Unicidad del equilibrio para piezas de elasticidad no lineal

Por EMILIO GARBAYO MARTÍNEZ

Recibido: 2 de junio de 1982.

Presentado por el académico numerario Alberto Dou.

Summary

In this paper, the equilibrium of a planar arch under a slowly increasing uniparametric conservative dead load is considered. We first review quite briefly known results about existence of equilibrium configurations, under the assumption of both geometrical and material non linearities. Thereafter we prove that within certain non void open interval I of the load parameter q, the equilibrium configurations make up for a continuous branch which is locally isolated from any other equilibrium configurations (i.e., solutions of the Euler-Lagrange equations and conditions for the appropiate isoperimetric problem for an extremum of the energy functional). Finally we prove that for any given configuration within that branch, a local minimum is reached by the potential energy associated to the given value of the parameter q.

1. INTRODUCCION

Consideremos un arco elástico biarticulado en sus extremos y denotemos por s el parámetro longitud de arco, de su curva directriz en la configuración inicial de referencia, parámetro que supondremos varía en un intervalo $[s_0, s_1]$ cerrado y acotado. La notación $\bar{r}(s)$ expresará la ecuación vectorial de la aludida configuración de referencia de la directriz, cuyas componentes en un sistema cartesiano octonormado XOY arbitrario del plano, notaremos, asimismo, por $(x(s), y(s))$. El desplazamiento $\bar{v}(s)$ desde un punto genérico de la directriz de referencia hasta su configuración deformada (en supuesto equilibrio) tendrá componentes $(u(s), w(s))$ en el mencionado sistema cartesiano. El versor tangente a la directriz original, orientado según valores crecientes de s, se denotará $\bar{t}(s)$ y su ángulo continuo con el eje OX se expresará por $\phi(s)$. Las notaciones s^*, $\phi_*(s)$, $\bar{r}_*(s)$, $\bar{t}^*(s)$ expresarán funciones análogas a las s, $\phi(s)$, $\bar{r}(s)$, $\bar{t}(s)$, pero asociadas a la configuración deformada de la directriz y las notaciones $\bar{n}(s)$, $\bar{n}^*(s)$ describen los vectores unitarios, obtenidos por respectivos giros de los $\bar{t}(s)$, $\bar{t}^*(s)$ en un ángulo $\pi/2$ en el sentido del eje OX hacia el OY.

Supondremos que las funciones $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$, $w(s)$ son dos vectores derivables con continuidad en todo el intervalo cerrado $[s_0, s_1]$. Los dos radios de curvatura $\rho(s)$, $\rho_*(s)$ vienen definidos por las clásicas fórmulas de Frenet de la Geometría elemental:

$$\rho(s)(d\bar{t}/ds) = -\bar{n}(s) \quad ; \quad \rho_*(s)(d\bar{t}^*/ds) = -\bar{n}^*(s)$$

y del primero de ellos supondremos que nunca se anula en $[s_0, s_1]$. Finalmente, definiremos las dos deformaciones $A(s)$, $B(s)$, que llamaremos, respectivamente, alargamiento y giro relativos, como aquellas funciones definidas en la forma:

$$\forall\, s \in [s_0, s_1] \quad ; \quad A(s)\, ds = ds^* - ds \quad ; \quad B(s)\, ds = d\phi_* - d\phi \qquad [1]$$

Conviene quizá añadir que la suposición de arco biarticulado no es en modo alguno esencial, y se ha elegido en aras de concreción y didáctica expositiva. Asimismo, las condiciones naturales a que da lugar, en el problema variacional que se planteará de biarticulación del arco, son de tratamiento ligeramente más dificultoso que el que correspondería a un doble empotramiento, o bien un empotramiento y una articulación.

1.1. Relación geométrica entre desplazamiento y deformaciones

El conocimiento de las funciones $u(s)$, $w(s)$, componentes del desplazamiento, permite hallar las funciones de deformación $A(s)$, $B(s)$. Ello es un elemental ejercicio de Geometría diferencial clásica, que conduce al resultado:

$$A(s) = -1 + \sqrt{(x'(s) + u'(s))^2 + (y'(s) + w'(s))} \qquad [2]$$

y similarmente para la función $B(s)$ que se expresa (omitiendo la dependencia en s) mediante la fórmula:

$$B = \rho^{-1} - (1 + A)^{-2}(u''(y' + w') - w''(x' + u') + \rho^{-1}(1 + x'u' + y'w')) \qquad [3]$$

El problema recíproco de si dadas dos funciones de deformación $A(s)$, $B(s)$ existen otras dos $u(s)$, $w(s)$ que son componentes de su correspondiente desplazamiento, es decir, que verifican las fórmulas [2] y [3], es un problema que sólo recibe respuesta afirmativa si $A(s)$ y $B(s)$ satisfacen ciertas relaciones preestablecidas. Los sencillos desarrollos se basan de nuevo en los métodos clásicos de Geometría diferencial; pueden verse en (Garbayo, 1982) y se resumen con ayuda de las notaciones de números complejos, en la forma que sigue:

1.1.1. *Proposición*

Supongamos que se verifica la condición $\bar{r}(s_0) \neq \bar{r}(s_1)$ y adoptemos las notaciones:

$$S = \{(u, w) \in C^2[s_0, s_1] \times C^2[s_0, s_1] \mid u(s_0) = u(s_1) = w(s_0) = w(s_1) = 0\} \qquad [4]$$

$$M = \left\{(A, B) \in C^1[s_0, s_1] \times C[s_0 s_1] \;\middle|\; \int_{s_0}^{s} ds\,(1 = A(s)) \times \right.$$
$$\left. \times \exp i \int_{s_0}^{s} d\sigma\left(B(\sigma) - \frac{1}{\rho(\sigma)}\right) \right| = |\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0)| \Bigg\} \qquad [5]$$

$$\not{S} = \{(u, w) \in S \mid \forall\, s \in [s_0, s_1] \quad (x'(s) + u'(s))^2 + (y'(s) + w'(s))^2 > 0\} \qquad [6]$$

$$\not{M} = \{(A, B) \in M \mid \forall\, s \in [s_0, s_1] \quad 1 + A(s) > 0\} \qquad [7]$$

En tal caso, hay una aplicación biyectiva entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{S}$ definida por la fórmula:

$$\forall (A, B) \quad \mathcal{M} \quad u(s) + iw(s) = x(s_0) - x(s) + iy(s_0) - iy(s) +$$

$$+ \left(\frac{x(s_1) - x(s_0) + iy(s_1) - iy(s_0)}{\int_{s_0}^{s} d\sigma (1 + A(\sigma)) \exp i \int_{s_0}^{\sigma} \left(B(\lambda) - \frac{1}{\rho(\lambda)} \right) d\lambda} \right) \times$$

$$\times \int_{s_0}^{s} d\sigma (t + A(\sigma)) \exp i \int_{s_0}^{\sigma} \left(B(\lambda) - \frac{1}{\rho(\lambda)} \right) d\lambda \qquad [8]$$

mientras que la aplicación inversa, de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{M}$, está definida por las fórmulas [2] y [3]. Será cómodo, en adelante, utilizar la notación:

$$\forall\, s \in [s_0, s_1] \quad f(s) = \int_{s_0}^{s} \rho^{-1}(\sigma)\, d\sigma \qquad [9]$$

1.1.2. *Variables alternativas de la deformación*

El resultado anterior prueba que es indiferente, desde un punto de vista matemático, utilizar como variables que definen la deformación del arco, o bien el par de funciones $(u(s), w(s))$ en $\mathcal{S}$ o bien el correspondiente par $(A(s), B(s))$ en $\mathcal{M}$. Es a menudo cómodo utilizar alternativamente, como variables de deformación una terna genérica $A(s)$, $B(s)$, h que pertenezca a la variedad C siguiente:

$$C = \left\{ (A, B, h) \in \mathcal{M} \times R \,\middle|\, x(s_1) - x(s_0) + iy(s_1) - iy(s_0) = \right.$$

$$\left. = \int_{s_0}^{s} ds\, (1 + A(s)) \exp i \left(h - f(s) + \int_{s_0}^{s} B(\sigma)\, d\sigma \right) \right\} \qquad [10]$$

La notación $\varphi(s)$ se utilizará en lo sucesivo para la función definida en la forma:

$$\forall\, s \in [s_0, s_1] \quad \varphi(s) = h + \int_{s_0}^{s} B(\sigma)\, d\sigma \qquad [11]$$

Resulta evidente que la proyección de C en $\mathcal{M}$ es una aplicación (no inyectiva) cuya inversa Σ es una correspondencia infinitiforme que resulta ser unívoca si se restringe a la subvariedad:

$$C_0 = \{(A, B, h) \in C \mid h \in [0, 2\pi)\} \qquad [12]$$

en cuyo caso h es el argumento en $[0, 2\pi)$ del cociente de los dos números complejos cuya igualdad de módulos se expresa en la fórmula [5].

1.2. Definición abstracta del arco elástico

Desde un punto de vista abstracto, el arco biarticulado consistirá en el agregado de varios objetos matemáticos, a saber:

I) Una curva plana, que llamaremos configuración de referencia, definida por un par de funciones reales $(x(s), y(s))$ de la clase $C^2[s_0, s_1]$ y cuyo radio de curvatura $\rho(s)$ supondremos nunca nulo.

II) Una función W de $R^2 \times [s_0, s_1]$ en $\bar{R}$ (notación para el completado de R con $+\infty$) que sea *de clase dos* en la terna conjunta de sus argumentos y que llamaremos *densidad de energía elástica* (o también energía interna por unidad de arco) con las propiedades:

$$W^{-1}(+\infty) = \{(A, B, s) \in R^2 \times [s_0, s_1] \mid A \leqslant -1\} \qquad [13]$$

$$\forall\, s \in [s_0, s_1] \quad \text{lím}\; W(A, B, s) = +\infty \quad \text{si} \quad |A| + |B| \longrightarrow \infty \qquad [14]$$

Posteriormente se enunciarán hipótesis adicionales para la función W.

III) Una función F de $R^4 \times [s_0, s_1]$ en R, de clase dos en sus cinco argumentos conjuntamente, que llamaremos *densidad de potencial externo.* En el caso de independencia de F respecto a su tercer y cuarto argumentos, diremos que el previo densidad de potencial corresponde a una *carga muerta.*

Dado un número real cualquiera q, que llamaremos *factor o parámetro de carga,* definiremos la *energía potencial* asociada a tal q, como el funcional U definido en $\mathbb{S}$ (o equivalentemente en $\mathbb{M}$) por la fórmula:

$$\forall\, (u, w) \in \mathbb{S}, \quad U = \int_{s_0}^{s} W(A(s), B(s), s)\, ds + {}$$

$$+ q \int_{s_0}^{s} F(u(s), w(s), u'(s), w'(s), s)\, ds \qquad [15]$$

donde $A(s)$, $B(s)$ se expresan mediante las fórmulas [2] y [3] en función de $u(s)$, $w(s)$ de modo que [15] sea funcional definido en $\mathbb{S}$ (o alternativamente $u(s)$, $w(s)$ se expresan mediante la fórmula [8] en función de $A(s)$, $B(s)$ de modo que [15] sea un funcional definido en $\mathbb{M}$). En el caso de carga muerta, el funcional U toma la forma simplificada:

$$U = \int_{s_0}^{s} W(A(s), B(s), s)\, ds + q \int_{s_0}^{s} F(u(s), w(s), s)\, ds \qquad [16]$$

En próximos apartados impondremos condiciones adicionales sobre la función F.

1.3. Definición de las configuraciones de equilibrio

Entenderemos por *configuración de equilibrio* relativa al factor de carga q, un par de funciones $(u(s), w(s))$ que, en primer lugar, pertenezca a la variedad

$\mathcal{S}$ definida por [6] y, en segundo lugar, la variación primera del funcional U definido por [15], calculada en tal configuración, sea un funcional (lineal) idénticamente nulo cuando se restringe al subespacio S definido por [4]. Según la teoría clásica del cálculo de variaciones (Akhiezer, 1962) el par $u(s)$, $w(s)$ debe satisfacer las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional U, así como las apropiadas condiciones naturales y forzadas de contorno.

De modo alternativo, pero equivalente, se puede definir una configuración de equilibrio como un par de funciones $A(s)$, $\varphi(s)$ tales que el par $A(s)$, $\varphi'(s)$ pertenezca al subconjunto $\mathcal{M}$ definido por [7] y que, por otra parte, satisfaga las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional:

$$U = \int_{s_0}^{s} W(A(s), \varphi'(s), s)\, ds + q \int_{s_0}^{s} F(u(s), w(s), u'(s), w'(s), s)\, ds \quad [17]$$

con las dos condiciones isoperimétricas (Akhiezer, 1962, pp.113-117):

$$\int_{s_0}^{s} ds\, (1 + A(s)) \cos(\varphi(s) - f(s)) = x(s_1) - x(s_0) \quad [18]$$

$$\int_{s_0}^{s} ds\, (1 + A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) = y(s_1) - y(s_0) \quad [19]$$

y de modo que $u(s)$, $w(s)$ en el segundo sumando integral que define U sean las funciones definidas por:

$$u(s) + iw(s) = x(s_0) - x(s) + iy(s_0) - iy(s) +$$

$$+ \int_{s_0}^{s} d\sigma\, (1 + A(\sigma)) \exp i(\varphi(\sigma) - \varphi(s_0) - f(\sigma)) \quad [20]$$

Diremos, por otra parte, que una configuración de equilibrio es *finitamente estable* cuando proporciona un mínimo relativo aislado en el subespacio S definido por [4] para el funcional U definido por [15], [2], [3].

Este mínimo deberá entenderse para entornos de los elementos de S, compatibles con la norma del máximo (en el intervalo s_0, s_1) de los módulos de las funciones $u(s)$, $w(s)$ más los de sus derivadas hasta el orden dos inclusive, es decir, lo que en Cálculo de variaciones (Akhiezer, 1962, pp. 5, 6, 104) se llama un mínimo relativo débil.

2. EXISTENCIA DE CONFIGURACIONES DE EQUILIBRIO

Un problema central que ha sido sistemáticamente estudiado por S. S. Antman y resuelto por él de modo completo, es el problema de dar condiciones en las funciones W y F que figuran en [15] y [16] para que, siendo suficientemente generales y plausibles desde un punto de vista de interpretación física, permitan asegurar que el funcional U de energía potencial alcanza un mínimo en el subconjunto $\mathcal{M}$. Los trabajos de Antman utilizan los métodos variacionales directos (Akhiezer, 1962, pp. 127-148) mejorándolos sustancialmente para que puedan tener encuenta condiciones de desigualdad estricta, como, por ejemplo, la $1 + A(s) > 0$ que define $\mathcal{M}$.

2.1. Teorema

Supongamos que la función W verifica, aparte de las condiciones ya establecidas en 1.2, las siguientes:

IV) Existen un número real H estrictamente positivo y una función $k(s)$ integrable en $(s_0\, s_1)$, así como números reales $\alpha > 1$, $\beta > 1$, de modo que:

$$\forall\, s \in [s_0,\, s_1],\ \forall\, (A, B) \in R^2,\ W(A, B, s) \geqslant H\,[A]^\alpha + H\,[B]^\beta - k(s) \quad [21]$$

V) Para cualquier s en $[s_0\, s_1]$ la matriz hessiana de W respecto a las dos variables A, B es estrictamente definida positiva en todo el subconjunto de R^2 en que W es finita, es decir:

$$\forall\, (A, B, s) \in (-1, \infty) \times R \times [s_0, s_1] \quad (\partial^2 W/\partial A^2) > 0,\ (\partial^2 W/\partial B^2) > 0,$$
$$(\partial^2 W/\partial A^2)(\partial^2 W/\partial B^2) - (\partial^2 W/\partial A \partial B)^2 > 0 \quad [22]$$

Supongamos, por otra parte, que el funcional U de [17] está definido, por intermedio de las fórmulas [20], en el espacio producto:

$$\Pi = \{(A(s),\ \varphi(s)) \in L^\alpha(s_0, s_1) \times W^1_\beta(s_0, s_1)\} \quad [23]$$

con valores en el completado $\bar{R}$ y de modo que W^1_β es el símbolo típico que denota los espacios de Sobolev (Sobolev, 1963). Supongamos, asimismo, que la función F de [17] es tal que se verifica:

$$\text{lím}\, U = +\infty, \quad \text{si} \quad \|A\| + \|\varphi\| \to \infty \text{ en } \Pi \quad [24]$$

donde las normas supuestas para las funciones A, φ son las típicas en sus respectivos espacios de pertenencia L^α y W^1_β.

En todos los supuestos anteriores puede asegurarse que el funcional U alcanza su extremo inferior, que es finito, en la variedad ext M definida por:

$$\text{ext}\, M = \{(A,\varphi) \in \Pi \mid x(s_1) - x(s_0) + iy(s_1) - iy(s_0) =$$
$$= \int_{s_0}^{s_1} ds\ (1 + A(s)) \exp i(\varphi(s) - f(s))\} \quad [25]$$

La demostración puede verse, por ejemplo, en (Antman y Brezis, 1978), con variantes detalladas en varios de los artículos de Antman ahí citados.

2.2. Comentarios

Es fácil comprobar que una condición suficiente para que se verifique la [24] es que exista constante positiva K, una función integrable $l(s)$ y un exponente real $a < \alpha$ de modo que el módulo de F verifique una acotación de la forma:

$$\forall\, (u, w, \underline{u}, \underline{w}, s) \in R^4 \times [s_0, s_1] \quad |F(u, w, \underline{u}, \underline{w}, s)| \leqslant \leqslant K(|u|^a + |w|^a + |\underline{u}|^a + |\underline{w}|^a) + l(s) \tag{26}$$

Comprobación que sólo requiere manipulaciones elementales con la desigualdad [21] y con la clásica de Hölder. Es evidente que esta última condición se verifica para la llamada *carga de peso propio* a la que, por definición, corresponde una función F de la forma:

$$F = P(s)w \quad \text{con} \quad P(s) \quad \text{prefijada en} \quad C[s_0, s_1] \tag{27}$$

De ahora en adelante efectuaremos los desarrollos para una tal carga de peso propio, en aras de la concreción que produce el referirse a un ejemplo de tal importancia física y tecnológica. Sin embargo, las conclusiones obtenidas serán trasladables sin mayores dificultades a un caso general en que se satisfaga la [26]. Las derivadas parciales $\partial W/\partial A$, $\partial W/\partial B$ se interpretan físicamente como esfuerzos axil yflector (Antman, 1972), y las condiciones [22] expresan el crecimiento monótono (físicamente esperable) de tales esfuerzos con A y B, así como la correspondencia biyectiva (localmente) entre ambos pares de magnitudes.

El previo teorema 2.1 asegura la existencia de lo que podríamos llamar, de acuerdo con el espíritu de los métodos variacionales directos, configuraciones generalizadas de equilibrio. El teorema que sigue asegura la regularidad de tales configuraciones.

2.3. Teorema

Supongamos que se satisfacen todas las hipótesis del teorema 2.1 y que, además, existe una función g de R en R, que llamaremos *función de distorsión*, dos veces derivable con continuidad y de derivada primera estrictamente positiva e todo R y de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:

VI) Existe un número real $K_1 > 0$ y una función $k_1(s)$ integrable, así como números reales $\alpha_1 > 1$, $\beta_1 > 1$ de modo que:

$$\forall\, s \in [s_0, s_1] \;\forall\, (D, B) \in R^2 \qquad W(g(D), B, s) \geqslant H_1|D|^{\alpha_1} + H_1|B|^{\beta_2} - k_1(s)$$

VII) Con el mismo exponente α_1 de la condición anterior, para cualquier función $D(s)$ en $L^1(s_0, s_1)$ se verifica que las funciones $g(D(s))$, $g'(D(s))$ pertenecen, respectivamente, a los espacios $L^1(s_0, s_1)$ y $L^{\alpha'_1}(s_0, s_1)$, donde $(1/\alpha_1) + (1/\alpha'_1) = 1$.

VIII) Existe un número estrictamente positivo k_1 y una función integrable $l_1(s)$ de modo que se verifican las acotaciones:

$$\forall\,(D, B, s) \in R^2 \times [s_0, s_1] \qquad |(\partial W/\partial D)(g(D), B, s)|$$
$$|(\partial W/\partial B)(g(D), B, s)| \leqslant k_1|D|^{\alpha_1} + k_1|B|^{\beta_1} + l_1(s) \qquad [29]$$

En todos los supuestos anteriores se verifica que el elemento de la variedad ext M en que se alcanza, según el teorema 2.1 previo, el extremo inferior finito del funcional U, es un par defunciones $A^*(s)$, $\varphi^*(s)$, respectivamente de las clases $C^1[s_0, s_1]$ y $C^2[s_0, s_1]$ que, por un lado, satisfacen la acondición:

$$\forall\, s \in [s_0, s_1], \quad A_*(s) > -1 \qquad [30]$$

y, por otra parte, verifican las ecuaciones de Euler-Lagrange para el funcional U definido en [17], [20], [27] con las condiciones isoperimétricas [18], [19]. Lo que se resume en las ecuaciones siguientes:

$$\exists\, \mu,\ \nu \in R,\ \forall\, s \in [s_0, s_1] \qquad \frac{\partial W}{\partial A}(A_*(s), \varphi'_*(s), s) +$$
$$+ (qQ(s) - \nu)\,\mathrm{sen}\,(\varphi_*(s) - f(s)) - \mu \cos(\varphi_*(s) - f(s)) = 0$$
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial W}{\partial B}(A_*(s), \varphi'_*(s), s)\right) - (qQ(s) - \nu)(1 + A_*(s)) \times$$
$$\times \cos(\varphi_*(s) - f(s)) - \mu(1 + A_*(s))\,\mathrm{sen}\,(\varphi_*(s) - f(s)) = 0 \qquad [31]$$
$$\frac{\partial W}{\partial B}(A_*(s_0), \varphi'_*(s_0), s_0) = \frac{\partial W}{\partial B}(A_*(s_1), \varphi'_*(s_1), s_1) = 0 \qquad [32]$$

A las que deben añadirse las [18], [19] que expresan las condiciones isoperimétricas. En estas ecuaciones $Q(s)$ es la función real definida por:

$$s \in [s_0, s_1] \qquad Q(s) = \int_{s_0}^{s} P(\sigma)\, d\sigma \qquad [33]$$

Las líneas maestras de la demostración están en (Antman, 1978). Detalles menores y de desarrollo minucioso se encuentran en (Garbayo, 1982).

2.4. Comentarios

La condición VII se verifica de modo suficiente, si los crecimientos de $g(D)$, $g'(D)$ están atemperados por desigualdades de la forma:

$$|g(D)| \leqslant c_1 + C|D|^{\alpha_1}, \qquad |g'(D)| \leqslant C_1 + C|D|^{\alpha_1 - 1} \qquad [34]$$

con C_1 y C números reales prefijados, de los cuales C debe ser positivo.

Las ecuaciones [32] son las condiciones de contorno que suelen llamarse naturales en el Cálculo de variaciones.

Otra demostración de los teoremas 2.1 y 2.3 es la de (Antman, 1970), que se basa en hipótesis alternativas y complementarias, sobre las funciones W y g.

Es conveniente observar que el teorema 2.3 no asegura en modo alguno, la unicidad de soluciones del sistema de ecuaciones [31], [32], [18], [19]. De hecho, puede mostrarse en casos especiales y ejemplos (Antman, 1970) que puede darse, para ciertos valores de q, multiplicidad de soluciones. Ello puede interpretarse, en el sentido de que las hipótesis hechas sobre W permiten representar, matemáticamente, los fenómenos físicamente observables de pandeo y bifurcación del equilibrio.

3. UNICIDAD LOCAL DE CONFIGURACIONES DE EQUILIBRIO

Las hipótesis efectuadas hasta ahora sobre la función W no implican que la configuración inicial sea de equilibrio para $q = 0$, ni tampoco que en tal configuración sean nulos los esfuerzos $\partial W/\partial A$ y $\partial W/\partial B$. En breve efectuaremos hipótesis complementarias de las que se siguen las afirmaciones previstas y probaremos, a lo largo de todo este apartado, que hay un cierto intervalo abierto I de valores de q, que contiene al valor $q = 0$ y que parametriza una familia de configuraciones de equilibrio, que es de unicidad local en un sentido a precisar y que enlaza con continuidad la configuración inicial, para $q = 0$, a las configuraciones para los demás valores de q en I.

3.1. Notaciones e hipótesis adicionales

Supondremos que la pareja de funciones $A(s)$, $\varphi(s)$ definidas por:

$$\forall\, s \in [s_0, s_1] \quad \mathrm{A}(s) = 0 \quad \varphi(s) = \psi_0 \quad 0 \leqslant \psi_0 < 2\pi \quad x(s_1) - x(s_0) + \\ + iy(s_1) - iy(s_0) = (\exp i\psi_0) \int_{s_0}^{s_1} \exp(-f(s))\, ds \qquad [35]$$

es un par minimizante del funcional [17], [20], [27] en la variedad ext M definida por [25]. Supondremos además que:

$$\forall\, s \in [s_0, s_1] \quad (\partial W/\partial A)\ (0, 0, s) = (\partial W/\partial B)(0, 0, s) = 0 \qquad [36]$$

El símbolo $\hat{B}$ denotará el espacio producto de Banach:

$$\hat{B} = \{(A(s), \varphi(s), \mu, \nu) \in C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1] \times R \times R\} \qquad [37]$$

con la norma definida por:

$$\forall\, (A, \varphi, \mu, \nu) \in \hat{B} \quad \|(A, \varphi, \mu, \nu)\| = \text{máx}\, \{|A(s)| \mid s \in [[s_0, s_1]\} + \\ + \text{máx}\, \{|\varphi(s)| + |\varphi'(s)| \mid s \in [s_0, s_1]\} + |\mu| + |\nu| \qquad [38]$$

Las notaciones $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_0$ serán habituales para un elemento genérico y un elemento particular de $\hat{B}$, respectivamente, mediante las abreviaturas:

$$\mathscr{C} \equiv (A(s), \varphi(s), \mu, \nu,) \in \hat{B}, \quad \mathscr{C}_0 \equiv (0, \psi_0, 0, 0) \in \hat{B} \qquad [39]$$

donde ψ_0 viene definido por [35]. El símbolo $\hat{D}$ denotará el subconjunto de B definido por :

$$\hat{D} = \{\mathscr{C} \in \hat{B} \mid \forall\, s \in [s_0, s_1] \quad -1 + A(s) > 0\} \qquad [40]$$

y definimos el funcional real V en el producto cartesiano $\hat{D} \times R$ del modo siguiente:

$$\forall\, (\mathscr{C}, q) \in \hat{D} \times R \quad V(\mathscr{C}, q) = \int_{s_0}^{s_1} W(A(s), \varphi'(s), s)\, ds +$$

$$+ q \int_{s_0}^{s_1} Q(s)(1 + A(s)) \times \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s))\, ds +$$

$$+ \mu \left[\int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s)) \cos\, (\varphi(s) - f(s))\, ds - x(s_1) + x(s_0) \right] +$$

$$+ \nu \left[\int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s)) \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s))\, ds - y(s_1) + y(s_0) \right] \qquad [41]$$

donde $Q(s)$ es la función real definida por la [33].

Con todas estas notaciones e hipótesis, más las que previamente se han ido estableciendo, podemos enunciar:

3.2. Proposición

El subconjunto $\hat{D}$ es abierto en el espacio $\hat{B}$ con la norma [38] y el funcional V es diferenciable Frechet, con continuidad, hasta el orden dos inclusive en todo $\hat{D} \times R$. Por otra parte, la derivada parcial $\partial V/\partial \mathscr{C}$ permite expresar resumidamente las seis ecuaciones [31], [32], [18] y [19] en la forma:

$$\forall\, q \in R\ \exists\, \mathscr{C}_* \in \hat{D} \quad (\partial V/\partial \mathscr{C})(\mathscr{C}_*, q) = 0 \qquad [42]$$

Omitimos la sencilla y rutinaria demostración, que consiste en comprobar paso por paso que se satisfacen (cuenta habida de las propiedades de diferenciabilidad de la función W de densidad de energía) todas las condiciones que definen la derivada Frechet (Chilov, 1975, pp. 24-59, 129-156).

Efectuada la comprobación, se constata que $\partial V/\partial\mathscr{C}$ es una aplicación de $\hat{D} \times R$ en el dual de B que se expresa:

$$\forall\,(\mathscr{C}, q) \in \hat{D} \times R \qquad \forall\,\delta\mathscr{C} \in \hat{B} \qquad (\partial V/\partial\mathscr{C})(\mathscr{C}, q)(\delta\mathscr{C}) =$$

$$= \int_{s_0}^{s_1} \delta A(s)\left[\frac{\partial W}{\partial A}(A(s), \varphi'(s), s) + (qQ(s) - v)\,\text{sen}\,(\varphi(s) - f(s)) - \cos\,(\varphi(s) - f(s))\right] ds +$$

$$+ \int_{s_0}^{s_1} \delta\varphi'(s)\left[\frac{\partial W}{\partial B}(A(s), \varphi'(s), s) - \int_{s_1}^{s} (qQ(\sigma) - v)\,(1 + A(\sigma))\cos\,(\varphi(\sigma) - f(\sigma))\,d\sigma + \right.$$

$$\left. + \mu\int_{s_1}^{s} (1 + A(\sigma)) \times \text{sen}\,(\varphi(s) - f(\sigma))\,d\sigma\right] ds + \delta\varphi(s_0)\int_{s_0}^{s_1} [(qQ(s) - v)\,(1 + A(s)) \times$$

$$\times \cos\,(\varphi(s) - f(s)) + \mu(1 + A(s))\,\text{sen}\,(\varphi(s) - f(s))]\,ds +$$

$$+ (\delta\mu)\left[x(s_0) - x(s_1) + \int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s))\cos\,(\varphi(s) - f(s))\,ds\right] +$$

$$+ (\delta v)\left[y(s_0) - y(s_1) + \int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s))\,\text{sen}\,(\varphi(s) - f(s))\,ds\right] \qquad [43]$$

La fórmula que se acaba de escribir muestra, por simple inspección, que para cada par $(\mathscr{C}, q)$ en $\hat{D} \times R$, el funcional lineal $\partial V/\partial\mathscr{C}$ viene caracterizado por una quíntupla del producto cartesiano de espacios:

$$C\,[s_0, s_1] \times C\,[s_0, s_1] \times R^3, \quad \text{que denotaremos } \tilde{B} \qquad [44]$$

producto $\tilde{B}$ que resulta así isomorfo a un subespacio del dual de $\hat{B}$. Los elementos de la mencionada quíntupla son, precisamente, los *respectivos coeficientes* de $\delta A(s)$, $\delta\varphi'(s)$, $\delta\varphi(s_0)$, $\delta\mu$, δv en la [43]. La derivada parcial $\partial V/\partial\mathscr{C}$ se restringe así a una aplicación, que *notaremos por* $V1$, de $\hat{D} \times R$ en $\tilde{B}$, la cual es diferenciable Frechet al menos una vez (que es precisamente lo afirmado por la proposición 3.2 que hemos enunciado). La derivada parcial $\partial V1/\partial\mathscr{C}$ puede calcularse en todo $(\mathscr{C}, q)$ de $\hat{D} \times R$ y resulta una aplicación lineal continua de $\hat{B}$ en $\tilde{B}$. En particular en el par $\mathscr{C}_0$, $q = 0$ definido por [39], [35] es sencillo calcular las cinco componentes de $\partial V1/\partial\mathscr{C}$ en la forma:

$$\forall\,\delta\mathscr{C} \in \hat{B} \qquad (\partial V1/\partial\mathscr{C})(\mathscr{C}_0, 0)(\delta\mathscr{C}) = (\delta X(s), \delta\gamma(s), \delta k_1, \delta k_2, \delta k_3)$$

$$\delta X(s) = \delta A(s)(\partial^2 W/\partial A^2)(0, 0, s) + \delta\varphi'(s)(\partial^2 W/\partial A\partial B)(0, 0, s) -$$
$$- (\delta\mu)\cos\,(\psi_0 - f(s)) - (dv)\,\text{sen}\,(\psi_0 - f(s))$$

$$\delta\gamma(s) = \delta A(s)(\partial^2 W/\partial B\partial A)(0, 0, s) + \delta\varphi'(s)(\partial^2 W/\partial B^2)(0, 0, s) -$$

$$- (\delta\mu) \int_{s_1}^{s} \operatorname{sen} (\psi_0 - f(\sigma))\, d\sigma + (\delta\nu) \int_{s_1}^{s} \cos\, (\psi_0 - f(\sigma)\, d\sigma$$

$$\delta k_1 = (\delta\mu) \int_{s_0}^{s_1} \operatorname{sen} (\psi_0 - f(s))\, ds - (\delta\nu) \int_{s_0}^{s_1} \cos (\psi_0 - f(s))\, ds$$

$$\delta k_2 = - \int_{s_0}^{s_1} \delta A(s) \cos (\psi_0 - f(s))\, ds + \int_{s_0}^{s_1} \delta\varphi(s) \operatorname{sen} (\psi_0 - f(s))\, ds$$

$$\delta k_3 = - \int_{s_0}^{s_1} \delta A(s) \operatorname{sen} (\psi_0 - f(s))\, ds - \int_{s_0}^{s_1} \delta\varphi(s) \cos (\psi_0 - f(s)) \qquad [45]$$

3.3. Teorema

Con todas las notaciones e hipótesis previas, existe un real r estrictamente positivo y existe una función $\mathscr{C}$ de $(-r, r)$ en $\hat{B}$ que es continua y derivable, de modo que para cualquier q en $(-r, +r)$ hay un entorno Eq de $\mathscr{C}(q)$ con las dos propiedades siguientes:

a) $\mathscr{C}(q)$ pertenece al subconjunto $\hat{D}$ definido por [40] y es una cuaterna, que notaremos:

$$\forall\, q \in (-r, +r) \qquad \mathscr{C}(q) = (A(s, q), \varphi(s, q), \mu(q), \nu(q)) \qquad [46]$$

cuaterna que verifica la condición [30], las ecuaciones de Euler-Lagrange [31], las condiciones naturales [32] y las condiciones isoperimétricas [18], [19].

b) Ninguna otra cuaterna del entorno Eq satisface, aparte de la $\mathscr{C}(q)$, las ecuaciones de Euler-Lagrange y las condiciones naturales e isoperimétricas mencionadas.

Para la demostración utilizaremos el teorema de la función implícita (Chilow, 1975, pp. 64-69) aplicado a la ecuación $V1(\mathscr{C}, q) = 0$ que se satisface para $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0$, $q = 0$, en virtud de las hipótesis [35], [36] y la proposición previa 3.2, fórmula [42]. También en la proposición previa 3.2 se han explicitado algunas de las condiciones que debe verificar $V1$, para la aplicabilidad del teorema de la función implícita, cual es la diferenciabilidad Frechet en todo un entorno de $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0$, $q = 0$ (de hecho, en todo $\hat{D} \times R$). De las restantes condiciones de aplicabilidad, casi todas son de rutinaria comprobación, a saber, la existencia de un entorno de $(\mathscr{C}_0, 0)$ en el que la aplicación $V1$ sea acotada y en el que también sea, junto con la aplicación $\partial V1/\partial\mathscr{C}$, uniformemente continua. Omitimos tal comprobación que usa, entre otras, las expresiones explícitas [43] y [45], aunque sea quizá oportuno señalar que la aplicación $\partial V1/\partial\mathscr{C}$ se entiende como de $\hat{D} \times R$ en el espacio de los operadores lineales acotados de $\hat{B}$ en $\tilde{B}$ (definiciones [37] y [44]).

Queda por constatar una última condición de validez del teorema de la función implícita, condición que requiere la biyectividad del operador lineal

$(\partial V1/\partial\mathscr{C})(\mathscr{C}_0, 0)$. Utilizamos las fórmulas [45] que expresan el mencionado operador (de $\hat{B}$ en $\tilde{B}$) y demostraremos en primer lugar que es inyectivo, es decir, que de las condiciones $\delta X(s) = \delta y(s) = 0$, $\delta k_1 = \delta k_2 = \delta k_3 = 0$ se sigue forzosamente $\delta A(s) = \delta\varphi(s) = 0$, $\delta\mu = \delta\nu = 0$.

En efecto, después de reemplazar todos los cinco primeros miembros de las [45] por cero, constatamos que los coeficientes de $\delta\mu$, $\delta\nu$ en la tercera ecuación son, en virtud de [35], respectivamente iguales a $y(s_1) - y(s_0)$, $x(s_1) - x(s_0)$, por lo que al menos uno de ellos es no nulo, dada la hipótesis (proposición 1.1.1) $\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0) \neq \bar{0}$. Supongamos, por ejemplo, $x(s_1) - x(s_0) \neq 0$ y sea ε un ángulo tal que:

$$\begin{aligned} x(s_1) - x(s_0) &= |\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0)| \cos\varepsilon, \quad \cos\varepsilon \neq 0 \\ y(s_1) - y(s_0) &= |\bar{r}(s_1) - \bar{r}(s_0)| \operatorname{sen}\varepsilon \end{aligned} \qquad [47]$$

con lo cual se puede sustituir $\delta\nu$ por $(d\mu)$ tg ε en las dos primeras de [45] para obtener, en el supuesto de que $\delta X(s)$, $\delta y(s)$ sean nulas, después de sencillas transformaciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \delta A(s)\frac{\partial^2 W}{\partial A^2} + \delta\varphi'(s)\frac{\partial^2 W}{\partial A \partial B} &= \frac{\delta\mu}{\cos\varepsilon}\cos(\psi_0 - \varepsilon - f(s)) \\ \delta A(s)\frac{\partial^2 W}{\partial B \partial A} + \delta\varphi'(s)\frac{\partial^2 W}{\partial B^2} &= \frac{\delta\mu}{\cos\varepsilon}\int_{s_1}^{s} \operatorname{sen}(\psi_0 - \varepsilon - f(\sigma))\, d\sigma \end{aligned} \qquad [48]$$

El resto de la eliminación se efectúa como sigue: se integran por partes los segundos sumandos integrales de las dos últimas ecuaciones [45], de modo que se haga explícita la función $\delta\varphi'(s)$ y también un término no integral con el *solo* factor $\delta\varphi(s_0)$. A continuación se suponen nulos δk_2, δk_3 y se elimina entre las dos ecuaciones lineales obtenidas la variable $\delta\varphi(s_0)$, lo que conduce después de efectuados todos los cálculos a la ecuación:

$$\begin{aligned} &\int_{s_0}^{s_1} \delta A(s)\cos(\psi_0 - \varepsilon - f(s))\, ds + \int_{s_0}^{s_1} \delta\varphi'(s)\; \times \\ &\times \left(\int_{s_1}^{s} \operatorname{sen}(\psi_0 - \varepsilon - f(\sigma))\, d\sigma\right) ds = 0 \end{aligned} \qquad [49]$$

En esta última ecuación se sustituyen $\delta A(s)$, $\delta\varphi'(s)$ obtenidas de las dos [48] y adoptando las notaciones:

$$g(s) = \cos(\psi_0 - \varepsilon - f(s)) \qquad h(s) = \int_{s_1}^{s} \operatorname{sen}(\psi_0 - \varepsilon - f(\sigma))\, d\sigma \qquad [50]$$

se obtiene el resultado final:

$$\frac{\delta\mu}{\cos\varepsilon}\int_{s_0}^{s_1} (g(s), h(s))(J(s))\begin{pmatrix} g(s) \\ h(s) \end{pmatrix} ds = 0 \qquad [51]$$

donde $J(s)$ representa la matriz inversa de la hessiana de W valorada en

$(0, 0, s)$ según indican las [45]. Esta inversa $J(s)$ existe por ser la hessiana estrictamente positiva (según la hipótesis [22]), lo que implica, a su vez, la positividad extricta de la propia $J(s)$. Todo lo cual se traduce, cuenta habida de la continuidad de $g(s)$, $h(s)$, $J(s)$ y de la [51], en la conclusión $\delta\mu = 0$. Las dos [48] y la tercera de las [45] implican ahora $\delta A(s) = 0$, $\delta\varphi'(s) = 0$. Finalmente, una integración por partes en el segundo sumando integral de la última [45] permite concluir $\delta\varphi(s_0) = 0$, lo que termina de demostrar la inyectividad del operador lineal $(\partial V1/\partial\mathscr{C})(\mathscr{C}_0, 0)$.

La biyectividad de tal operador se seguirá de comprobar que su imagen es todo $\tilde{B}$. A tal efecto, consideremos una quíntupla arbitraria $\delta X(s)$, $\delta\gamma(s)$, δk_1, δk_2, δk_3 del espacio $\tilde{B}$, que constituya los respectivos primeros miembros de las cinco ecuaciones [45]. Previamente supondremos transformadas las dos últimas de tales ecuaciones, mediante las integraciones por partes recientemente consideradas, de modo que se hagan explícitas las variables $\delta\varphi'(s)$, $\delta\varphi(s_0)$. De las dos primeras [45] despejaremos, con ayuda de la matriz $J(s)$, las variables $\delta A(s)$, $\delta\varphi'(s)$ como combinación lineal de las $\delta X(s)$, $\delta\gamma(s)$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, de modo que por sustitución en las tres últimas [45] obtenemos un sistema algebraico lineal, en las tres incógnitas $\delta\mu$, $\delta\nu$, $\delta\varphi(s_0)$. Como tales incógnitas son elementos del cuerpo R, la teoría elemental del Algebra nos enseña, que el sistema obtenido tiene solución única si, y sólo si, el sistema homogéneo asociado admite sólo la solución trivial. Pero tal es nuestro caso, dado que el sistema homogéneo se obtiene reemplazando cada $\delta X(s)$, $\delta\gamma(s)$, δk_1, δk_2, δk_3 por cero y podemos, entonces, invocar el resultado sobre inyectividad que hemos probado en líneas anteriores. Determinadas así $\delta\mu$, $\delta\gamma$, $\delta\varphi(s_0)$ de modo unívoco, también lo están $\delta A(s)$, $\delta\varphi'(s)$ y la biyectividad queda demostrada.

En una recapitulación de lo establecido hasta ahora, podemos concluir que existe un intervalo real I, abierto y no vacío, así como una función de I en B (en virtud del teorema de la función implícita) derivable y la única continua que verifica:

$$\forall\, q \in I \quad V1(\mathscr{C}(q), q) = 0, \quad \mathscr{C}(0) = \mathscr{C}_0 \tag{52}$$

Se verifica, por otra parte, que para cada q en I, la cuaterna que constituye $\mathscr{C}(q)$ es solución (en virtud de lo asegurado en [42]) de las ecuaciones [31] de Euler-Lagrange, y de sus condiciones subsidiarias [30], [32], [18], [19].

El teorema 3.3 afirma más de lo que hasta ahora hemos deducido y para completar su demostración debemos establecer que cada $\mathscr{C}(q)$ es solución aislada de las ecuaciones [31], [32], [18] [19]. A tal efecto, recordamos que en el espacio normado completo de los operadores lineales acotados de $\hat{B}$ en $\tilde{B}$, el conjunto de los elementos invertibles es abierto (Chilov, 1975, pp. 43, 44), por lo que la continuidad en q asegura la existencia de un cierto entorno de $q = 0$, cuya intersección con I seguiremos denotando con igual letra, de modo que se verifica:

$$\forall\, q \in I \quad (\partial V1/\partial\mathscr{C})(\mathscr{C}(q), q) \quad \text{es biyectivo en } \hat{B} \text{ en } \tilde{B} \tag{53}$$

Supongamos ahora, razonando sobre la proposición contrarrecíproca, que para determinado q_* de I la cuaterna $\mathscr{C}(q^*)$ no fuese solución aislada de [52] y existiese una sucesión $\mathscr{C}_n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que:

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \quad V1(\mathscr{C}_n, q^*) = \bar{0} \quad \|\mathscr{C}_n - \mathscr{C}(q^*)\| \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty \tag{54}$$

En el supuesto anterior, la definición de derivada Frechet indica:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \bar{0} = V1(\mathscr{C}_n, q^*) - V1(\mathscr{C}(q^*), q^*) = \frac{\partial V1}{\partial \mathscr{C}}(\mathscr{C}(q^*), q^*)(\mathscr{C}_n - \mathscr{C}(q^*)) + $$
$$+ \bar{\Omega}_n, \quad \|\mathscr{C}_n - \mathscr{C}(q^*)\|^{-1}\|\bar{\Omega}_n\| \longrightarrow 0, \quad \text{si} \quad n \longrightarrow \infty \qquad [55]$$

y dado que el operador inverso es también acotado (Rudin, 1973, pp. 47-49) se deduce:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \|\mathscr{C}_n - \mathscr{C}(q^*)\| \leqslant \left\| \left(\frac{\partial V1}{\partial \mathscr{C}}(\mathscr{C}(q^*), q^*) \right)^{-1} \right\| \|\bar{\Omega}_n\| \qquad [56]$$

Lo que es manifiestamente contradictorio con la previa [55] si $n \longrightarrow \infty$.

Queda, por tanto, completamente demostrado el teorema 3.3 que nos ocupaba.

4. ESTABILIDAD DE LA RAMA DE UNICIDAD LOCAL

El previo teorema 3.3 define una cierta familia de configuraciones, a saber, aquellas de la forma $\mathscr{C}(q)$ cuando q varía en I. Diremos que tal familia es una «rama de unicidad local» y calificaremos al intervalo I como «de unicidad». Si bien las configuraciones de tal rama de unicidad son de equilibrio (según lo afirmado en el teorema 3.3), cabe la pregunta de si serán, además, configuraciones finitamente estables en el sentido definido en 1.3. La configuración $\mathscr{C}(0) = \mathscr{C}_0$ es ciertamente de equilibrio estable, ya que las hipótesis 3.1 expresan la adecuada propiedad de minimización que define la estabilidad finita. Parece así razonable conjeturar una «continuidad» del carácter de mínimo respecto a la variable q, de modo que la estabilidad se extendiese del valor $q = 0$, a todo un entorno del mismo. Tal extensión comportaría un razonamiento casi trivial si la familia de funcionales en la variable q se minimizase en un espacio de dimensión finita. En espacios de dimensión infinita, puede no verificarse lo que la intuición razonable nos sugiera, como muestra el siguiente sencillo ejemplo de un funcional F, en el espacio de Hilbert l^2 de las sucesiones reales de cuadrado sumable; sea F definido así:

$$\forall \bar{x} \in l^2 \quad \forall q \in R \quad F(\bar{x}, q) = \sum_{K=1}^{\infty} K^{-1/2} x_K^2 + q \sum_{K=1}^{\infty} (-1)^K x_K^2 \qquad [57]$$

de modo que se comprueba sin dificultad que, para cada q real, el elemento $\bar{x} = \bar{0}$ anula la primera variación de F, pero sólo corresponde a un mínimo para el valor aislado $q = 0$.

A continuación probaremos que nuestro caso no participa de la propiedad singular del ejemplo precedente y que el funcional U definido por [17], [27] en la variedad [18], [19] alcanza en ella una «rama local» de configuraciones finitamente estables, que prolonga con continuidad la configuración $\mathscr{C}_0$ asociada al valor $q = 0$. Para ello desarrollaremos un método, cuya idea de fondo es similar a la del criterio suficiente de mínimo, de la positividad fuerte de la variación segunda, pero cuya técnica de detalle habrá de cambiarse para remediar dos insuficiencias. La primera debida a que nuestro funcional U no es libre, sino ligado por las condiciones isoperimétricas [18], [19]. La segunda dificultad reside en que la variación segunda de U no resulta fuertemente positiva, si se adopta la norma [38] en el espacio $\hat{B}$. Si para salvar ese obstáculo, se adopta en $\hat{B}$ la norma derivada del producto escalar típico (de integral del producto de dos funciones y/o sus derivadas) se encuentra que el subconjunto $\hat{D}$ de [40] no es abierto y carece de elementos interiores; con lo que el criterio mencionado de la variación segunda deja, asimismo, de tener validez. Pasamos a desarrollar la prueba anunciada, en una serie de proposiciones sucesivas.

4.1. Proposición

Sean $A(s)$, $\varphi(s)$ y $A(s) + \delta A(s)$, $\varphi(s) + \delta\varphi(s)$ dos parejas pertenecientes a la variedad M' definida por:

$$M' = \left\{(A, \varphi) \in C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1] \mid x(s_1) - x(s_0) + iy(s_1) - iy(s_0) = \right.$$
$$\left. = \int_{s_0}^{s_1} (1 + A(s)) \exp i(\varphi(s) - f(s))\, ds \right\} \qquad [58]$$

y definimos en M' la norma típica, que notaremos $\| \ \|$, por la fórmula:

$$\forall\, (A, \varphi) \in C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1] \quad \|(A, \varphi)\| = \text{máx}\,\{|A(s)| \mid s \in [s_0, s_1]\} +$$
$$+ \text{máx}\,\{|\varphi(s)| + |\varphi'(s)| \mid s \in [s_0, s_1]\} \qquad [59]$$

Existen en tal caso, números reales a, d estrictamente positivos, de modo que cuando se verifica la acotación en norma:

$$\|(\delta A(s), \delta\varphi(s))\| < d \qquad [60]$$

También se verifica entonces:

$$\int_{s_0}^{s_1} |\delta\varphi(s)|^2\, ds \leqslant \int_{s_0}^{s_1} (|\delta A(s)|^2 + |\delta\varphi'(s)|^2)\, ds \qquad [61]$$

Para la demostración suponemos como en [47], que $x(s_1) - x(s_0)$ no es cero y, en tal caso, escribimos la diferencia:

$$\Delta = (1 + A(s) + \delta A(s))\, \text{sen}\,(\varphi(s) + \delta\varphi(s) - f(s)) -$$
$$- (1 + A(s))\, \text{sen}\,(\varphi(s) - f(s)) \qquad [62]$$

por medio del teorema del incremento finito. En el caso alternativo de que $y(s_1) - y(s_0)$ no fuese cero, escribiríamos la diferencia análoga a la Δ, pero con la función coseno en vez de seno. La fórmula de los incrementos finitos indica:

$$\Delta(s) = \delta A(s) \operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s)) + \delta\varphi(s)(1 + A(s)) \cos(\varphi(s) - f(s)) + R_2(s) \quad [63]$$

El resto R_2 satisface, según reglas del Cálculo elemental, una acotación del tipo:

$$|R_2(s)| < \frac{1}{2}\eta((\delta A(s))^2 + (\delta\varphi(s))^2) \quad [64]$$

donde el coeficiente η depende de los valores $A(s)$, $\delta A(s)$, $\varphi(s)$, $\delta\varphi(s)$, pero es acotado si éstos los son. Elegimos, por ejemplo, $d = 1$ y suponemos se verifica [60], con lo que la acotación de η es (una vez que $A(s)$, $\varphi(s)$ están fijadas) uniforme en s. Llamemos $2K$ a la cota uniforme de $|\eta|$ e integremos la [63], teniendo en cuenta que la [58] implica que $\Delta(s)$ tiene integral nula. En la integración descomponemos $\delta\varphi(s)$ como suma de $\delta\varphi(s_0)$ y la integral en (s_0, s) de la derivada $\delta\varphi'(\sigma)$. Las [58] y [64] permiten, junto con un manejo elemental de la desigualdad de Schwarz, deducir de la integral de [63] la desigualdad siguiente:

$$|x(s_1) - x(s_0)||\delta\varphi(s_0)| \leqslant \sqrt{|s_1 - s_0|}\,||\delta A(s)|| + |s_1 - s_0|\,||\delta\varphi'(s)|| \times$$
$$\times\, ||1 + A(s)|| + K(||\delta A(s)||^2 + ||\delta\varphi(s)||^2) \quad [65]$$

donde la norma denotada $|| \; ||$ es la típica del espacio $L^2(s_0, s_1)$. Por otra parte, puede utilizarse la igualdad:

$$\delta\varphi(s) = \delta\varphi(s_0) + \int_{s_0}^{s} \delta\varphi'(\sigma)\, d\sigma \quad [66]$$

para establecer (con auxilio de la desigualdad de Schwarz) la desigualdad siguiente:

$$||\delta\varphi(s)||^2 \leqslant 4|s_1 - s_0||\delta\varphi(s_0)|^2 + 4|s_1 - s_0|^2||\delta\varphi'(s)||^2 \quad [67]$$

Puede ahora elegirse d en [60] para que $\delta A(s)$, $\delta\varphi'(s)$ tengan norma L^2 menor que, por ejemplo, la unidad y, al mismo tiempo se verifique:

$$4|s_1 - s_0|K|\delta\varphi(s_0)| < \frac{1}{2}|x(s_1) - x(s_0)| \quad [68]$$

con lo que una sustitución de [67] en el último sumando de [65] implicaría:

$$\frac{1}{2}|x(s_1) - x(s_0)||\delta\varphi(s_0)| \leqslant (K + \sqrt{|s_1 - s_0|})||\delta A(s)|| +$$
$$+ (|s_1 - s_0|\,||1 + A(s)|| + 4K|s_1 s_0|^2)||\delta\varphi'(s)|| \quad [69]$$

de modo que ahora puede despejarse $|\delta\varphi(s_0)|$ de esta última desigualdad, para sustituir en [67] y obtener ya una desigualdad del tipo [61] que se pretendía demostrar.

4.2. Teorema

Existe un número real $t > 0$, de modo que las funciones $A(s, q)$, $\varphi(s, q)$ definidas por el teorema 3.3 en [46] minimizan, para cada q en el intervalo $(-t, t)$, el funcional U definido por:

$$\forall\,(A, \varphi) \in C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1] \qquad U(A, \varphi) = \int_{s_0}^{s_1} W(A(s), \varphi'(s), s)\,ds + \\ + q\int_{s_0}^{s_1} Q(s)(1 + A(s))\operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s))\,ds \qquad [70]$$

en la variedad M' definida por [58] y donde $Q(s)$ está definida según [33]. El mínimo alcanzado en la citada pareja de funciones es un mínimo relativo aislado, según la norma dada por [59].

En efecto, definamos para cada q en $(-r, r)$ el funcional V según la fórmula:

$$\forall\,(A, \varphi) \in C[s_0, s_1] \times C^1[s_0, s_1] \qquad V = \tilde{V}(A, \varphi) + \\ + \mu(q)\left[x(s_0) - x(s_1) + \int_{s_0}^{s_1}(1 + A(s))\cos(\varphi(s) - f(s))\,ds\right] + \\ + \nu(q)\left[\int_{s_0}^{s_1}(1 + A(s))\operatorname{sen}(\varphi(s) - f(s))\,ds + y(s_0) - y(s_1)\right] \qquad [71]$$

donde $\mu(q)$, $\nu(q)$ son las funciones definidas por [46]. Evaluemos el incremento $\Delta(s)$de la función subintegral que define $\tilde{V}$ al reemplazar $A(s)$, $\varphi(s)$ primero por $A(s, q)$, $\varphi(s, q)$ definidas en [46] y después por estas mismas funciones, respectivamente, incrementadas en $\delta A(s)$, $\delta\varphi(s)$. Aplicamos la fórmula de los incrementos infinitos hasta el orden dos de derivación abreviando la notación $A(s, q)$ por $A_*(s)$ y la $\varphi(s, q)$ por $\varphi_*(s)$ y resulta:

$$\Delta(s) = \delta A(s)\frac{\partial W}{\partial A}(A_*(s), \varphi'_*(s), s) + \delta\varphi'(s)\frac{\partial W}{\partial B}(A_*(s), \varphi'_*(s), s) + \\ + \delta A(s)\{(q\dot{Q}(s) - \nu(q))\operatorname{sen}(\varphi_*(s) - f(s)) - \mu(q)\cos(\varphi_*(s) - f(s))\} + \\ + \delta\varphi(s)(1 + A_*(s))\{(qQ(s) - \nu(q))\cos(\varphi_*(s) - f(s)) + \\ + \mu(q)\operatorname{sen}(\varphi_*(s) - f(s))\} + R(s) \qquad [72]$$

donde $R(s)$ tiene la típica expresión de Lagrange, en base a la forma cuadrática asociada a las derivadas segundas, computadas en un cierto «punto intermedio» (A_i, φ_i) que se define, para cada valor de s, por una igualdad de la forma:

$$(A_i(s), \varphi_i(s)) = (A(s, q), \varphi(s, q)) + \theta(s)(\delta A(s), \delta\varphi(s)) \quad [73]$$

donde $\theta(s)$ es <1, >0.

Si integramos en (s_0, s_1) la [72], el primer miembro proporciona el incremento del funcional $\tilde{V}$, mientras que el segundo miembro sólo contribuye con la integral de $R(s)$, como muestra un sencillo cálculo que tenga encuenta las ecuaciones [31] y [32] de Euler-Lagrange. Resulta así:

$$\tilde{V}(A_* + \delta A, \delta_* + \delta\varphi) - \tilde{V}(A_*, \varphi_*) = \int_{s_0}^{s_1} R(s)\, ds \quad [74]$$

La expresión explícita del resto $R(s)$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} R(s) = {} & (\delta A(s))^2(\partial^2 W/\partial A^2) + 2(\delta A(s))(\delta\varphi'(s))(\partial^2 W/\partial A \partial B) + \\ & + (\delta\varphi'(s))^2(\partial^2 W/\partial B^2) + 2(\delta A(s))(\delta\varphi(s))\{(qQ(s) - v(q)) \times \\ & \times \cos(\varphi_i(s) - f(s)) + \mu(q)\operatorname{sen}(\varphi_i(s) - f(s))\} + (\delta\varphi(s))^2(1 + A_i(s)) \times \\ & \times \{(v(q) - qQ(s))\operatorname{sen}(\varphi_i(s) - f(s)) + \mu(q)\cos(\varphi_i(s) - f(s))\} \end{aligned} \quad [75]$$

donde las derivadas parciales segundas de la función W están valoradas, para cada s, en la terna $A_i(s)$, $\varphi_i'(s)$, s. Veamos ahora que $R(s)$ puede acotarse inferiormente, para lo que definimos el compacto K_d de R^3 como sigue:

$$K_d = \{(A, B, s) \in R^2 \times [s_0, s_1] \,\big|\, |A + A_*(s)| + |B + \varphi_*'(s)| \leqslant d\} \quad [76]$$

donde d tiene parecido significado que en [60] y puede elegirse suficientemente pequeño para que K_d sea interior a $(-1, +\infty) \times R \times [s_0, s_1]$, lo que comporta (cuenta habida de la positividad de la hessiana de W y la compacidad de K_d) la existencia de un $c > 0$, de modo que la suma de los *tres* primeros términos que definen $R(s)$ se acota inferiormente por:

$$c(\delta A(s))^2 + c(\delta\varphi'(s))^2, \quad c \in R^+ \quad [77]$$

Los restantes sumandos que definen $R(s)$, alcanzan un total cuyo módulo se prueba sencillamente estar acotado superiormente por la función:

$$4L(|v(q)| + |q|Q_1 + |\mu(q)|)[(\delta A(s))^2 + (\delta\varphi(s))^2] \quad [78]$$

donde L y Q_1 son reales positivos elegidos así:

$$Q_1 = \text{máx}\,\{|Q(s)| \,\big|\, s \in [s_0, s_1]\} \quad L = \text{máx}\,\{1 + |A| \,\big|\, (A, b, s) \in K_d\} \quad [79]$$

En definitiva, de las [74] y [75] y las acotaciones ahora descritas se deduce:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(A_* + \delta A, \varphi_* + \delta\varphi) - \tilde{V}(a_*, \varphi_*) \geqslant {} & c\|\delta A(s)\|^2 + c\|\delta\varphi'(s)\|^2 - \\ & - 4L(|v(q)| + |q|Q_1 + |\mu(q)|)\{\|\delta A(s)\|^2 + \|\delta\varphi(s)\|^2\} \end{aligned} \quad [80]$$

donde las normas expresadas son las de $L^2(s_0, s_1)$. Si ahora suponemos que no sólo el par $A_*(s)$, $\varphi_*(s)$ pertenece a la variedad M' de [58], sino que también ello sucede para el par $A_*(s) + \delta A(s)$, $\varphi_*(s) + \delta\varphi(s)$, resulta en tal caso aplicable la [61] y podemos escribir la [80] como sigue:

$$\tilde{V}(A_* + \delta A, \varphi_* + \delta\varphi) - \tilde{V}(A_*, \varphi_*) = \frac{c}{2}\|\delta A(s)\|^2 + \frac{2}{2}\|\delta\varphi'(s)\|^2 + \frac{c}{2a}\|\delta\varphi(s)\|^2 -$$

$$- m(q)\{\|\delta A(s)\|^2 + \|\delta\varphi(s)\|^2\} \qquad [81]$$

donde $m(q)$ es una función positiva cuyo límite es cero si $q \to 0$. Se deduce de esta última circunstancia la existencia de un $t > 0$ suficientemente pequeño, de modo que para todo q en el intervalo $(-t, t)$ la desigualdad última implique esta otra:

$$\tilde{V}(A_* + \delta A, \varphi_* + \delta\varphi) - \tilde{V}(A_*, \varphi_*) \geqslant \frac{c}{4}\|\delta A(s)\|^2 + \frac{c}{4a}\|\delta\varphi(s)\|^2 \qquad [82]$$

Lo que expresa que $\tilde{V}$ alcanza en la variedad M' de [58] un mínimo aislado para el par $A_*(s)$, $\varphi_*(s)$. Pero esto es exactamente lo afirmado por el teorema 4.2 que queríamos demostrar, ya que la fórmula [71] prueba que los funcionales $\tilde{V}$ y U coinciden en su restricción a la variedad M'.

BIBLIOGRAFIA

AKHIEZER, N. I.: *The calculus of variations.* Blaisdell, Nueva York, 1962.

ANTMAN, S. S.: *Journal of Math., and Mech.*, *20*, 281-302.

——: *Handbuch der Physic*, vol. VI a/2, pp. 641-703. Springer-Verlag, Heidelberg, 1972.

ANTMAN, S. S., y BREZIS, H.: *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium*, vol. II, pp. 1-29, Ed. R. J. Knops. Pitman, Londres, 1978.

CHILOW, G.: *Analyse mathématique. Fonctions de plusieurs variables réelles.* Mir, Moscú, 1975.

GARBAYO, E.: «Tesis doctoral». Universidad Complutense, Madrid, 1982.

RUDIN, W.: *Functional analysis.* McGraw-Hill, Nueva York, 1973.

SOBOLEV, S. L.: *Applications of Functional Analysis.* American Mathematical Society, Rhode Island, 1963.