Comunicaciones a la Academia

presentadas en las Sesiones Científicas celebradas en las fechas que se indican

Desarrollos asintóticos de funciones de Airy generalizadas (*)

MARÍA TERESA ULECIA GARCÍA

Departamento de Matemática Fundamental U N E D.

In this paper, we study the resolutions of the Airy's equation in general orders, which is solved in 1838 for a second order equation. We have worked with the steepest descents method and Laplace's method.

We explain the caso $n = 3$ and we give the results for a general n which are obtained by similar, but are complicated, calculations than the before case.

En 1838 el matemático inglés G. B. Airy estudia [1], en relación con un problema de óptica, las soluciones de la ecuación diferencial:

$$y''(\lambda) - \lambda y(\lambda) = 0$$

Esta ecuación lineal es un caso particular de la ecuación de Bessel [7].

La importancia de dichas funciones, tanto en matemática pura como en la aplicada, justifica un estudio autónomo de la ecuación, así como de sus generalizaciones [2], [3], [4], [5], [6], [8]. En esta comunicación se dan algunos resultados referentes a las ecuaciones que resultan de sustituir la derivada segunda por otras de orden superior; es decir:

$$y^{(n)}(\lambda) - \lambda y(\lambda) = 0 \quad \text{(ecuación de Airy generalizada)}$$

Se utiliza, como herramienta principal, el lema de Watson en la siguiente versión:

Sea F una función analítica, definida en el plano complejo, salvo en un corte a lo largo del eje real negativo, que admite un desarrolo de la forma:

$$F(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m t^{m/R^{-1}}$$

(*) Presentada en la sesión celebrada el 18 de enero de 1984.

para $-\pi < \arg t < \pi$ *y* $0 < |t| < R + \delta$; *en donde* $\delta > 0$, $R \in \mathbb{R}^+$ *y las potencias son las reales y positivas, para los valores reales y positivos de* t. *Se supone además que existen dos números* k *y* b *positivos, tales que:*

$$|F(t)| < k \exp [bt]$$

para todo t *real mayor que* R.

Entonces se tiene:

$$\mathscr{L}(F) = \int_0^\infty \exp [-zt] \cdot F(t)\, dt \sim \sum_{m=1}^\infty a_m \Gamma\left(\frac{m}{R}\right) z^{-m/R}$$

cuando $|z| \longrightarrow +\infty$ *en el sector* $|\operatorname{Arg} z| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, *con* $\varepsilon > 0$, *y uniformemente respecto a* Arg z *en este sector, siendo el camino de integración al semieje real positivo.*

Estudio de la ecuación de Airy en el caso $n = 3$

El método de Laplace para determinar soluciones de la ecuación:

$$y'''(\lambda) - \lambda y(\lambda) = 0$$

las proporciona en forma de integrales definidas sobre caminos complejos C:

$$y(\lambda) = (2\pi i)^{-1} \int_C \phi(z) \cdot \exp [\lambda z]\, dz,$$

donde λ aparece como parámetro de la integral. La función ϕ está determinada derivando formalmente respecto del parámetro λ, resultando para ϕ la función $\phi(z) = \exp [-z^4/4]$ y el camino C ha de hacer convergente la integral y además anular los términos finitos que se originan en la integración parcial. Se obtienen cuatro camino posibles C_r, $r = 0, 1, 2, 3$, extendidos desde:

$$\infty \cdot \exp\left[\frac{2\pi(r+1)}{4} i\right] \quad \text{a} \quad \infty \cdot \exp\left[\frac{2\pi r}{4} i\right]$$

Se obtiene así cuatro soluciones y_r, $r = 0, 1, 2, 3$, de la ecuación de tercer orden:

$$y_r(\lambda) = (2\pi i)^{-1} \int_{C_r} \exp\left[-\frac{z^4}{4} + \lambda z\right] dz$$

correspondiente cada una a uno de los caminos C_r, $r = 0, 1, 2, 3$. Evidentemente no serán independientes y se comprueba sin dificultad que su suma es nula. El conocimiento de una solución en un sector de ángulo $\pi/2$ determina la función en todo el plano. Análogamente, el conocimiento de una solución en todo el plano determina las restantes soluciones.

Aproximación asintótica por el método del descenso rápido para y_1

Si introducimos en $y_r(\lambda)$ la nueva variable:

$$z = \lambda^{1/3} \cdot t$$

donde se escoge la rama principal de la raíz, $y_r(\lambda)$ adopta la forma:

$$y_r(\lambda) = \lambda^{1/3}(2\pi i)^{-1} \int_{\text{Arg } \lambda^{1/3} C_r} \exp\left[-\frac{\lambda^4}{3} \cdot \left(\frac{t^4}{4} - t\right)\right] dt$$

Tomando Arg λ suficientemente pequeño ($|\text{Arg } \lambda^{1/3}| < \pi/8$) podemos deformar el camino de integración Arg $\lambda^{1/3} \cdot C_r$ hasta hacerle coincidir con C_r de nuevo, de forma que es:

$$y_r(\lambda) = \lambda^{1/3}(2\pi i)^{-1} \int_{C_r} \exp\left[-\lambda^{4/3}\left(\frac{t^4}{4} - t\right)\right] dt$$

Por prolongación analítica esta fórmula define $y_r(\lambda)$ para todo $\lambda \in C$.

El factor $(t^4/4 - t)$ en el exponente tiene como derivada $t^3 - 1$, cuya anulación determina los tres puertos a los que se puede aplicar el método del descenso rápido. Estos puertos son las tres raíces cúbicas de la unidad:

$$\theta_k = \exp\left[\frac{2k\pi}{3} i\right], \quad k = 0, 1, 2$$

Siendo necesario decir cuál es el más apto para obtener el desarrolo asintótico buscado. La condición que ha de cumplir es que el camino de integración se pueda deformar pasando por el puerto de manera que sea uno de descenso rápido.

Para ello se determinan los «caminos de fase constante» de la función $t^4/4 - t$, que pasan por cada uno de los puertos, y que son:

$$\text{para } \theta_0 \quad y = 0,\ xy^2 - x^3 + 1 = 0$$

$$\text{para } \theta_1 \quad -x^3y + xy^3 + y = 3\sqrt{3}/8$$

$$\text{para } \theta_2 \quad -x^3y + xy^3 + y = -3\sqrt{3}/8$$

Entre estos caminos se han de determinar los de descenso rápido. El camino $-x^3 + xy^2 + 1 = 0$ no nos interesa por ser de ascenso y no de descenso. El otro camino $y = 0$ es de descenso rápido, pero se ve claramente que C_0 no puede ser deformado en él.

Observemos, en cambio, que una rama, L_1, del camino de fase constante que pasa por θ_1 es de descenso rápido y obviamente C_1 se puede transformar en ella. Por tanto, $\theta_1 = \exp[2\pi i/3]$ es el puerto apropiado.

Buscamos entonces el desarrollo de la integral:

$$y_1(\lambda) = \lambda^{1/3}(2\pi i)^{-1} \int_{L_1} \exp\left[-\lambda^{4/3}\left(\frac{t^4}{4} - t\right)\right] dt$$

extendido al camino L_1 que se acaba de determinar. Hecho esto, consideraremos dos ramas en L_1: desde $t = \theta_1$ al ∞ del eje imaginario, L_1^+, y desde $t = \theta_1$ al ∞ del semieje real negativo, L_1^-, y la nueva variable:

$$s = \frac{t^4}{4} - t + \frac{3}{4}\theta_1 \qquad (*)$$

resultando entonces:

$$y_1(\lambda) = \lambda^{1/3}(2\pi i)^{-1} \cdot \exp\left[\frac{3}{4}\theta_1\lambda^{4/3}\right] \cdot \int_0^{+\infty} \exp[-s\lambda^{4/3}]\left(\frac{dt^+}{ds} - \frac{dt^-}{ds}\right) ds$$

donde el camino de integración es el semieje real positivo. Realizando los cálculos pertinentes y aplicando el lema de Watson se tiene:

$$y_1(\lambda) \simeq \lambda^{1/3}(2\sqrt{\pi} i)^{-1} \exp[-\theta_1\lambda^{4/3}]\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\theta_1^{1/2}\lambda^{-2/3} - \frac{7\sqrt{6}}{108}\theta_1\lambda^{-2} + \cdots\right)$$

válido para $|\mathrm{Arg}\,\lambda| < \pi$.

Desarrollo asintótico de y_1

Veamos ahora el desarrollo asintótico completo de la integral que da $y_1(\lambda)$, y que se ha transformado en:

$$y_1(\lambda) = \lambda^{1/3}(2\pi i)^{-1} \exp\left[\frac{3}{4}\theta_1\lambda^{4/3}\right] \int_0^{\infty} \exp[-s\lambda^{4/3}]\left(\frac{dt^+}{ds} - \frac{dt^-}{ds}\right) ds$$

La evaluación de esta integral se consigue invirtiendo la función $s = s(t)(*)$, siendo aplicable, en este caso, el teorema de inversión de Lagrange obteniéndose cerca de $t = \theta_1$:

$$t^{\pm} = \theta_1 + \sum_{v=1}^{\infty} \theta_1 2^{v/2}(3\theta_1)^{-v/2}v^{-1} \sum_{r_1 + r_2 = v - 1}$$

$$\binom{v/2 + r_1 - 1}{r_1}\binom{v/2 + r_2 - 1}{r_2}(\alpha_1^{r_1} \cdot \alpha_2^{r_2})^{-1}(\pm s^{1/2})^v$$

donde α_1 y α_2 son las raíces del polinomio:

$$p(t-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(t-1) + \frac{1}{12}(t-1)^2$$

y así resulta finalmente:

$$y_1(\lambda) \sim \lambda^{1/3}(2\pi i)^{-1} \cdot \exp\left[\frac{3}{4}\theta_1\lambda^{4/3}\right] \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1/2} \theta_1^{1-(m+1/2)} \times$$

$$\times \sum_{r_1+r_2=2m} \binom{m+r_1-1/2}{r_1}\binom{m+r_2-1/2}{r_2} \cdot (\alpha_1^{r_1}\cdot\alpha_2^{r_2})^{-1} \times$$

$$\times\ \lambda^{-2/3(2m+1)}\Gamma(m+1/2)$$

Generalización de la ecuación de Airy para cualquier n

Aplicando los métodos anteriores a la ecuación de Airy de orden n:

$$\frac{d^n y}{d\lambda^n} - \lambda y = 0$$

resulta que se satisface por las funciones:

$$y_r(\lambda, n) = (2\pi i)^{-1} \int_{C_r} \exp\left[-\frac{z^{n+1}}{n+1} + \lambda z\right] dz$$

siendo C_r los caminos de integración extendidos desde:

$$\infty \cdot \exp\left[\frac{2\pi i(r+1)}{n+1}\right] \quad \text{a} \quad \infty \cdot \exp\left[\frac{2\pi i r}{n+1}\right] \quad \text{con} \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Obteniendo por métodos similares, aunque con cálculos más complicados, el desarrollo:

$$y_r(\lambda) \sim \lambda^{1-n/2n} \cdot (\pi i)^{-1} \cdot \exp\left[-\frac{n\theta}{n+1}\lambda^{n+1/n}\right] \times$$

$$\times\ \theta^{1/2}(2n)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} (2\lambda^{-n+1/n})^m \cdot (n\theta)^{-m} \cdot \Gamma(m+1/2) \times$$

$$\times \sum_{r_1+\cdots+r_{n-1}=2m} \binom{m+r_1-1/2}{r_1} \cdots \binom{m+r_{n-1}-1/2}{r_{n-1}} (\alpha_1^{r_1}\cdots\alpha_{n-1}^{r_{n-1}})^{-1}$$

siendo $\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}$ los $n - 1$ ceros del polinomio:

$$P(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - t - \left(\frac{\theta^{n+1}}{n+1} - \theta\right), \quad \alpha_i \neq \theta, \forall\, i = 1, \ldots, n - 1$$

y θ el punto puerto en el que se realiza el método del descenso rápido.

AGRADECIMIENTOS

Agadezco al profesor don Enrique Linés Escardó las orientaciones y sugerencias para la ralización de este trabajo.

BIBLIOGRAFIA

[1] AIRY, G. B.: *Camb. Phil. Trans.*,6, 379-401, 1838.
[2] COPSON, E. T.: «Asymtotic expansions», *Cambridge Tracts. in Math. and Mathphysies*, 55, Cambridge, 1965.
[3] ERDÉLYI, A.: *Asymtotic expansions*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1956.
[4] MURRAY, J. D.: *Asymtotic Analysis*, Clarendon, Press, Oxford, 1974.
[5] SIROVICH, L.: *Techniques of asymtotic Analysis*, Springer-Verlag, Nueva York, 1971.
[6] TURRITTIN, H. L.: *Salvable related equations pertaining to turning point problems, in proceeding of a symposium...*, University of Wiscousin, Madison, 1964.
[7] WATSON, G. N.: *Theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, 1952.
[8] WIMP, L.: «Uniform scale functions and the asymtotic expansions of integrales», *Lectures Notes*, 827, 1978.