Comunicaciones a la Academia

presentadas en las Sesiones Científicas celebradas en las fechas que se indican

Operador de Hardy-Littlewood reiterado y clases de Orlicz de funciones maximales (*)

Por Miguel Delgado Pineda

In this paper, we introduce little modifications in the properties, weak type, of Hardy-Littlewood's maximal operators, in order to study the iteration of these operators. Results concerning to characterization are given and extended for Orlicz classes of maximal fonctions.

1. Los resultados que se exponen se refieren al operador maximal de tipo Hardy-Littlewood, respecto a la base de diferenciación formada por los cubos abiertos, centrados o no, de lados paralelos a los ejes, actuando sobre funciones medibles de $\mathbf{R}^n$ a $\bar{\mathbf{R}}$. Al actuar el operador sobre una función *medible* f origina una nueva función medible f^*:

$$f^*(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)|\, dt \quad ; \quad x \in Q \right\}$$

Es inmediato que si existe un $x \in \mathbf{R}^n$ para el que $f^*(x) < \infty$, es f localmente integrable. Así pues, el resultado conocido: «El operador maximal es de tipo (1, 1)», se puede enunciar:

Sea $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ medible, existe una constante c_n, dependiente sólo de la dimensión n, tal que se tiene:

$$|\{x \in \mathbf{R}^n \quad ; \quad f^*(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{c_n}{\lambda} \int_{\mathbf{R}^n} |f(t)|\, dt, \quad \textit{para todo } \lambda > 0$$

2. Esta acotación también puede generalizarse:

Sea $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ medible, existe una constante c_n, dependiente sólo de la dimensión n, tal que se tiene:

$$|\{x \in \mathbf{R}^n \quad ; \quad f^*(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{c_n}{(1-\theta)\lambda} \int_{|f| > \theta\lambda} |f(t)|dt,$$

para todo $\lambda > 0$ y para todo θ tal que $0 < \theta < 1$.

Esta constante universal, c_n, es la misma que la de la proposición anterior.

(*) Presentada en la sesión celebrada el 18 de enero de 1984.

3. Otra acotación que desempeña un notable papel en la obtención de los resultados que se exponen (2; 5,1), es:

Sea $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *medible y sea* $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, *existe una constante* c_n, *dependiente sólo de la dimensión n, tal que es:*

$$\frac{c_n^*}{\lambda} \int_{f^* > \lambda} |f(t)|\, dt \leqslant |\{x \in \mathbf{R}^n \quad ; \quad f^*(x) > \lambda\}|, \quad \textit{para todo } \lambda > 0$$

Esta acotación se mantiene si se suprime la hipótesis de ser f integrable.

4. Un resultado conocido es la caracterización del espacio $L(1 + \log L)(\mathbf{R}^n)$ mediante el operador maximal (2; 6,1), y del que se da un enunciado ligeramente más general:

Sea $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *medible y sean los números* δ, δ' *tales que* $\delta > \delta' > 0$; *si se cumple:*

$$\text{i)} \quad \int_{|f| > \delta'} |f(t)|\, dt < \infty,$$

entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

$$\text{ii)} \quad \int_{f^* > \delta} f^*(t)\, dt < \infty,$$

$$\text{iii)} \quad \int_{|f| > \delta} |f(t)| \log\left(\frac{|f(t)|}{\delta}\right) dt < \infty.$$

En la demostración se sigue (2; 6,1), pero utilizando la desigualdad generalizada.

5. Se trata ahora el problema de la reiteración del operador de Hardy-Littlewood, estudiando las propiedades integrales de las funciones a las que se aplica, consiguiendo una caracterización de los espacios:

$$L(1 + \log L)^k(R^n), \quad \text{con } k > 0 \text{ entero.}$$

Se introduce la siguiente notación:

$$f^{**}(x) = \sup\left\{\frac{1}{|Q|} \int_Q f^*(t)\, dt \quad ; \quad x \in Q\right\},$$

y en general:

$$f^{*k*}(x) = \sup\left\{\frac{1}{|Q|} \int_Q f^{*(k-1)*}(t)\, dt \quad ; \quad x \in Q\right\},$$

cuando se ha aplicado k veces el operador de Hardy-Littlewood.

6. El resultado fundamental es el siguiente:

Sea $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *medible, y sean* δ, δ' *dos números tales que* $\delta > \delta' > 0$. *Suponiendo que es:*

$$\text{i)} \quad \int_{|f| > \delta'} |f(t)| < \delta,$$

entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

$$\text{ii)} \quad \int_{|f| > \delta} |f(t)| \cdot \left(\log\left(\frac{|f(t)|}{\delta}\right)\right)^k dt < \infty,$$

$$\text{iii)} \quad \int_{f^{*k*} > \delta} f^{*k*}(t)\, dt < \infty.$$

Este resultado tiene como corolario inmediato:

Si $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, *entonces son equivalentes las condiciones:*

$$\text{i)} \quad f \in L(1 + \log^+ L)^k(\mathbf{R}^n),$$

$$\text{ii)} \quad \int_{f^{*k*} > 1} f^{*k*}(t)\, dt < \infty.$$

7. Caracterizar el espacio de funciones $L(1 + \log^+ L)^k(\mathbf{R}^n)$ ha requerido utilizar una condición basada en la actuación del operador maximal reiterado k-veces. A continuación se enuncia una nueva caracterización utilizándose una condición basada en la actuación del operador maximal reiterado $(k - 1)$-veces.

El resultado es como sigue:

Sea $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *medible, dados dos números* δ, δ' *tales que* $\delta > \delta' > 0$, *si se cumple:*

$$\text{i)} \quad \int_{|f| > \delta'} |f(t)|\, dt < \infty,$$

entonces son equivalentes las condiciones siguientes:

$$\text{ii)} \quad \int_{|f| > \delta} |f(t)| \cdot \left(\log\left(\frac{|f(t)|}{\delta}\right)\right)^k dt < \infty,$$

$$\text{iii)} \quad \int_{f^{*k-1*} > \delta} f^{*k-1*}(t) \cdot \log\left(\frac{f^{*k-1*}(t)}{\delta}\right) dt < \infty.$$

8. La condición iii) del anterior resultado puede expresarse de la forma siguiente:

$$\int_{f^{*k-1*} > \delta} \psi(f^{*k-1*}(t))\, dt < \infty,$$

donde ψ es una función, definida sobre el intervalo $(0, \infty)$, por $u \longrightarrow u \times \times \log (u/\delta)$, para todo $u > 0$.

A continuación se trata del estudio de las funciones que cumplen una condición análoga a iii), considerando en lugar de ψ una función de Young:

Sea $\Phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ *una función de Young, que está definida de la forma:*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds,$$

para todo $t \geqslant 0$ (3; 3,2,1). *Existe un número* δ_0, $\delta_0 > 0$, *tal que para todo número* δ, *que cumple* $\delta_0 > \delta > 0$, *se verifica* $\Phi^{-1}(\delta) < \delta$.

Se define la siguiente función:

$$\psi(t) = t \cdot \int_\delta^t \frac{\varphi(s)}{s}\, ds, \quad \textit{para todo } s > \delta.$$

9. El resultado fundamental es:

Designando por Φ *y* δ_0 *la función de Young y el número considerado anteriormente, sea* $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ *una función medible, tal que, si* δ *cumple* $\delta_0 > \delta > 0$, *es:*

$$\text{i)} \quad \int_{|f| > \delta} \Phi(|f(t)|)\, dt < \infty,$$

entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

$$\text{ii)} \quad \int_{f^* > \delta} \Phi(f^*(t))\, dt < \infty,$$

$$\text{iii)} \quad \int_{|f| > \delta} \psi(|f(t)|)\, dt < \infty.$$

Con este resultado se caracteriza, mediante el operador maximal, la clase de Orlicz $L_\psi(\mathbf{R}^n)$.

10. Se comprueba que la función ψ es también de Young, y se trata, ahora, la reiteración del proceso anterior.

Se empleará la notación siguiente:

$$\varphi_{\delta^*}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } t \leqslant \delta \\ \varphi(t) + \displaystyle\int_\delta^t \frac{\varphi(s)}{s}\, ds, & \text{si } t > \delta, \end{cases}$$

$$\Phi_{\delta^*}(t) = \begin{cases} \Phi(t), & \text{si } t \leqslant \delta, \\ \psi(t), & \text{si } t > \delta, \end{cases}$$

y en forma más general:

$$\varphi_{\delta^*, k}(t) = \begin{cases} \varphi_{\delta^*, k-1}(t), & \text{si } t \leqslant \delta \\ \varphi_{\delta^*, k-1}(t) + \displaystyle\int_\delta^t \frac{\varphi_{\delta^*, k-1}(s)}{s}\, ds, & \text{si } t > \delta \end{cases}$$

$$\Phi_{\delta^*, k}(t) = \begin{cases} \Phi_{\delta^*, k-1}(t), & \text{si } t \leqslant \delta \\ t \cdot \displaystyle\int_\delta^t \frac{\varphi_{\delta^*, k-1}(s)}{s}\, ds, & \text{si } t > \delta. \end{cases}$$

11. El resultado general es:

Designando por Φ una función de Young, y considerando un número δ, tal que $0 < \Phi^{-1}(\delta) < \delta$, sea $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una función medible. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

$$\text{i)} \quad \int_{f^{*k*} > \delta} \Phi(f^{*k*}(t))\, dt < \infty,$$

$$\text{ii)} \quad \int_{|f| > \delta} \Phi_{\delta^*, k}(|f(t)|)\, dt < \infty.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] WHEEDEN, R. L., y ZYGMUND, A.: *Measure and Integral: An Introduction to Analisis Real*, 1977.

[2] DE GUZMÁN, M.: «Diferentiation in R^n», *Lectures Notes in Mathematics*, 481.

[3] KUFNER, A.; JOHN, O., y FUCIK, S.: *Function Space*, 1977.

[4] DE GUZMÁN, M.: «Variables Methods in Fourier Analysis», *North-Holland Mathematics Studies*, 46, 1981.

[5] CÓRDOBA BARBA, A.: «Five Theorems of Classical Harmonic Analysis», *Mem. Real Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat.*, 15, 1982.

[6] FAVA, N. A.; GATTO, E. A., y GUTIÉRREZ, C.: «On the Strong Maximal Function and Zygmund's Class $L(\log L)^n$»,*Studia Mathem.*, 69, 1980.

[7] CÓRDOBA, A.: «Maximal Functions: A Problem of A. Zygmund», *Euclidean Harmonic Analysis. Lectures Notes in Mathematics*, 779, pág. 154.

[8] CÓRDOBA, A., y FEFFERMAN, R.: «A Geometric Proof of Strong Maximal Theorem», *Ann. Math.*, 102, 1975.