# Un método numérico para la resolución de ecuaciones con varios términos no lineales. Aplicación a un problema de flujo de gas en un conducto

Por ALFREDO BERMÚDEZ DE CASTRO

Recibido: 7 de octubre de 1981.

Presentado por el académico numerario P. Alberto Dou.

**Resumen**

En este artículo se introduce un algoritmo para la resolución de ecuaciones funcionales con varios términos no lineales. Se trata de un proceso iterativo y en cada etapa es preciso resolver una ecuación lineal. A modo de ejemplo, el algoritmo se aplica a la resolución de una ecuación parabólica doblemente no lineal, que se utiliza como modelo del flujo de un gas a baja presión en un conducto.

**Abstract**

In this paper an iterative algorithm for solving functional equations with several nonlinearities is given. At each step a linear equation has to be solved. As an example, the algorithm is applied to calculate the solution of a partial differential equation with two nonlinear terms. This equation has been used as a model for low pressure gas flow in a pipe.

## 1. INTRODUCCION

Sean $V$, $E_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ espacios de Hilbert reales, $A$ un operador lineal, acotado, monótono de $V$ en $V'$, $B_i$ operadores lineales acotados de $E_i$ en $V'$ $(i = 1, \ldots, m)$, $G_i$ operadores maximales monótonos en $E_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ y $\alpha_i$ números reales positivos $(i = 1, \ldots, m)$.

En este artículo se estudia un método numérico para resolver la ecuación:

$$Ay + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i B_i G_i(\Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y) \in f \qquad [1.1]$$

donde $\Lambda_{E_i}$ designa el isomorfismo canónico de $E_i$ en $E_i'$.

El algoritmo propuesto puede utilizarse para resolver el problema:

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta(u) - \sigma\frac{\partial}{\partial x}\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = g \quad \text{en} \quad [0, L] \times [0, T] \qquad [1.2]$$

$$-\sigma\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)\right) = h(t) \quad \text{en} \quad [0, T] \qquad [1.3]$$

$$u(L, t) = l(t) \quad \text{en} \quad [0, T] \qquad [1.4]$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en} \quad ]0, L[ \qquad [1.5]$$

donde $\beta(\lambda) = \lambda|\lambda|^{-\frac{1}{2}}$.

Estas ecuaciones modelizan el flujo a baja presión de un gas en un conducto (Bamberger *et al.*, Sorine y Soulas). En la sección 4 presentamos los resultados numéricos obtenidos para este problema.

## 2. DESCRIPCION DEL ALGORITMO

Sean $\omega_i$ números reales, $\omega_i > 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Si $y$ es solución de la ecuación [1.1] deberán existir elementos $q_i \in E_i$ tales que

$$q_i \in G_i(\Lambda_{E_i}^{-1}B_i^* y) - \omega_i \Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y \quad (i = 1 \ldots, m) \qquad [2.1]$$

y además,

$$Ay + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \omega_i B_i \Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i B_i q_i = f \qquad [2.2]$$

Recíprocamente, si existen $y \in V$ y $q_i \in E_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ verificando [2.1] y [2.2] entonces $y$ es solución de [1.1].

Por otra parte [2.1] equivale a (Bermúdez y Moreno, 1981):

$$q_i = (G_i)_{\lambda_i}^{\omega_i}(\Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y + \lambda_i q_i) \quad (i = 1, \ldots, m) \qquad [2.3]$$

para todo $\lambda_i$ positivo tal que $\lambda_i \omega_i < 1$.

En [2.3] $(G_i)_{\lambda_i}^{\omega_i}$ designa la aproximación Yosida del operador $(G_i)^{\omega_i} = G_i - \omega_i I_i$, es decir,

$$(G_i)_{\lambda_i}^{\omega_i} = \frac{I_i - (J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i}}{\lambda_i} \qquad [2.4]$$

donde

$$(J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i} = (I_i + \lambda_i (G_i)^{\omega_i})^{-1} \qquad [2.5]$$

se denomina resolvente de $(G_i)^{\omega_i}$.

Para todos estas definiciones relativas a los operadores maximales monótonos se podrá consultar (Brézis, 1973) o (Pazy, 1971).

En virtud de las consideraciones anteriores, la ecuación [1.1] equivale al conjunto de las ecuaciones [2.2] y [2.3]. Esta nueva formulación conduce a considerar el siguiente algoritmo:

Se parte de $q_i^0 \in E_i(i = 1, \ldots, m)$ cualesquiera. En la iteración $n$-sima, conocidos $y^{n-1}$ y $q_i^n(i = 1, \ldots, m)$ se determinan $y^n$, $q_i^{n+1}(i = 1, \ldots, m)$, tales que:

$$Ay^n + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \omega_i B_i \Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y^n + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i B_i q_i^n = f \qquad [2.6]$$

$$q_i^{n+1} = (G_i)_{\lambda_i}^{\omega_i}(\Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y^n + \lambda_i q_i^n) \quad i = 1, \ldots, m \qquad [2.7]$$

*Observación* 2.1. El interés del algoritmo descrito reside en el hecho de que la ecuación [2.6] es lineal y el operador $A + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \omega_i B_i \Lambda_{E_i}^{-1} B_i^*$ no depende de $n$. Por otra parte, en la mayoría de las aplicaciones los operadores $(G_i)_{\lambda_i}^{\omega_i}$ se pueden determinar explícitamente. Tal es el caso del problema mencionado en la introducción.

*Observación* 2.2. Para $m = 1$ y $\alpha_1 = 1$, el algoritmo [2.6]-[2.7] ha sido introducido en (Bermúdez y Moreno, 1981), donde se aplica a la resolución de inecuaciones variacionales que aparecen en problemas de plasticidad. Otras aplicaciones pueden encontrarse en (Saguez y Larrecq, 1979), (Bermúdez y Moreno, 1980) y (Bermúdez y Viaño, 1981).

## 3. CONVERGENCIA

En esta sección supondremos que la ecuación [1.1] tiene al menos una solución, y probaremos un resultado de convergencia para el algoritmo [2.6]-[2.7].

Previamente una definición. Se dice que un operador $G$ en un espacio de Hilbert $E$ verifica la hipótesis $H$ si cuando

$$x_n,\ x \in D(G),\ z_n \in Gx_n,\ z \in Gx,\ \{z_n\} \text{ acotada,}$$

$$(H)\ \{x_n\} \longrightarrow \bar{x} \text{ débilmente en } E \text{ y } (z_n - z, x_n - x) \longrightarrow 0$$

$$\text{necesariamente } x = \bar{x}$$

*Proposición* 3.1. Sea $\lambda_i = \dfrac{1}{2\omega_i}(i = 1, \ldots, m)$. Supongamos que se cumple una de las siguientes hipótesis:

i) A es coercivo.
ii) Existe $j$, $1 \leqslant j \leqslant m$ tal que $B_j \Lambda_{E_j}^{-1} B_j^*$ es un isomorfismo de $V$ en $V'$, $G_j$ verifica $(H)$ y es unívoco sobre $\Lambda_{E_j}^{-1} B_j^* y$ (siendo $y$ la solución de [1.1]).

Entonces se tiene:

*a*) Las sucesiones $\{q_i^n\}_{n \in N}$ $1 \leqslant i \leqslant m$ son acotadas.
*b*) $\{y^n\}$ converge a $y$ en $V$ con la topología fuerte [si se verifica i)] o débil [si se verifica ii)].

*Demostración:* Utiliza las ideas contenidas en (Bermúdez y Moreno, 1980) y especialmente el siguiente resultado:

*Lema* 3.1. Sea $G$ un operador maximal monótono en un espacio de Hilbert $E$. Sean $\lambda$ y $\omega$ números no negativos tales que $\lambda\omega \leqslant \frac{1}{2}$. Entonces se tiene:

$$|G_\lambda^\omega(x_1) - G_\lambda^\omega(x_2)|^2 \leqslant |G_\lambda^\omega(x_1) - G_\lambda^\omega(x_1)|^2 + \frac{1}{\lambda^2}|J_\lambda^\omega(x_1) - J_\lambda^\omega(x_2)|^2 +$$

$$+ \frac{2}{\lambda}(G_\lambda^\omega(x_1) - G_\lambda^\omega(x_2), J_\lambda^\omega(x_1) - J_\lambda^\omega(x_2)) = \frac{1}{\lambda^2}|x_1 - x_2|^2$$

$$\text{para } x_1, x_2 \in E \qquad [3.1]$$

La demostración de este lema puede verse en (Bermúdez y Moreno, 1980).

Mediante [3.1] no es difícil obtener a partir de [2.3] y [2.7] lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\lambda_i}{2}|q_i^{n+1} - q_i|_{E_i}^2 \leqslant \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\lambda_i}{2}|q_i^{n+1} - q_i|_{E_i}^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^m |(J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i}(\Lambda_{E_i}^{-1}B_i^* y^n + \lambda_i q_i^n) - (J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i}(\Lambda_{E_i}^{-1}B_i^* y + \lambda_i q_i)|_{E_i}^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \alpha_i(q_i^{n+1} - q_i, (J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i}(\Lambda_{E_i}^{-1}B_i^* y^n + \lambda_i q_i^n) - (J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i}(\Lambda_{E_i}^{-1}B_i^* y + \lambda_i q_i^n))_{E_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{2\lambda_i}|B_i^* y^n - B_i^* y|_{E_i'}^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_i(B_i^* y^n - B_i^* y, q_i^n - q_i)_{E_i'E_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\lambda_i}{2}|q_i^n - q_i|_{E_i}^2 \qquad [3.2]$$

Por otra parte, restando [2.2] de [2.6] se obtiene:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i(B_i^* y^n - B_i^* y, q_i^n - q_i)_{E_i'E_i} = -(A(y^n - y), y^n - y) -$$

$$- \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{2\lambda_i}|B_i^* y^n - B_i^* y|_{E_i'}^2 \qquad [3.3]$$

Utilizando esta expresión en [3.2] resulta:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\lambda_i}{2} |q_i^{n+1} - q_i|_{E_i}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\lambda_i}{2} |q_i^{n+1} - q_i|_{E_i}^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left( q_i^{n+1} + \frac{1}{2\lambda_i} (J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i} (\Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y^n + \lambda_i q_i^n) - q_i - \right.$$

$$- \frac{1}{2\lambda_i} (J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i} (\Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y + \lambda_i q_i), (J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i} (\Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y^n + \lambda_i q_i^n) -$$

$$\left. - (J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i} (\Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y + \lambda_i q_i) \right) = -(A(y^n - y), y^n - y) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\lambda_i}{2} |q_i^n - q_i|^2 \tag{3.4}$$

De la desigualdad precedente se deduce el carácter monótono decreciente de la sucesión:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\lambda_i}{2} |q_i^n - q_i|^2 \right\}_{n \in N}$$

y, por tanto, su convergencia.

Pasando ahora al límite en [3.4] se obtiene:

$$\{A(y^n - y), y^n - y)\} \to 0 \tag{3.5}$$

$$\left\{ \left( q_i^{n+1} + \frac{1}{2\lambda_i} (J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i} (\Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y^n + \lambda_i q_i^n) - q_i - \right. \right.$$

$$- \frac{1}{2\lambda_i} (J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i} (\Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y + \lambda_i q_i), (J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i} (\Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y^n + \lambda_i q_i^n) -$$

$$\left. \left. - (J_i)_{\lambda_i}^{\omega_i} (\Lambda_{E_i}^{-1} B_i^* y + \lambda_i q) \right) \right\} \to 0 \tag{3.6}$$

Si $A$ es coercivo entonces [3.5] implica la convergencia fuerte de la sucesión $\{y^n\}$ a $y$.

Alternativamente, supongamos ahora que se verifica la hipótesis ii). Vamos a probar en primer lugar, que se tiene,

$$\{(J_j)_{\lambda_j}^{\omega_j} (\Lambda_{E_j}^{-1} B_j^* y^n + \lambda_j q_j^n)\} \to \Lambda_{E_j}^{-1} B_j^* y, \quad \text{débilmente en } E_j \tag{3.7}$$

y

$$\{q_j^n\} \to G_j(\Lambda_{E_j}^{-1} B_j^* y) - \omega_j \Lambda_{E_j}^{-1} B_j^* y, \quad \text{débilmente en } E_j \tag{3.8}$$

En efecto, sea $\bar{x}$ un punto de acumulación débil de la sucesión acotada $\{(J_j)^{\omega_j}_{\lambda_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y^n + \lambda_j q_j^n)\}_{n\in N}$. Existirá una subsucesión convergente a $\bar{x}$, sea:

$$\{(J_j)^{\omega_j}_{\lambda_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y^{n_r} + \lambda_j q_j^{n_r})\}_{r\in N}$$

Se definen los elementos $x_r$, $z_r$, $x$, $z$ del siguiente modo:

$$x_r = (J_j)^{\omega_j}_{\lambda_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y^{n_r} + \lambda_j q_j^{n_r}) \tag{3.9}$$

$$z_r = q^{n_r+1} + \omega_j (J_j)^{\omega_j}_{\lambda_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y^{n_r} + \lambda_j q_j^{n_r}) \tag{3.10}$$

$$x = (J_j)^{\omega_j}_{\lambda_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y + \lambda_j q_j) = \Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y \tag{3.11}$$

$$z = q_j + \omega_j (J_j)^{\omega_j}_{\lambda_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y + \lambda_j q_j) \tag{3.12}$$

se tiene entonces:

$$x_r,\ x \in D(G_j),\ z_r \in G_j(x_r),\ \{z_r\} \text{ acotada},\ z \in Gx$$

y

$$\{(z_r - z, x_r - z)\} \longrightarrow 0 \quad (\text{por } [3.6])$$

Por consiguiente, como $G_j$ satisface la hipótesis $(H)$, se deduce:

$$\bar{x} = (J_j)^{\omega_j}_{\lambda_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y + \lambda_j q_j)$$

Con objeto de obtener [3.8] vamos a probar que $G_j(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y) - \omega_j \Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y$ es el único punto de acumulación débil de la sucesión $\{q_j^{n_r}\}$.

En efecto, sea $\bar{q}$ un punto de acumulación débil de $\{q_j^n\}$ y $\{q_j^{n_r}\}_{r\in N}$ una subsucesión tal que

$$\{q_j^{n_r}\} \longrightarrow \bar{q} \quad \text{débilmente en } E_j \tag{3.13}$$

Se tiene entonces la siguiente situación:

$$q_j^{n_r} + \frac{1}{2\lambda_j}(J_j)^{\omega_j}_{\lambda_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y^{n_r-1} + \lambda_j q_j^{n_r-1}) \in G_j((J_j)^{\omega_j}_{\lambda_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y^{n_r-1} + \lambda_j q_j^{n_r-1})) \tag{3.14}$$

$$q_j^{n_r} + \omega_j (J_j)^{\omega_j}_{\lambda_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y^{n_r-1} + \lambda_j q_j^{n_r-1}) \longrightarrow \bar{q} + \omega_j \Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y \tag{3.15}$$

débilmente en $E_j$.

$$(J_j)^{\omega_j}_{\lambda_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y_j^{n_r-1} + \lambda_j q_j^{n_r-1}) \longrightarrow \Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y \tag{3.16}$$

débilmente en $E_j$.

$$(q_j^{n_r} + \omega_j(J_j)_{\lambda_j}^{\omega_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y^{n_r-1} + \lambda_j q_j^{n_r-1}), (J_j)_{\lambda_j}^{\omega_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y^{n_r-1} + \lambda_j q_j^{n_r-1})) \rightarrow$$

$$\rightarrow (\bar{q} + \omega_j\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y, \Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y) \qquad [3.17]$$

(esto último se deduce de [3.6]).

De [3.14]-[3.17] se deduce, utilizando un resultado bien conocido de operadores maximales monótonos (Brézis, 1973, prop. 2.5), la igualdad:

$$\bar{q}_j + \omega_j\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y = G_j(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y) \qquad [3.18]$$

y por consiguiente:

$$\{q_j^n\} \rightarrow G(\Lambda_{E_j}^{-1}B^* y) - \omega_j\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y \qquad [3.19]$$

Finalmente, [2.7] y la definición [2.4] implican

$$\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y^n = \lambda_j(q_j^{n+1} - q_j^n) + (J_j)_{\lambda_j}^{\omega_j}(\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y + \lambda_j q_j^n) \qquad [3.20]$$

lo cual, junto con los resultados ya obtenidos, prueba que

$$\{\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y^n\} \rightarrow \Lambda_{E_j}^{-1}B_j^* y \quad \text{débilmente en } E_j \qquad [3.21]$$

de donde se deduce la convergencia débil de la sucesión $\{y^n\}$ a $y$, puesto que $B_j\Lambda_{E_j}^{-1}B_j^*$ es un isomorfismo.

## 4. RESULTADOS NUMERICOS

En esta sección se utiliza el algoritmo [2.6]-[2.7] para resolver el problema [1-2]-[1.5].

Estas ecuaciones han sido obtenidas por (Bamberger *et al.)* a partir de otras que modelizan el flujo a baja presión de un gas en un conducto. En (Bamberger *et al.)* puede encontrarse un estudio teórico, así como un método para la resolución numérica que emplea el algoritmo de Newton.

Supondremos en adelante que en [1.4] la función $l$ es idénticamente nula. Tal situación puede conseguirse realizando una translación adecuada.

Una vez que la formulación variacional de las ecuaciones [1.2]-[1.5] se semidiscretiza en la variable tiempo, mediante un esquema implícito, se obtiene ($k = \Delta t$):

$$\int_0^L \frac{\beta(u_{r+1}) - \beta(u_r)}{k} v\, dx + \sigma \int_0^L \beta\left(\frac{du_{r+1}}{dx}\right)\frac{dv}{dx}\, dx =$$

$$= \int_0^L g_{r+1} v\, dx + h_{r+1}v(0) \quad \text{para todo } v \in V \qquad [4.1]$$

donde $V$ es el espacio funcional definido por:

$$V = \{v \in H^1(0, L) : v(L) = 0\} \qquad [4.2]$$

Para cada $r$ fijo la ecuación [4.1] es del tipo [1.1] y corresponde a las elecciones:

$$A = 0 \quad ; \quad m = 2 \quad ; \quad E_1 = E_2 = L^2(0, L)$$

$$G_1(v)(x) = \beta(v(x)) \quad ; \quad G_2 = G_1$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{k} \quad ; \quad \alpha_2 = \sigma \qquad [4.3]$$

$$B_1 = \text{inyección de } L^2(0, L) \text{ en } V'$$

$$B_2^*(v) = \frac{dv}{dx}$$

y $f$ definida del siguiente modo:

$$(f, v)_{V'V} = \int_0^L \left(\frac{1}{k}\beta(u_r) + g_{r+1}\right) v\, dx + h_{r+1} v(0) \quad \text{para todo } v \in V \qquad [4.4]$$

Por consiguiente, el algoritmo [2.6]-[2.7] se escribe en este caso así:

— Sean $q_1^0$, $q_2^0$ funciones arbitrarias de $L^2(0, L)$.
— En el paso $n$-simo, conocidos $q_1^n$, $q_2^n$, se determinan $u_{r+1}^n$, $q_1^{n+1}$, $q_2^{n+1}$ de la forma siguiente: $u_{r+1}^n$ es la solución del problema lineal.

$$\frac{\omega_1}{k}\int_0^L u_{r+1}^n v\, dx + \omega_2\sigma \int_0^L \frac{du_{r+1}^n}{dx}\frac{dv}{dx} dx = -\frac{1}{k}\int_0^L q_1^n v\, dx$$

$$-\sigma \int_0^L q_2^n \frac{dv}{dx} dx + \int_0^L \left(\frac{1}{k}\beta(u_r) + g_{r+1}\right) v\, dx + h_{r+1} v(0) \quad \text{para todo } v \in V \qquad [4.5]$$

y a continuación

$$q_1^{n+1} = \beta_{\lambda_1}^{\omega_1}(u_{r+1}^n + \lambda_1 q_1^n) \qquad [4.6]$$

$$q_2^{n+1} = \beta_{\lambda_2}^{\omega_2}\left(\frac{du_{r+1}^n}{dx} + \lambda_2 q_2^n\right) \qquad [4.7]$$

donde

$$\beta_\lambda^\omega(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{\lambda}{1-\lambda\omega}\right)^2 + 4\dfrac{x}{1-\lambda\omega}} - \dfrac{\lambda + 2\omega x}{1-\lambda\omega}}{2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{\lambda}{1-\lambda\omega}\right)^2 - 4\dfrac{x}{1-\lambda\omega}} + \dfrac{\lambda - 2\omega x}{1-\lambda\omega}}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \quad [4.8]$$

Nótese que [4.5] es la fórmulación variacional del problema lineal:

$$\frac{\omega_1}{k}u_{r+1}^n - \omega_2\sigma\frac{d^2u_{r+1}^n}{dx^2} = -\frac{1}{k}q_1^n + \sigma\frac{dq_2^n}{dx} + \frac{1}{k}\beta(u_r^n) + g_{r+1} \quad [4.9]$$

$$-\omega_2\sigma\frac{du_{r+1}^n}{dx}(0) - \sigma q_2^n(0) = h_{r+1} \quad [4.10]$$

$$u_{r+1}^n(L) = 0 \quad [4.11]$$

Por otra parte, teniendo en cuenta [2.1] se tiene:

$$\beta(u_{r+1}^n) = q_1 + \omega_1 u_{r+1}^n \quad [4.12]$$

así como

$$\sigma\beta\left(\frac{du_{r+1}^n}{dx}\right) = \sigma\left(q_2 + \omega_2\frac{du_{r+1}^n}{dx}\right) \quad [4.13]$$

En [4.12] y [4.13] los términos del primer miembro tienen un significado físico preciso: $\beta(u_{r+1}^n)$ es la presión y $\sigma\beta\left(\frac{du_{r+1}^n}{dx}\right)$ es el flujo. De este modo las igualdades [4.12] y [4.13] dan un método para calcularlos como subproducto de [4.5]-[4.7].

Para probar el algoritmo [4.5]-[4.7] se han tomado los siguientes datos:

$$L = 1 \quad ; \quad v = 1 \quad ; \quad g(x, t) = \frac{x+1}{2\sqrt{t+1}} - \frac{t+1}{\sqrt{2(t+1)(x+1)}}$$

$$h(t) = -\sqrt{2t+2}$$

$$l(t) = 4(t+1)$$

$$u_0(x) = (x+1)^2$$