La propiedad de Radon-Nikodym del dual de un espacio localmente convexo (*)

Por BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Recibido: 2 de marzo de 1983[6].

Abstract

In this paper we extend the Kou's theorems for the duals of infrabarreled spaces and other locally convex spaces. In particular we prove that if the space E is infrabarreled and E' is its strong dual and the subspace generated by each equicontinuous subset of E' is isomorphic to a subspace of a l.c.s. weakly compactly generated by seminorms, then E' has the strong Radon-Nikodym property. Thys question has been treated before in [10] by us, where we obtained theorems less general than the results proved here.

En este trabajo vamos a extender los teoremas de Kuo [5] para los duales de espacios infratonelados y otros espacios localmente convexos. En particular, demostraremos en el corolario 12 que, si E es un espacio infratonelado y E' su dual fuerte y si el subespacio engendrado por cada subconjunto equicontinuo de E' es isomorfo a un subespacio de un e.l.c. débilmente compactamente generado por seminormas (definición 5), E' posee la propiedad de Radon-Nikodyn fuerte (definición 1). Esta cuestión la hemos tratado también en [10], donde obtuvimos teoremas menos generales que los que probamos aquí.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finito que supondremos completo para asegurar que existe un lifting ρ sobre el álgebra $\mathscr{L}^{\infty}_{K}$ de las funciones reales o complejas medibles acotadas. Sea E un espacio localmente convexo, en abreviatura e.l.c., que supondremos siempre Hausdorff, y E'' el bidual dotado de la topología natural.

Sea $m : \Sigma \longrightarrow E$ una medida vectorial y:

$$A_S(m) = \left\{\frac{m(A)}{\mu(A)} : S \supset A \in \Sigma^+\right\}$$

para $S \in \Sigma^+$, siendo:

$$\Sigma^+ = \{A \in \Sigma : \mu(A) > 0\}$$

1. *Definición.* Un e.l.c. E se dice que tiene la *propiedad de Radon-Nikodym*, en abreviatura PRN, si para todo espacio de medida finito (Ω, Σ, μ) y toda medida vectorial $m : \Sigma \longrightarrow E$ controlada por μ, en el sentido de que es μ-continua y $A_\Omega(m)$ es acotado, existe una función acotada $f : \Omega \longrightarrow E''$ $\bar{\mu}$-integrable o integrable Grothendieck: $f \in \overline{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E'')$ (véase [6], [7] y [8]), que verifica:

$$m(A) = \int_A f d\mu \; (= m_f(A))$$

para todo $A \in \Sigma$. En el caso que dicha función acotada se pueda elegir siempre de modo que $f \in \overline{\mathscr{L}}(\Sigma, \mu, E)$, e.d. $f(\Omega) \subset E$, se dice que E posee la *PRN fuerte.*

2. Teorema. *Sea E un e.l.c. y E' su dual dotado de una S-topologia separada tal que todos sus conjuntos acotados son débilmente* relativamente compactos. Entonces, si F es un subespacio débil* cerrado de E' que posee PRN, F posee PRN fuerte.*

Demostración. Basta proceder como en el teorema 4 [10].

3. *Definición.* Un subconjunto A de un e.l.c. E se dice *ω-precompacto* (o *separable por seminormas*) si, para todo entorno U de O en E, existe un conjunto contable $M \subset E$ tal que $A \subset M + U$.

4. Teorema. *Sea E un e.l.c. y E' su dual dotado de una S-topologia saturada y separada tal que E' es casi completo. Supongamos que, para todo acotado contable y no vacío $B_0 \in S$, el subespacio cerrado F engendrado por B_0 tiene la propiedad de que, si $T = T_F$ es la aplicación canónica $E' \longrightarrow F'$, la imagen $T(D)$ de todo subconjunto acotado D de E' es un subconjunto equicontinuo de F'. Entonces E' posee PRN si, y sólo si, cada uno de dichos espacios F tiene la propiedad de que todo subconjunto equicontinuo de F' es ω-precompacto cuando se dota a F' de una S_F-topologia tal que $B_0 \in S_F \subset S$.*

Demostración. Resulta del teorema 7 [12].

5. *Definición.* Un e.l.c. E se dice *débilmente compactamente generado por seminormas*, en abreviatura WCGS, si para todo entorno absolutamente convexo U de 0, E_U es WCG (débilmente compactamente generado).

Es claro que todo e.l.c. WCG es WCGS y que todo e.l.c.ω-precompacto es WCGS ya que un e.l.c. E es ω-precompacto si, y sólo si, cada uno de dichos espacios E_U es separable.

6. *Definición.* Un espacio compacto Hausdorff E es un *Eberlein compacto* si es homeomorfo a un subconjunto débilmente compacto de un espacio de Banach.

Por el teorema de Eberlein, E es secuencialmente compacto si es Eberlein compacto. Es bien conocido que todo espacio Eberlein compacto separable es metrizable.

7. Lema. *Un espacio de Banach E es WCG si, y sólo si, si la bola unidad cerrada $B_{E'}$ de E' es un espacio Eberlein compacto para la topologia débil*.*

Demostración. Véase, Amir y Lidenstrauss [1].

8. Teorema. *Sea E un e.l.c. y E' su dual dotado de una S-topologia saturada y separada tal que E' es casi completo. Supongamos que, para todo acotado contable y no vacío $B_0 \in S$, el subespacio cerrado F engendrado por B_0 tiene la propiedad de que, si $T = T_F$ es la aplicación canónica $E' \longrightarrow F'$ la imagen $T(D)$ de todo acotado D de E' es un subconjunto equicontinuo de F'. Entonces, si todo subconjunto débilmente* compacto de E'' es Eberlein compacto para la topologia débil*, E' posee PRN.*

Demostración. Nos basaremos en el teorema 4. Sean B_0 y F como arriba y S_F la colección de todos los subconjuntos acotados separables $B \in S$ de F. Siendo $B \subset F$ separable la bipolar $B_{F''}$ de B en F'' es débilmente* separable. Sea $J : F \longrightarrow E$ la aplicación inclusión, entonces $J^{**} : F'' \longrightarrow E''$ es un isomorfismo. Por tanto, $B_{E''} = J^{**}(B_{F''})$ es débilmente* separable. Como $B_{E''}$ es también débilmente* compacto, $B_{E''}$ es Eberlein compacto para la topología débil*. Como además $B_{E''}$ es separable, $B_{E''}$ es metrizable. Esto implica entonces que $B_{F''}$ es metrizable y, por tanto, que $F'_V = (F')_V$ es separable cuando V es el conjunto polar de B en F'. Entonces F' es ω-precompacto y, por el teorema 4, resulta que E' posee *PRN*.

9. Corolario. *Sea E un espacio infratonelado y E' su dual fuerte. Entonces, si todo subconjunto débilmente* compacto de E'' es Eberlein compacto para la topología débil*, E' posee PRN fuerte.*

Demostración. Resulta de los teoremas 2 y 8.

10. Corolario. *Sea E un e.l.c. y E' su dual fuerte casi completo. Supongamos que, para todo acotado contable y no vacío B_0 de E, el subespacio cerrado F engendrado por B_0 es infratonelado. Entonces, si todo subconjunto débilmente* compacto de E'' es Eberlein compacto para la topología débil*, E' posee PRN.*

Demostración. Resulta del teorema 8.

11. Teorema. *Sea E un e.l.c. y E' su dual, dotado de una S-topología saturada y separada tal que E' es casi completo. Supongamos que, para todo acotado contable y no vacío $B_0 \in S$, el subespacio cerrado F engendrado por B_0 tiene la propiedad de que, si $T = T_F$ es la aplicación canónica $E' \longrightarrow F'$, la imagen $T(D)$ de todo subconjunto acotado D de E' es un subconjunto equicontinuo de F'. Entonces, si el subespacio engendrado por cada subconjunto equicontinuo de E' es isomorfo a un subespacio de un e.l.c. WCGS G, E' posee PRN.*

Demostración. Utilizaremos el teorema 4. Sean B_0, F y $T = T_F$ como arriba y V un entorno absolutamente convexo de O en F. Entonces, existe un entorno absolutamente convexo U de O en E tal que $U \cap F = V$. $M = E'_{U^0} = (E')_{U^0}$ se puede considerar como un subespacio de un e.l.c. WCGS G. Sea S_F la colección de todos los subconjuntos acotados separables $B \in S$ de F, y U'_0 y V'_0 los conjuntos polares de B en E' y F', respectivamente. Sea W un entorno absolutamente convexo de O en G tal que:

$$W \cap M = U'_0 \cap M = U'.$$

Sea $X = M_{U'}$, $Z = G_W$ y J la aplicación inyectiva $X \longrightarrow Z$, entonces $J^* : Z' \longrightarrow X'$ es sobreyectiva. Como U' es el conjunto polar de $\pi(B)$ en M, donde π es la aplicación canónica $E \longrightarrow E_U$, que es separable en E_U, la bola unidad $B_{X'} = (U')^0$ de X' es débilmente* separable. Sea (x'_n) una sucesión débilmente* densa en $B_{X'}$. Siendo $J^*(Z') = X'$, por el teorema de la aplicación abierta existe una sucesión acotada (z'_n) en Z' tal que $J^*(z'_n) = x'_n$. Sea C la clausura débil* del conjunto $\{z'_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por hipótesis el espacio de

Banach $\hat{Z}$ es WCG y por el lema 7 la bola unidad cerrada $B_{Z'}$ es Eberlein compacto para la topología débil* y, por tanto, también C es Eberlein compacto. Esto con la separabilidad de C implica que C es un espacio métrico compacto para la topología débil*. $J^*(C)$ ($\subset B_{X'}$) es entonces débilmente* compacto y contiene a (x'_n), luego $J^*(C) = B_{X^\circ}$. Siendo $B_{X'}$ imagen continua de un espacio métrico compacto, $B_{X'}$ es un compacto metrizable para la topología débil* y, por consiguiente, $X = M_{U'}$ es separable.

Por el teorema de Hahn-Banach, $T(U^0) = V^0$ para $T = T_F$ y, por tanto:

$$N = T(M) = F'_{V^0}.$$

Como además:

$$\begin{aligned} T(U') &\subset T(U'_0) \cap T(M) \\ &\subset V'_0 \cap N = V', \end{aligned}$$

T induce una aplicación continua $M_{U'} \longrightarrow N_{V'}$. Entonces $N_{V'}$ es separable y, por consiguiente, existe un conjunto contable $L \subset F'$ tal que:

$$V^0 \subset F'_{V^0} \subset L + V'_0$$

donde $V'_0 = B^0$ es el conjunto polar de B en F'. Por tanto, todo conjunto equicontinuo V^0 de F' es ω-precompacto y, por el teorema 4, resulta que E' posee PRN.

Obsérvese que el teorema se puede extender al caso de que cada espacio $(E'_U)_{U'} = M_{U'}$ sea subespacio de un espacio normado WCG Z.

12. Corolario. *Sea E un espacio infratonelado y E' su dual fuerte. Entonces, si el subespacio engendrado por cada subconjunto equicontinuo de E' es isomorfo a un subespacio de un e.l.c. WCGS, E' posee PRN fuerte.*

Demostración. Resulta de los teoremas 2 y 11.

13. Corolario. *Sea E un e.l.c. y E' su dual fuerte casi completo. Supongamos que, para todo acotado contable y no vacío B_0 de E, el subespacio cerrado F engendrado por B_0 es infratonelado. Entonces, si el subespacio engendrado por cada subconjunto equicontinuo de E' es isomorfo a un subespacio de un e.l.c. WCGS, E' posee PRN.*

Demostración. Resulta del teorema 11.

14. Lema. *Sea F un subespacio cerrado de un e.l.c. E, y F'' y E'' los biduales respectivos dotados de las topologías naturales. Entonces, si E''/E es ω-precompacto, F''/F es ω-precompacto.*

Demostración. En primer lugar, vamos a probar que, si J es la aplicación inclusión $F \longrightarrow E$ y $J^{**} : F'' \longrightarrow E''$, se tiene:

$$(J^{**})^{-1}(E) = F$$

cuando se consideran E y F como subespacios de E'' y F'', respectivamente.

En efecto, si:

$$y'' \in (J^{**})^{-1}(E) \subset F''$$

y x' pertenece al conjunto ortogonal $F^{\perp}$ de F en E', resulta $J^{**}(y'') = x \in E$, $J^{*}(x') = 0$ y:

$$\langle x, x' \rangle = \langle y'', J^{*}(x') \rangle = 0$$

para todo $x' \in F^{\perp}$ y, por tanto, $x \in F^{\perp\perp} = J^{**}(F)$ por ser $J(F)$ un subespacio cerrado de E. Luego:

$$F \subset (J^{**})^{-1}(E) \subset (J^{**})^{-1}(F^{\perp\perp}) = F$$

y

$$(J^{**})^{-1}(E) = F.$$

Por otra parte, como $J^{**} : F'' \longrightarrow E''$ es un isomorfismo, si V es un entorno absolutamente convexo de O en F'', existe un entorno absolutamente convexo U de O en E'' tal que $(J^{**})^{-1}(U) \subset V$. Por tanto, si E''/E es ω-precompacto, existe un conjunto contable $L \subset E''$ que verifica:

$$J^{**}(F'') \subset E'' = L + E + U/2$$

y, por consiguiente, existe un conjunto contable $M \subset F''$ tal que:

$$J^{**}(F'') \subset J^{**}(M) + E + U,$$

de donde resulta:

$$\begin{aligned} F'' &= M + (J^{**})^{-1}(E) + V \\ &= M + F + V \end{aligned}$$

para todo entorno V de O en F'' y, por tanto, F''/F es ω-precompacto.

15. Teorema. *Sea E un espacio infratonelado, E' su dual fuerte y E'' su bidual dotado de la topología natural. Entonces si E''/E es ω-precompacto, E' posee PRN fuerte.*

Demostración. Nos basaremos en los teoremas 2 y 4. Sea B_0 un subconjunto acotado contable y no vacío de E, y F el subespacio cerrado engendrado por B_0. Si V es un entorno absolutamente convexo de O en F, sea V^0 el conjunto polar de V en F' y $\bar{V} = V^{00}$ el conjunto bipolar en F''.

Siendo E''/E ω-precompacto, F''/F *es* ω-precompacto según el lema 14. Entonces, para cada $n \in \mathbf{N}$, *existe un conjunto contable* $M_n'' \subset F''$ tal que:

$$F'' = M_n'' + F + \bar{V}/2n.$$

Como por otra parte F es separable, existe un conjunto contable $M_n \subset F$ tal que:

$$F = M_n + V/2n$$

y, por tanto:

$$F'' = (M_n + M_n'') + \bar{V}/n,$$

de donde se deduce que $F''_{\bar{V}} = (F'')_{\bar{V}}$ es separable y, por consiguiente, V^0 es separable y ω- precompacto. Luego, según los teoremas 2 y 4, E' posee PRN fuerte.

16. Teorema. *Sea E un espacio distinguido, E' su dual fuerte y E'' su bidual dotado de la topología natural. Entonces, si E''/E es ω-precompacto, E'' posee PRN fuerte.*

Demostración. Procederemos como anteriormente. Sea B_0 un subconjunto equicontinuo contable y no vacío de E', y F el subespacio cerrado engendrado por B_0. Dotemos a F' de la S_F-topología tal que S_F es la colección de los subconjuntos equicontinuos de F. Sea (x_n') una sucesión densa en F y $V = F \cap D^0$ un entorno de O en F, siendo D un acotado en E. Entonces existe una sucesión (x_{nk}) tal que:

$$x_{nk} \in D \quad \text{y} \quad |\langle x_{nk}, x_n'\rangle| \geqslant \left(1 - \frac{1}{k}\right) p_D(x_n'),$$

donde:

$$p_D(x') = \sup \{|\langle x, x'\rangle| : x \in D\}$$

para $x' \in E'$. De esto se deduce, si G es el subespacio cerrado de E engendrado por dicha sucesión (x_{nk}) y $A = G \cap D$, que:

$$p_D(x') = p_A(x')$$

para todo $x' \in F$.

Sea J_0 la aplicación inclusión $G \longrightarrow E$ entonces, si J es la restricción $J_0^* \mid F$ de $J_0^* : E' \longrightarrow G'$ a F, J es continua y se tiene:

$$J(V) = J_0^*(F \cap D^0) = J_0^*(F \cap A^0) = J_0^*(F) \cap J_0^*(A^0) = J(F) \cap A^0$$

donde las primeras polares se toman en E' y la última A^0 en G'. Por tanto, por el teorema de Hahn-Banach, se tiene:

$$V^0 = J^*(A^{00}) \subset J^*(G'').$$

Si $B \in S_F$ es absolutamente convexo y cerrado y $\bar{W}$ es el conjunto polar de $J(B) = J_0^*(B)$ en G'', $\bar{W}$ es un entorno de O en G''. Como E''/E es ω-precompacto, G''/G es ω-precompacto según el lema 14 y existe un conjunto contable $M'' \subset G''$ tal que:

$$G'' = M'' + G + \bar{W}/2.$$

Análogamente, siendo G separable y $\bar{W} \cap G$ un entorno de O en G, existe un conjunto contable $M \subset G$ tal que:

$$G \subset M + \bar{W}/2,$$

de donde resulta:

$$G'' = (M + M'') + \bar{W}.$$

Por consiguiente:

$$V^0 \subset J^*(G'') = J^*(M + M'') + J^*(\bar{W}) \subset M' + \bar{V},$$

donde $M' \subset F'$ es contable y $\bar{V}$ es el conjunto polar B^0 de B en F', puesto que:

$$J^*(\bar{W}) = J^*(J(B)^0) \subset B^0 = \bar{V}.$$

Por tanto, todo subconjunto equicontinuo de F' es ω-precompacto y de los teoremas 2 y 4 se deduce que E'' posee PRN fuerte, porque todos sus acotados son equicontinuos por ser E un espacio distinguido.

REFERENCIAS

[1] AMIR, D., y LINDENSTRAUSS, J.: «The structure of weakly compact sets in Banach spaces», *Ann. of Math.*, 88, 35-46, 1968.

[2] BLONDIA, C.: *Locally convex spaces with the Radon-Nikodym property.* (En curso de publicación.)

[3] CIVIN, P., y YOOD, B.: «Quasi-reflexive spaces», *Proc. Amer. math. Soc.*, 8, 906-911, 1957.

[4] DIESTEL, J., y UHL, J. J., JR.: «Vector Measures», *Math. Survey*, 15. *Amer. Math. Soc. Providence*, R. I., 1977.

[5] KUO, T.: «On conjugate Banach spaces with the Radon-Nikodym property», *Pacific J. Math.*, 59, 497-503, 1975.

[6] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: »Integración de funciones con valores en un espacio localmente convexo», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, 73, 361-387, 1979.

[7] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: «El teorema de Radon-Nikodym para las medidas con valores en un espacio localmente convexo», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, 74, 41-64, 1980.

[8] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: «La propiedad de Radon-Nikodym, σ-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexos», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, 74, 65-89, 1980

[9] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: «La propiedad de Radon-Nikodym, σ-dentabilidad y martingalas en espacios localmente convexos II», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, 78, 59-64, 1984.

[10] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: «Sobre el dual de un espacio localmente convexo con la propiedad de Radon-Nikodym I», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, 78, 77-83, 1984.

[11] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: «Sobre el dual de un espacio localmente convexo con la propiedad de Radon-Nikodym II», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid*, 78, 85-96, 1984.
[12] RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: «La propiedad de Radon-Nikodym del dual fuerte de un espacio infratonelado», *Rev. R. Acad. Ci. Madrid.* (En curso de publicación.)
[13] STEGALL, C.: «The Radon-Nikodym property in conjugate Banach spaces», *Trans. Amer. Math. Soc.*, 206, 213-223, 1975.
[14] UHL, J. J. JR.: «A note on the Radon-Nikodym property for Banach spaces», *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 17, 113-115, 1972.

Departamento de Teoría de Funciones.
Universidad Complutense de Madrid