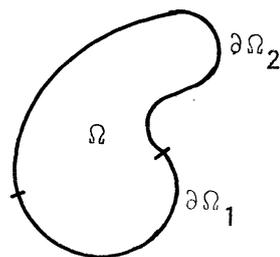


Aproximación de un problema elíptico singular mediante elementos finitos isoparamétricos degenerados (*)

Por FRANCISCO MICHAVILA PITARCH y LUIS GAVETE CORVINOS

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado de frontera $\partial\Omega$ (Fig. 1). Consideremos el problema de contorno elíptico de orden 2 definido por la ecuación de Poisson con condiciones de contorno mixtas siguiente:



$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ en } \Omega \\ u &= g_1 \text{ en } \partial\Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g_2 \text{ en } \partial\Omega_2 \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

Figura 1

donde $\partial\Omega = \overline{\partial\Omega_1} \cup \overline{\partial\Omega_2}$ y la solución $u = u(x, y)$ es una aplicación de Ω en \mathbb{R} .

Multiplicando la ecuación en derivadas parciales de [1] por una función v suficientemente regular y aplicando el teorema de Green:

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)v \, dx \, dy = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \, dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds$$

y si introducimos los espacios de Sobolev de orden m sobre Ω (m , entero ≥ 1):

$$H^m(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} v}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \in L^2(\Omega), |\alpha_1 + \alpha_2| \leq m \right. \right\}$$

dotado de la norma:

$$\|v\|_m = \left\{ \sum_{|\alpha_1 + \alpha_2| \leq m} \left\| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} v}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}$$

(*) Presentada en la sesión científica del 7 de marzo de 1984.

podemos establecer la formulación débil del problema [1]:

«Hallar $u \in H^1(\Omega)$, $u = g_1$ en $\partial\Omega_1$:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \, dy &= \int_{\Omega} f v \, dx \, dy + \int_{\partial\Omega_2} g_2 v \, ds, \\ \forall v \in H^1(\Omega), v &= 0 \text{ en } \partial\Omega_1 \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

Utilicemos el método de los elementos finitos para su resolución, empleando elementos H^1 -conformes isoparamétricos cuadráticos de dos tipos: el triángulo de seis nodos (Fig. 2) donde la aproximación local se realiza por polinomios de la forma:

$$u_h|_{\Omega_e} = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 \quad [3]$$

que es completo de orden 2 y el cuadrilateral de ocho nodos (Fig. 3) cuya aproximación local es:

$$u_h|_{\Omega_e} = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 \quad [4]$$

cuyo máximo orden completo es también 2.

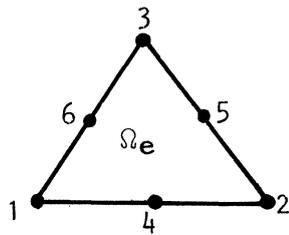


Figura 2

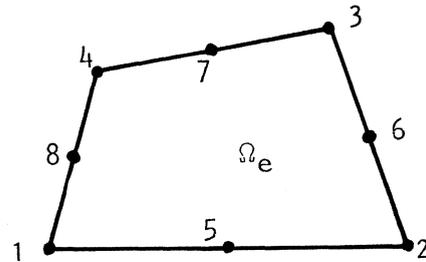


Figura 3

Para formular el problema aproximado de [2] discretizando el dominio Ω por $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{e=1}^E \Omega_e$, por E elementos de uno de los tipos anteriores y siendo $H^h \subset H^1(\bar{\Omega}_h)$ un subespacio de dimensión finita definido por:

$$H^h = \{v_h \in H^1(\bar{\Omega}_h) | v_h|_{\Omega_e} \text{ es un polinomio del tipo [3] o [4]}\}$$

tenemos:

«Hallar $u_h \in H^h$, $u_h = g_1$ en $\partial\Omega_{1h}$:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega_h} \nabla u_h \nabla v_h \, dx \, dy &= \int_{\Omega_h} f v_h \, dx \, dy + \int_{\partial\Omega_{2h}} g_2 v_h \, ds \\ \forall v_h \in H^h, v_h &= 0 \text{ en } \partial\Omega_{1h} \end{aligned} \right\} \quad [5]$$

donde $\partial\Omega_{1h}$ y $\partial\Omega_{2h}$ representan la aproximación poligonal de las fronteras $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$, respectivamente.

Teniendo en cuenta que:

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \, dy \right| \leq \|\nabla u\|_0 \cdot \|\nabla v\|_0 \leq \|u\|_1 \cdot \|v\|_1$$

y que para el conjunto de funciones $v \in H^1(\Omega)$ tales que $v = 0$ en $\partial\Omega_1$ se verifica, por el teorema de Rellich:

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla v \, dx \, dy \geq \alpha \|v\|_1^2, \quad \alpha = \text{cte}$$

obtenemos que $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx \, dy$ es continua y H^1 -elíptica luego:

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|u - v_h\|_1, \quad \forall v_h \in H^h$$

utilizando las acotaciones de Ciarlet y Raviart [1] llegamos a que:

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{C}{\alpha} h^{\mu} \|u\|_s, \quad C = \text{cte}$$

donde:

$$\mu = \min(2, s - 1)$$

con $u \in H^3(\Omega)$, entonces si $s \geq 3$:

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{\|u\|_s}{\alpha} \cdot h^2 \quad [6]$$

luego la norma del error del método en este caso tiene una cota de orden 0 (h^2).

En su forma usual el método de elementos finitos permite obtener la solución aproximada con las acotaciones del error antes establecidas si la solución u de [1] es suficientemente regular; esta regularidad depende de la forma de $\partial\Omega$ y de la continuidad de las condiciones de contorno.

Si la solución de un problema de contorno como [1] o sus derivadas parciales toman valores infinitamente grandes en puntos de $\bar{\Omega}$ se dice que la solución posee una singularidad en dichos puntos. Tales problemas aparecen en la mecánica de la fractura, en casos de transmisión de calor o en general en cualquier problema de contorno que presente irregularidades en sus datos. Además de las dos causas fundamentales que hemos mencionado como origen de la falta de regularidad de la solución, forma de la frontera y continuidad de las condiciones de contorno, existen otras que también pueden estudiarse: discontinuidad de los coeficientes de la ecuación elíptica [1], o la irregularidad de su parte no homogénea f , etc.

Si $\partial\Omega$ posee un punto angular P , de ángulo interno α (Fig. 4), Oden [2] determina que, empleando coordenadas polares (r, θ) cuando $r \rightarrow 0$, se puede expresar la solución u mediante un desarrollo en serie de la forma:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\mu_n} \psi_n(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn} \chi_{mn}(r) \psi_n(\theta)$$

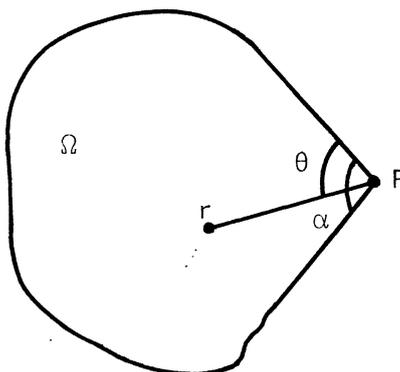


Figura 4

que contiene términos singulares cuya parte dominante es:

$$r^{\pi/\alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi\theta}{\alpha}$$

Si $\alpha \simeq 2\pi$ se dice que Ω tiene una fractura de vértice P .

El empleo de elementos isoparamétricos cuadráticos para singularidades originadas por fracturas en $\partial\Omega$ ha sido realizado, entre otros, por Michavila y Gavete [3].

Las singularidades de la solución u del problema [1] son del tipo de discontinuidad de las condiciones de contorno.

Emery [4] ha establecido, siguiendo a Birkhoff [5], que en el caso particular del problema [1] que analizaremos en el apartado 2, en las proximidades del punto A se tiene:

$$u(r, \theta) = \tilde{u}(r, \theta) + \sum_{j=1}^{\infty} k_j r^{j/2} \left(\operatorname{sen} \frac{j\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} j\pi}{\cos j\pi} \cos j \frac{\theta}{2} \right)$$

donde $\tilde{u}(r, \theta)$ es la parte regular de la solución y, por tanto, el término principal de la singularidad de la solución para el punto A estudiado es también de la forma:

$$kr^{1/2} \quad [7]$$

La introducción de la singularidad, al modificar el comportamiento de la solución en las proximidades de dicho punto, debe alterar la acotación del

error previamente establecida. Si denominamos Ω^* a la intersección de Ω con un disco abierto centrado en el punto singular, siguiendo los resultados de Scharz y Wahlbin [6], podemos localmente establecer en nuestro caso particular del apartado 2 que:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega^*} \leq Kh^{1/2 - \varepsilon} \|u\|_{3/2 - \varepsilon,\Omega^*} \quad [8]$$

donde ε es un número positivo arbitrario mientras que en el resto del dominio $\tilde{\Omega} = \Omega/\Omega^*$ continúa siendo válida la acotación [6], es decir:

$$\|u - u_h\|_{1,\tilde{\Omega}} \leq Kh^2 \|u\|_{s,\tilde{\Omega}}, \quad s \geq 3$$

En consecuencia, en las proximidades del punto singular los resultados obtenidos por el método en su forma habitual son pobres, necesitando disminuir mucho el diámetro h de los elementos para, según [8], representar la solución de modo preciso.

Para el tratamiento especial de singularidades Whiteman y Akin [7] han clasificado los métodos en dos clases generales:

- a) Métodos que utilizan la forma de la singularidad.
- b) Métodos con refinamiento local de la red de elementos.

Entre los primeros hay que distinguir entre los que aumentan la base del espacio con funciones singulares propuestos por Fix [8] y los que emplean elementos isoparamétricos degenerados desarrollados por Barsoum [9] para singularidades de la forma [7].

Vamos a modificar los elementos isoparamétricos de las figuras 2 y 3 para modelizar la singularidad. Para el elemento cuadrilateral de ocho nodos estándar $\hat{\Omega}$ (Fig. 5) desplazaremos los nodos 5 y 8 a $1/4$ en los lados 1-2 y 1-4 a la proximidad del nodo 1, donde se sitúa la singularidad. Las funciones de forma en 1-2 son ($\eta = -1$):

$$\hat{\psi}_1(\xi) = -\frac{1}{2} \xi(1 - \xi), \quad \hat{\psi}_2(\xi) = \frac{1}{2} \xi(1 + \xi), \quad \psi_5(\xi) = 1 - \xi^2$$

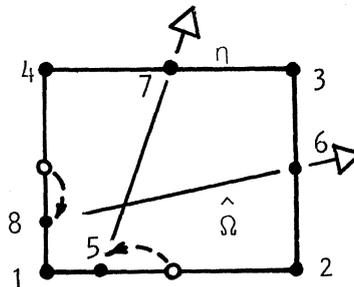


Figura 5

con la transformación de coordenadas:

$$x = -\frac{1}{2} \xi(1 - \xi)x_1 + \frac{1}{2} \xi(1 + \xi)x_2 + (1 - \xi^2)x_5$$

introducción de elementos de transición entre los elementos singulares y el resto de la red. Resultados sobre la mejora de la aproximación debido a dichos elementos pueden hallarse en Michavila, Gavete y Conde [11] y Michavila, Gavete y Vicente [12].

2. ESTUDIO DE UN CASO PARTICULAR

Como aplicación de los elementos degenerados isoparamétricos en la aproximación de singularidades vamos a resolver un problema particular de ecuaciones en derivadas parciales elípticas que debido a las condiciones de contorno presenta un punto singular.

Para ello, consideremos el dominio rectangular:

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0,5\}$$

y definamos sobre éste el siguiente problema (Fig. 7):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \text{ en } \Omega \\ u &= 1 \text{ en } x = 0, \quad 0 \leq y \leq 0,5 \\ u &= 0 \text{ en } y = 0, \quad 0,5 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \text{ en } y = 0,5, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \text{ en } x = 1,0, \quad 0 \leq y \leq 0,5 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \text{ en } y = 0, \quad 0 \leq x \leq 0,5 \end{aligned} \right\} [9]$$

Figura 7

Por lo dicho en el apartado anterior tenemos aquí una singularidad del tipo $1/\sqrt{r}$ en el punto A ya que $u = K \cdot r^{1/2}$, siendo K una constante y al derivar tenemos:

$$\frac{du}{dr} = \frac{K}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$$

El problema planteado corresponde físicamente a la transmisión de calor en estado estacionario en una placa rectangular que tiene parte de su contorno aislado.

Este problema se ha resuelto utilizando un modelo (Fig. 8) con elementos isoparamétricos degenerados de tipo cuadrático. La zona marcada próxima al punto singular se ha variado para estudiar la influencia que puede tener el elemento de transición de Lynn e Ingraffea [10].

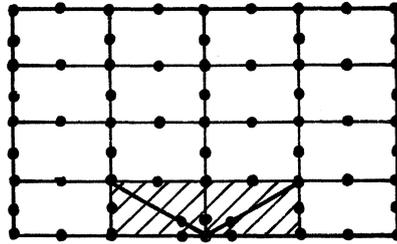


Figura 8

Se han realizado dos modelos: caso 1, con un elemento singular (Fig. 9), y caso 2, con un elemento singular y un elemento de transición (Fig. 10).

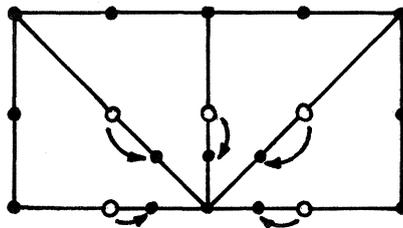


Figura 9

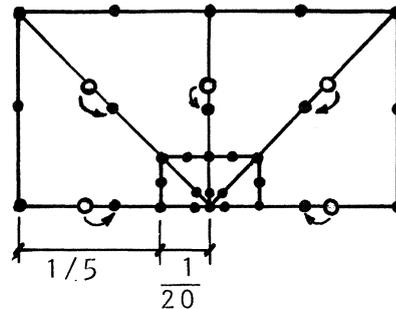


Figura 10

Para establecer una comparación que nos permita determinar el efecto del modelo en la aproximación de la singularidad se ha resuelto el problema utilizando elementos C^0 cuadrilaterales de cuatro nodos aumentando progresivamente la red de elementos.

De este modo disminuye el tamaño de los elementos cercanos al punto singular y, por tanto, se va aproximando dicha singularidad con mayor exactitud.

Se han realizado cálculos por ordenador para modelos sucesivamente «más refinados» tomando como valores de los lados de los cuadrados: $1/4$, $1/8$, $1/12$, $1/16$ y $1/20$.

En las figuras 11 y 12 pueden verse los resultados obtenidos, con los dos modelos empleados. En la primera (Fig. 11) se ha representado $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=0}$, para $0 < x < 0,5$, empleando diferencias finitas centrales para aproximar la derivada. Se aprecia como mejora la aproximación al ir refinando el modelo y como a su vez mejora mucho más al emplear el elemento isoparamétrico degenerado cuadrático.

En la segunda (Fig. 12) se representa $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$, para $0,5 \leq x \leq 1,0$, y también pueden apreciarse los mismos resultados obtenidos en el caso anterior.

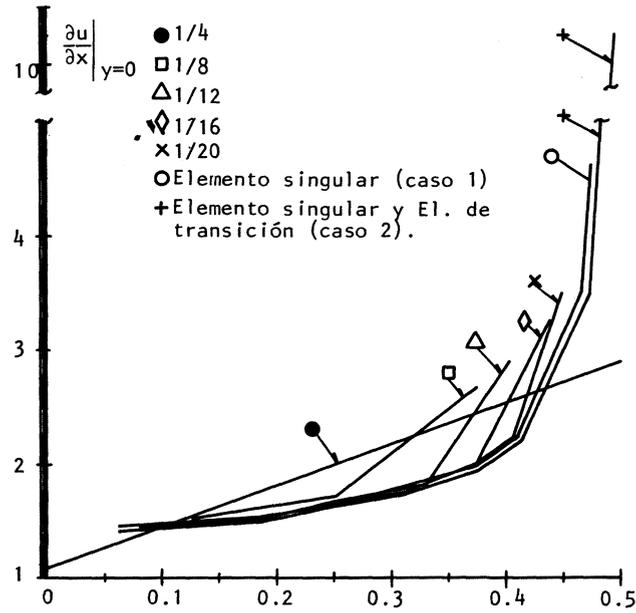


Figura 11

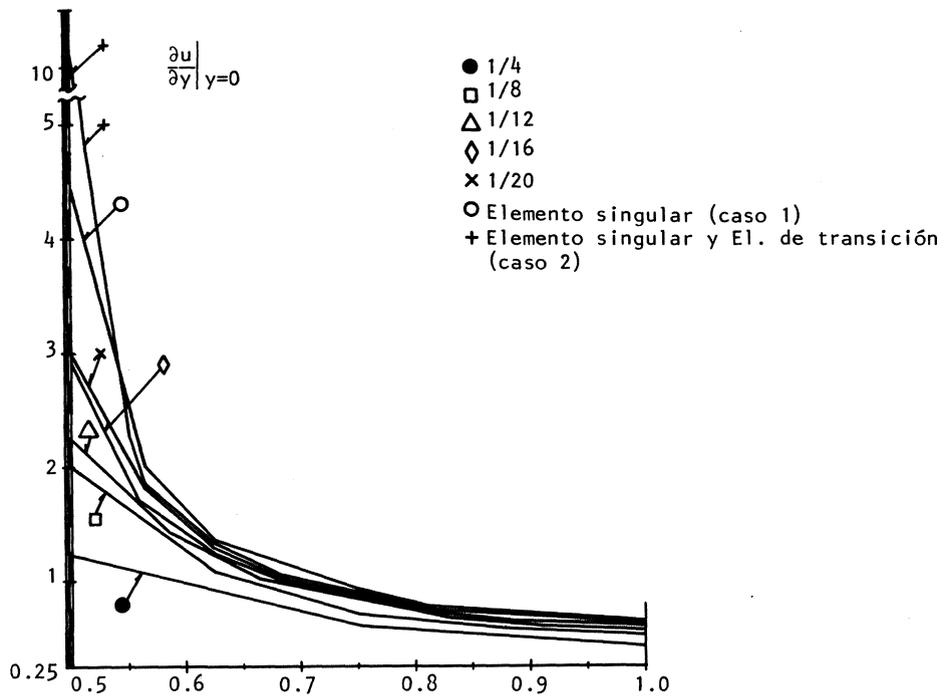


Figura 12

3. INFLUENCIA DEL MALLADO

Se ha realizado un estudio de variación del mallado y del tamaño del elemento en la zona $\Omega^* = \{(x, y)/0,25 \leq x \leq 0,75, 0 \leq y \leq 0,125\}$, próxima al punto singular (Fig. 13) utilizando en Ω/Ω^* el mismo modelo anterior (Fig. 8).

La tabla 1 es un resumen de los resultados obtenidos en algunos puntos, muy próximos a la singularidad, lo que nos permite destacar las diferencias existentes.

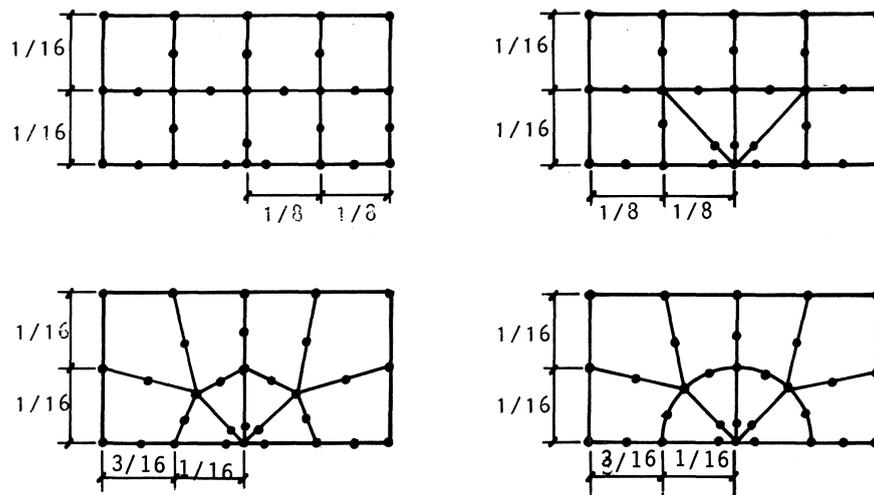


Figura 13

TABLA I

	(Distancia al punto singular $x = 0,03125$)	(Distancia al punto singular $y = 0,015625$)
	$\frac{\partial u}{\partial x} \Big _{y=0} \quad x = 0,5$	$\frac{\partial u}{\partial y} \Big _{y=0} \quad x = 0,5$
Caso 1	6.450432	6.0616256
Caso 2	6.45728	6.3313344
Caso 3	7.409344*	5.1745216
Caso 4	7.608512*	5.2866624

* Están más cercanos al punto singular $x = 0,015625$.

Con estos modelos se puede ver la influencia de las distintas formas de mallado de la zona cercana a la singularidad.

Los casos 1 y 2 aparecen como superiores a los casos 3 y 4, debido a que cuando se emplean elementos singulares isoparamétricos no es conveniente

refinar el mallado, sino conservar un mallado homogéneo para los elementos finitos. Es decir, tratar que la relación entre el diámetro de los elementos mayor y menor de Ω^* se aproxime a la unidad.

Si comparamos 1 y 2, es ligeramente mejor el caso 2 debido al empleo de los elementos triangulares en vez de cuadrilaterales, lo que mejora la aproximación, según Barsoum [9].

4. CONCLUSIONES

Los resultados muestran que se produce una mejora sensible del valor de las derivadas en determinados puntos del modelo al emplear el elemento singular.

También puede verse como mejora la aproximación al utilizar el elemento de transición.

Se comprueba, por tanto, la mejora obtenida ya que con un modelo mucho menos refinado que el correspondiente a $\Delta x = \Delta y = 1/20$ se obtiene una aproximación mucho mayor.

El método de elementos finitos utilizando elementos isoparamétricos degenerados del tipo cuadrático puede extenderse a la resolución de problemas particulares de ecuaciones en derivadas parciales que contengan la singularidad apropiada.

La ventaja de utilizar los elementos isoparamétricos degenerados en la modelización de singularidades frente a los métodos de elementos finitos híbridos, empleado por Emery [4], viene determinada por el hecho de que no es necesario modificar el programa de elementos finitos ni se pierde la estructura de banda simétrica como ocurre en los métodos híbridos, todo lo cual hace posible el tratamiento de estas singularidades con programas que contengan al elemento finito isoparamétrico cuadrático.

En caso de no utilizar elementos de transición es aconsejable mantener una relación próxima a la unidad entre los diámetros de los elementos cercanos al punto singular.

5. AGRADECIMIENTO

Este trabajo se enmarca dentro de un Proyecto de Investigación subvencionado por la Comisión Asesora de Investigación Científica y Técnica del Ministerio de Educación y Ciencia, a la que los autores quedan muy agradecidos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CIARLET, P. G., y RAVIART, P. A.: «General Lagrange and Hermite Interpolation in \mathbb{R}^n with applications to finite elements», *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. 46, 177-199, 1972.
- [2] ODEN, J. T.: *Finite elements*, vol. II. Ed. Prentice Hall, 1983.

-
- [3] MICHAVILA, F., y GAVETE, L.: «On the use of quadratic transition elements», Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics. Swansea, 1984.
 - [4] EMERY, A. F.: «The use of singularity Programming in Finite-Difference and Finite-Element Computations of Temperature», *Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer*, 344-351, agosto, 1973.
 - [5] BIRKHOFF, G.: «Angular Singularities of Elliptic Problems», *Journal of Approx. Theory*, 6, 215-230, 1972.
 - [6] SCHARTZ, A., y WAHLBIN, L.: «Maximum norm estimates in the finite element method on plane polygonal domains», *Part I. Math. Comput*, 32, 73-109, 1978.
 - [7] WHITEMAN, J. R., y AKIN, J. E.: «Finite elements singularities and fracture», *MAFELAP-1978*, 35-54, Academic Press, 1979.
 - [8] FIX, G.: «Higher-Order Rayleigh-Ritz aproximations», *J. Math. Mech.*, 18, 645-657, 1969.
 - [9] BARSOUM, R. S.: «On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10, 25-37, 1976.
 - [10] LYNN, P. P., y INGRAFFEA, A. R.: «Transition elements to be used with quarter-point crack-tip elements», *Int. J. Num. Meth. Engin*, 12, 1031-1036, 1978.
 - [11] MICHAVILA, F.; GAVETE, L., y CONDE, C.: «Una aplicación de elementos finitos isoparamétricos en la modelización de ciertas singularidades que aparecen en problemas de grietas», *Anales de Ingeniería Mecánica*, 1, 104-113, 1982.
 - [12] MICHAVILA, F.; GAVETE, L., y VICENTE, S.: «Elementos finitos singulares y detransición, empleando la aproximación cuadrática en el estudio de fracturas en dos dimensiones», *Anales de Ingeniería Mecánica*, 2, 118-127, 1982.