radiación.

REFERENCIAS

[1] ZABUSKY, N. I., y KRUSKAL, M. D.: *Phys. Rev. Letters*, 15, 1965.
[2] GARDNER, C. S.; GREENE, J. M.; KRUSKAL, M. D., y MIURA, R. M.: *Phys. Rev. Letters*, 19, 1967.
[3] Véase, por ejemplo, la monografía «Solitons» editada por R. K. Bullough y P. J. Caudrey, Springer-Verlag, 1980.
[4] MARTÍNEZ ALONSO, L.: *J. Math. Phys.*, 24, 2652, 1983.
[5] MARTÍNEZ ALONSO, L.: *J. Math. Phys.*, 23, 1518, 1982.
[6] MARTÍNEZ ALONSO, L.: *J. Math. Phys.*, 24, 982, 1983.
[7] MARTÍNEZ ALONSO, L.: En preparación.
[8] MARTÍNEZ ALONSO, L.: «Quantum Solitons of the Nonlinear Schrödinger Field as Galilean Particles», a aparecer en *J. Math. Phys.* «Asymptotic Fields for the Quantum Nonlinear Schrödinger Equation with attractive coupling», a aparecer en *Lett. Math. Phys.*