Infragradientes y direcciones de decrecimiento

Por J. M. GUTIÉRREZ DÍEZ

Recibido.: 5 de mayo de 1982

Presentado por el académico numerario Manuel Valdivia Ureña

Summary

The concept of infragradient, a generalization of that of subgradient, is introduced. Its main properties, and the diferences and relations between infragradients and subgradients, are stated. It is proved that, if $f : D \longrightarrow R$ is a convex function, where D is a convex set in a locally convex space, then the polar of the cone of directions of decreasing of f at $\bar{x} \in D^i$ is the cone (containing the origin) spanned by the infragradients of f at $\bar{x}$.

Resumen

Se introduce el concepto de infragradiente, como generalización del de subgradiente. Se establecen sus principales propiedades, y las diferencias y relación entre infragradientes y subgradientes. Se demuestra que, si $f\colon D \longrightarrow R$ es una función convexa, donde D es un conjunto convexo en un espacio localmente convexo, entonces el polar del cono de direcciones de decrecimiento de f en $\bar{x} \in D^i$ coincide con el cono (conteniendo al origen) generado por los infragradientes de f en $\bar{x}$.

1. PRELIMINARES. CONCEPTO DE INFRAGRADIENTE

Los espacios vectoriales que utilizamos aquí están definidos sobre elcuerpo R de los números reales. Sea W un conjunto en un espacio vectorial L. Entonces W^i es el interior algebraico de W y W^a la clausura algebraica. $M(W)$ es la variedad afín generada por W; $K(W)$ es el cono generado por W, y $K'(W) \equiv K(W) \cup \{0\}$. Sea una función $f\colon W \longrightarrow R$. Si $\alpha \in R$, denotamos:

$$T(f, \alpha) \equiv \{x \in W \,/\, f(x) \leqslant \alpha\}$$
$$T^{<}(f, \alpha) \equiv \{x \in W \,/\, f(x) < \alpha\}$$
$$\Xi(f, \alpha) \equiv \{x \in W \,/\, f(x) = \alpha\}$$

Si $\bar{x} \in W$, entonces el conjunto de direcciones de decrecimiento de f en $\bar{x}$ es:

$$D_f^{\leqslant}(\bar{x}) = \{d \in L : \exists\, \gamma > 0 \mid (\bar{x} + vd) \in W \wedge f(\bar{x} + vd) \leqslant f(\bar{x}), \quad \forall\, v \in]0, \gamma[\}$$

De manera análoga se define el conjunto $D_f^{<}(\bar{x})$ de direcciones de descenso de f en $\bar{x}$.

En todo lo que sigue, $E[\Omega]$ es un espacio vectorial topológico y $F[\Omega]$ un espacio vectorial topológico localmente convexo. Además, C y D son conjuntos convexos en $E[\Omega]$ y $F[\Omega]$, respectivamente. Se seguirá la notación y terminología de [4].

Sea $f: U \longrightarrow R$ una función y sea $\bar{x} \in U$, donde U es un conjunto en $E[\Omega]$. Un elemento ξ de E' es un subgradiente de f en $\bar{x}$ si:

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \xi(x - \bar{x}), \quad \forall\, x \in U$$

El subdiferencial de f en $\bar{x}$, es el conjunto de los subgradientes de f en $\bar{x}$, al cual se denota $\partial f(\bar{x})$.

Introducimos a continuación el concepto de infragradiente, que es una generalización del de subgradiente.

Definición 1. Sea $f: U \longrightarrow R$ una función y sea $\bar{x} \in U$, donde U es un conjunto en $E[\Omega]$. Decimos que un elemento ξ de E' es un infragradiente de f en $\bar{x}$ si:

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \xi(x - \bar{x}), \quad \forall\, x \in U \,/\, f(x) \leqslant f(\bar{x})$$

Llamamos infradiferencial de f en $\bar{x}$, denotado $\delta f(\bar{x})$, al conjunto de los infragradientes de f en $\bar{x}$.

Evidentemente:

$$\partial f(\bar{x}) \subset \delta f(\bar{x})$$

Proposición 1. Sea $f: U \longrightarrow R$ una función y sea $\bar{x} \in U$, donde U es un conjunto en $E[\Omega]$. Sea $p \in E'$. Considérese la aplicación afín $h(x) = f(\bar{x}) + p(x - \bar{x})$. Entonces:

$$p \in \delta f(\bar{x}), \quad \text{si y sólo si,} \quad \{(x, v) \in epi(f) \mid v \leqslant f(\bar{x})\} \subset epi(h)$$

La proposición anterior establece una interpretación geométrica de los infragradientes.

Proposición 2. Sea $f: U \longrightarrow R$ una función y sea $\bar{x} \in U$, donde U es un conjunto en $E[\Omega]$. Entonces:

i) $\delta f(\bar{x})$ es convexo.
ii) $\delta f(\bar{x})$ es algebraicamente cerrado.
iii) Si $E[\Omega]$ es localmente convexo, entonces $\delta f(\bar{x})$ es débilmente cerrado.

Demostración. Sea $z \in T(f, f(\bar{x}))$. Considérese el conjunto:

$$Q_z \equiv \{\Phi \in E' \,/\, \Phi(z - \bar{x}) \leqslant f(z) - f(\bar{x})\}$$

Es inmediato que Q_z es convexo y algebraicamente cerrado. Además, si $E(\Omega]$

es localmente convexo, Q_z es débilmente cerrado. Basta tener en cuenta ahora que:

$$\delta f(\bar{x}) = \bigcap_{z \in T(f, f(\bar{x}))} Q_z \qquad \text{q.e.d.}$$

Proposición 3. Sea $f: U \longrightarrow R$ una función y sea $\bar{x} \in U$, donde U es un conjunto en $E[\Omega]$. Sea $\xi \in \delta f(\bar{x})$. Entonces:

$$\tau\xi \in \delta f(\bar{x}), \quad \forall\, \tau \geqslant 1$$

Demostración. Se tiene que:

$$O \geqslant f(x) - \mathrm{f}(\bar{x}) \geqslant \xi(x - \bar{x}), \quad \forall\, x \in T(f, f(\bar{x}))$$

En consecuencia:

$$f(x) - f(\bar{x}) \geqslant (\tau x)(x - \bar{x}), \quad \forall\, x \in T(f, f(\bar{x})), \ \forall\, \tau \geqslant 1 \qquad \text{q.e.d.}$$

2. INFRAGRADIENTES Y SUBGRADIENTES. TEOREMAS DE EXISTENCIA DE INFRAGRADIENTES

De la proposición 3 deducimos, si $\delta f(\bar{x}) \not\subset \{0\}$, que $\delta f(\bar{x})$ no es acotado (ver párrafo 15.6 en [4]), y consecuentemente que no es compacto. En contraste con esto, si $f: D \longrightarrow R$ es una función continua y convexa y si $\bar{x} \in \operatorname{int}(D)$, entonces $\partial f(\bar{x})$ es débilmente compacto (ver [5]).

Otra diferencia, más relevante, entre infragradientes y subgradientes se plantea a continuación.

Observación 1. Considérese una función $f: U \longrightarrow R$ y un punto $\bar{x} \in U$, donde U es un conjunto en $E[\Omega]$. Sea $\xi \in \delta f(\bar{x})$, $\xi \neq 0$. Por definición de infragradiente:

$$O \geqslant f(x) - f(\bar{x}) \geqslant \xi(x - \bar{x}), \quad \forall\, x \in T(f, f(\bar{x}))$$

Concluimos que $\Xi(\xi, \xi(\bar{x}))$ es un hiperplano soporte cerrado de $T(f, f(\bar{x}))$ en $\bar{x}$.

La observación anterior asocia de forma natural un hiperplano soporte cerrado de $T(f, f(\bar{x}))$ en $\bar{x}$ a cada infragradiente no nulo de f en $\bar{x}$. Ante esto surge la pregunta de si se puede recíprocamente asociar un infragradiente no nulo de f en $\bar{x}$ a cada hiperplano soporte cerrado de $T(f, f(\bar{x}))$ en $\bar{x}$. El teorema 1 proporciona una respuesta positiva a esta pregunta, suponiendo que $f: C \longrightarrow R$ sea convexa y que $\bar{x} \in C^i$.

Lema 1. Sea $f: U \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in C$. Supóngase que:

$$\exists\, h \in E' \Big/ \begin{array}{l} h(x) \leqslant h(\bar{x}), \quad \forall\, x \in T(f, f(\bar{x})) \\ \exists\, x_0 \in C \,/\, h(x_0) > h(\bar{x}) \end{array}$$

Entonces:

i) $\exists\, \lambda > 0 \,/\, \lambda h \in \delta f(\bar{x})$.

ii) Si además $h(x_0) > h(\bar{x}) + f(x_0) - f(\bar{x})$, entonces en i) se puede tomar $\lambda \in]0, 1[$

Demostración. i) Se tiene que $x_0 \notin T(f, f(\bar{x}))$, con lo cual $f(x_0) > f(\bar{x})$. Sea:

$$\lambda \equiv \frac{f(x_0) - f(\bar{x})}{h(x_0 - \bar{x})}$$

Se cumple que $\lambda > 0$.

Hemos de demostrar:

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \lambda h(x - \bar{x}), \quad \forall\, x \in T(f, f(\bar{x})) \qquad [1]$$

Supongamos que [1] no se cumple. Entonces:

$$\exists\, x_1 \in T(f, f(\bar{x})) \,/\, f(x_1) < f(\bar{x}) + \lambda h(x_1 - \bar{x}) \qquad [2]$$

Puesto que $f(x_1) \leqslant f(\bar{x}) < f(x_0)$, tenemos:

$$\exists\, \eta \in]0, 1] \,/\, \eta f(x_1) + (1 - \eta) f(x_0) = f(\bar{x}) \qquad [3]$$

Consideramos ahora:

$$y_\eta \equiv \eta x_1 + (1 - \eta) x_0 \qquad [4]$$

Con ello, teniendo en cuenta [3] y la convexidad de f, $y_\eta \in T(f, f(\bar{x}))$. Luego:

$$h(y_\eta) \leqslant h(\bar{x}) \qquad [5]$$

Nuestro propósito es contradecir [5]. Multiplicando en [2] por $\eta\lambda^{-1}$, tenemos que:

$$\eta h(x_1 - \bar{x}) + \eta\lambda^{-1}(f(\bar{x}) - f(x_1)) > 0 \qquad [6]$$

Además, por [3]:

$$\eta(f(\bar{x}) - f(x_1)) = (1 - \eta)(f(x_0) - f(\bar{x})) \qquad [7]$$

De [6] y [7] obtenemos que:

$$\eta h(x_1 - \bar{x}) + (1 - \eta)\lambda^{-1}(f(x_0) + f(\bar{x})) > 0 \qquad [8]$$

Sustituyendo en [8] el valor de λ:

$$\eta h(x_1) + (1 - \eta) h(x_0) > h(\bar{x})$$

En consecuencia, teniendo en cuenta [4], concluimos que $h(y_n) > h(\bar{x})$. Esta expresión contradice [5]. Luego la asunción [2] es falsa, y [1] se cumple.

ii) El resultado se sigue de la manera en que hemos definido λ, q.e.d.

Teorema 1. Sea $f: C \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in C^i$. Supóngase que:

$$\exists\, h \in E',\ h \neq 0, /\ h(x) \leqslant h(\bar{x}), \quad \forall\, x \in T(f, f(\bar{x}))$$

Entonces:

$$\exists\, \lambda > 0 \,/\, \lambda h \in \delta f(\bar{x})$$

Demostración. Puesto que $h \neq 0$, existe $b \in E$ tal que $h(b) > 0$. Además, existe $\alpha > 0$ tal que $(\bar{x} + \alpha b) \in C$. Sea $x_0 \equiv \bar{x} + \alpha b$. Por linealidad de h, se tiene que $h(x_0) > h(\bar{x})$. Considérese ahora el lema 1 i), q.e.d.

Corolario 1. Sea $f: C \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in C^i$. Denotamos:

$$A(\bar{x}) = \{\{v\xi \,/\, v > 0\} \,/\, \xi \in \delta f(\bar{x}),\ \xi \neq 0\}$$
$$B(\bar{x}) \equiv \{H/H \text{ es un hiperplano soporte cerado de } T(f, f(\bar{x})) \text{ en } \bar{x}\}$$

Supóngase que $M(T(f, f(\bar{x})) = E$. *Entonces la función* $\Phi: A(\bar{x}) \longrightarrow B(\bar{x})$ definida por:

$$\Phi(\{v\xi \,/\, v > 0\}) \equiv \Xi(\xi, \xi(\bar{x}))$$

es una función biyectiva.

Demostración. En virtud de la observación 1, la función Φ está bien definida.

Vamos a ver que Φ es inyectiva. Sean ξ_1 y ξ_2 infragradientes no nulos de f en $\bar{x}$. Supongamos que $\Xi(\xi_1, \xi_1(\bar{x})) = \Xi(\xi_2, \xi_2(\bar{x}))$. Hemos de probar:

$$\exists\, \gamma > 0 \,/\, \xi_2 = \gamma \xi_1 \qquad [9[$$

Es inmediato que $\Xi(\xi_1, 0) = \Xi(\xi_2\ 0)$. En consecuencia (ver [3]):

$$\exists\, \gamma_0 \in R,\ \gamma_0 \neq 0, /\ \xi_2 = \gamma_0 \xi_1 \qquad [10]$$

Para que [9] se cumpla, basta ver que $\gamma_0 > 0$. Supongamos que $\gamma_0 < 0$. Por la observación 1:

$$\xi_1(x) \leqslant \xi_1(\bar{x}), \quad \forall\, x \in T(f, f(\bar{x})) \qquad [11]$$
$$\xi_2(x) \leqslant \xi_2(\bar{x}), \quad \forall\, x \in T(f, f(\bar{x})) \qquad [12]$$

De [12], teniendo en cuenta [10], obtenemos:

$$\xi_1(x) \geqslant \xi_1(\bar{x}), \quad \forall\, x \in T(f, f(\bar{x})) \qquad [13]$$

Por [11] y [13] concluimos:

$$T(f, f(\bar{x})) \subset \Xi(\xi_1, \xi_1(\bar{x}))$$

lo cual está en contradicción con que $M(T(f, f(\bar{x}))) = E$. *Luego* $\gamma_0 > 0$, y Φ es inyectiva.

Finalmente, a partir del teorema 1 es inmediato que Φ es suprayectiva, q.e.d.

El teorema 1 establece una propiedad de los infragradientes que no es compartida por los subgradientes, como muestra el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo 1. Sea $f: R \longrightarrow R$ una función definida por:

$$f(x) \equiv \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Tenemos que f es convexa, y si tomamos que h es la identidad y que $x = 0$, entonces se satisfacen las hipótesis del teorema 1. Supóngase ahora que:

$$\exists\, \lambda > 0 \,/\, \lambda h \in \delta f(\bar{x}) \qquad [14]$$

Puesto que f es diferenciable, y la diferencial de f en $\bar{x}$ es la función nula, se tiene que $\partial f(\bar{x}) = \{0\}$ (ver teorema 25.1 en [8]). Luego $\lambda h = 0$, lo cual es contradictorio. En consecuencia, [14] es falso.

Sea $f: C \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in C$. Hemos considerado hasta ahora disparidades entre $\delta f(\bar{x})$ y $\partial f(\bar{x})$. Sin embargo, si f no toma mínimo en $\bar{x}$, existe una estrecha relación entre $\delta f(\bar{x})$ y $\partial f(\bar{x})$ (teorema 2).

Lema 2. Sea $f: C \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in C$. Sea $\xi \in \delta f(\bar{x})$. Supóngase que $\xi \notin \partial f(\bar{x})$. Entonces:

$$\exists\, \lambda \in \,]0, 1[\, / \, \lambda\xi \in \delta f(\bar{x})$$

Demostración. Puesto que $\xi \notin \partial f(\bar{x})$ y $\xi \in \delta f(\bar{x})$:

$$\exists\, x_0 \in C \,/\, 0 < f(x_0) - f(\bar{x}) < \xi(x_0 - \bar{x})$$

Teniendo en cuenta la observación 1, considérese ahora el lema 1, q.e.d.

Observación 2. Sea $f: U \longrightarrow R$ una función y sea $\bar{x} \in U$, donde U es un conjunto en $E[\Omega]$. Entonces las tres proposiciones que siguen son equivalentes:

i) f toma mínimo en $\bar{x}$.
ii) $0 \in \partial f(\bar{x})$.
iii) $0 \in \delta f(\bar{x})$.

Teorema 2. Sea $f: C \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in C$. Supóngase que f no toma mínimo en $\bar{x}$. Entonces:

$$\delta f(x) = \bigcup_{\tau \geqslant 1} \tau \partial f(\bar{x})$$

Demostración. En virtud de la proposición 3:

$$\bigcup_{\tau \geqslant 1} \tau \partial f(\bar{x}) \subset \delta f(\bar{x})$$

Vamos a probar la inclusión contraria. Sea $\xi \in \delta f(\bar{x})$. Considérese:

$$\gamma \equiv \inf \{v > 0 \mathbin{/} v\xi \in \delta f(\bar{x})\}$$

Es evidente que $\gamma \in [0, 1]$. Puesto que $\delta f(\bar{x})$ es algebraicamente cerrado (proposición 2), se cumple que $\gamma\xi \in \delta f(\bar{x})$. Además tenemos que $\gamma > 0$ (en efecto: si $\gamma = 0$, entonces $0 \in \delta f(\bar{x})$; con lo cual, por la observación 2, f tomaría mínimo en $\bar{x}$).

Vamos a ver que:

$$\gamma\xi \in \partial f(\bar{x}) \qquad [15]$$

Supongamos que [15] no se cumple. Entonces, por el lema 2:

$$\exists\ \lambda \in]0, 1[\mathbin{/} (\lambda\gamma)\xi \in \delta f(\bar{x})$$

lo cual contradice la definición de γ. Luego [15] es cierto. Concluimos que:

$$\xi \in \bigcup_{\tau \geqslant 1} \tau \partial f(\bar{x}) \qquad \text{q.e.d.}$$

Corolario 2. Sea $f: C \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in C$. Supóngase que f no toma mínimo en $\bar{x}$. Entonces:

$$K(\delta f(\bar{x})) = K(\partial f(\bar{x}))$$

Como se vio, el teorema 1 no es predicable, en general, para subgradientes. Sin embargo, sí que lo es si se asume que f no toma mínimo en $\bar{x}$.

Corolario 3. Sea $f: C \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in C^i$. Supóngase que f no toma mínimo en $\bar{x}$, y que:

$$\exists\ h \in E',\ h \neq 0, \mathbin{/} h(x) \leqslant h(\bar{x}), \quad \forall\ x \in T(f, f(\bar{x}))$$

Entonces:

$$\exists\ \lambda > 0 \mathbin{/} \lambda h \in \partial f(\bar{x})$$

Demostración. Considérense los teoremas 1 y 2, q.e.d.

Si se hubiera supuesto que f es continua, se hubiera podido deducir el corolario anterior del teorema de los multiplicadores de Lagrange para funciones convexas (ver [2]).

Proposición 4. Sea $f: U \longrightarrow R$ una función y sea $\bar{x} \in U$, donde U es un conjunto en $E[\Omega]$. Entonces f toma mínimo en $\bar{x}$, si y sólo si, $\delta f(\bar{x})$ es un cono no vacío.

Demostración. Si $\delta f(\bar{x})$ es un cono no vacío, entonces, por la proposición 2 y la observación 2, f toma mínimo en $\bar{x}$.

Recíprocamente, supóngase que f toma mínimo en $\bar{x}$. Por la observación 2, $\delta f(\bar{x}) \neq 0$. Para todo $\xi \in \delta f(\bar{x})$ se tiene que:

$$\tau\xi \in \delta f(\bar{x}), \quad \forall\, \tau > 0 \qquad [16]$$

En efecto: si $\tau \geqslant 1$, entonces [16] se cumple en virtud de la proposición 3; y si $\tau \in]0, 1[$, [16] se cumple por la convexidad de $\delta f(\bar{x})$, q.e.d.

Sea $f: C \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in C$. El teorema 1 es un teorema de existencia de infragradientes sujetos a una condición adicional (pertenecer al cono generado por cierto elemento de E'). Nos planteamos ahora el problema general de existencia de infragradientes, esto es, las condiciones bajo las cuales $\delta f(\bar{x}) \neq 0$. El teorema 3 establece la equivalencia de este problema con el de existencia de subgradientes.

La existencia de subgradientes es una cuestión ya estudiada. El principal resultado es debido a Minty (ver [5]), y establece que $\partial f(\bar{x})$ es no vacío si f es continua en $\bar{x} \in \operatorname{int}(C)$.

Teorema 3. Sea $f: C \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in C$. Entonces:

$$\delta f(\bar{x}) \neq 0 \Leftrightarrow \partial f(\bar{x}) \neq 0$$

Demostración. Considérese la observación 2 y el teorema 2, q.e.d.

3. RELACION ENTRE INFRAGRADIENTES Y DIRECCIONES DE DECRECIMIENTO

Teorema 4. Sea $f: D \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in D^i$. Entonces:

$$(D_f^{\leqslant}(\bar{x}))^0 = K'(\delta f(\bar{x}))$$

Demostración. Es sencillo probar (ver [1]) que:

$$D_f^{\leqslant}(\bar{x}) = K(T(f, f(\bar{x})) - \bar{x})$$

Basta ahora que veamos:

$$(K(T(f, f(\bar{x})) - \bar{x}))^0 = K'(\delta f(\bar{x}))$$

Sea $d \in (K(T(f, f(\bar{x})) - \bar{x})^0$. Basta considerar el caso en que $d \neq 0$. En virtud del teorema 1:

$$\exists \lambda > 0 \,/\, \lambda d \in \delta f(\bar{x})$$

con lo cual $d \in K'(\delta f(\bar{x}))$. Recíprocamente, sea $h \in K'(\delta f(\bar{x}))$, $h \neq 0$. Evidentemente:

$$\exists \eta > 0, \ \exists \xi \in \delta f(\bar{x}), \ \xi \neq 0, / h = \eta \xi$$

Por la observación 1:

$$\xi(x - \bar{x}) \leqslant 0, \quad \forall x \in T(f, f(\bar{x}))$$

y con ello $h \in (K(T(f, f(\bar{x})) - \bar{x})^0$ q.e.d.

Si asumimos que f no toma mínimo en $\bar{x}$, podemos introducir $D_f^<(\bar{x})$ y $\partial f(\bar{x})$ en el enunciado del teorema anterior.

Corolario 4. Sea $f : D \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in D^i$. Supóngase que f no toma mínimo en $\bar{x}$. Entonces:

$$(D_f^<(\bar{x}))^0 = (D_f^\leqslant(\bar{x}))^0 = K'(\delta f(\bar{x})) = K'(\partial f(\bar{x}))$$

Demostración. Es inmediato que:

$$(D_f^<(\bar{x}))^0 = (D_f^\leqslant(\bar{x}))^0$$

(véase, por ejemplo, [1]). Considérese ahora el teorema 4 y el corolario 2, q.e.d.

Corolario 5. Sea $f : D \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in \text{int}\,(D)$. Supóngase que f es continua en $\bar{x}$. Entonces:

$$(D_f^\leqslant(\bar{x}))^0 = \bigcup_{\tau \geqslant 0} \tau \delta f(\bar{x})$$

Demostración. Considérese el teorema de existencia de subgradientes de Minty (ver [5]), y los teoremas 3 y 4, q.e.d.

Corolario 6. Sea $f : D \longrightarrow R$ una función convexa y sea $\bar{x} \in \text{int}\,(D)$. Supóngase que f es continua en $\bar{x}$, y que f no toma mínimo en $\bar{x}$. Entonces:

$$(D_f^\leqslant(\bar{x}))^0 = \bigcup_{\tau \geqslant 0} \tau \partial f(\bar{x})$$

El corolario 6 fue ya establecido para espacios normados por Pshenichnyi (ver [6] y [7]).

BIBLIOGRAFIA

[1] GUTIÉRREZ, J. M.: *Relación entre conos de direcciones decrecientes y conos de direcciones de descenso.* «Trab. Est. Inv. Oper.» (sometido).

[2] HOLMES, R.: *A Course on Optimization and Best Approximation.* Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer, 1972.

[3] JAMESON, G. J. O.: *Topology and Normed Spaces.* Londres, Chapman & Hall, 1974.

[4] KÖTHE, G.: *Topological Vector Spaces I.* Berlín-Heidelberg-Nueva York, Springer, 1969.

[5] MINTY, G.: *On the monotonicy of the gradient of a convex function.* «Proc. J. Math.», *14*, 243-247, 1964.

[6] PSHENICHNYI, B.: *Convex programing in a normed space.* «Cybernetics», *5*, 46-57, 1965 (traducido del ruso).

[7] PSHENICHNYI, B.: *Necessary Conditions for an Extremum.* Nueva York, Dekker, 1971 (traducido del ruso).

[8] ROCKAFELLAR, T.: *Convex Analysis.* Princeton (Nueva Jersey), Princeton University Press, 1970.

Facultad de Matemáticas.
Universidad de Valencia