Teoría de catástrofes aplicada (*)

JUAN MARGALEF ROIG (**) y ENRIQUE OUTERELO DOMÍNGUEZ

Departamento de Topología y Geometría, Universidad Complutense de Madrid

La Física clásica desde Newton hasta la Teoría de la Relatividad General estudia procesos o fenómenos cuyos cambios cualitativos son continuos frente a pequeñas perturbaciones de los parámetros de control. La matemática que se utiliza en la construcción de modelos para estos fenómenos ha sido ampliamente estudiada y, en general, se conoce bastante bien.

Sin embargo, en la naturaleza existen muchos fenómenos en los que pequeños cambios de los parámetros de control producen cambios bruscos en el comportamiento cualitativo de los mismos.

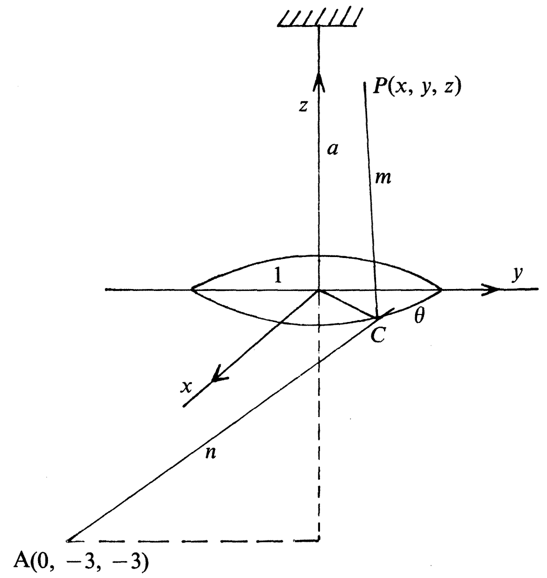
En la década de los años setenta, R. Thom, apoyándose en la teoría de singularidades, iniciada por H. Whitney en 1955, y en la teoría de la bifurcación de sistemas dinámicos, debida a Poincare y Andronov-Pontriaguin (1937), elabora la Teoría de Catástrofes, hoy conocida como Teoría de Catástrofes Elemental, como un intento de describir modelos matemáticos de fenómenos cuyo comportamiento cualitativo cambia bruscamente bajo pequeñas variaciones de los parámetros de control, es decir, de fenómenos discontinuos en su evolución.

Desde el año setenta se han publicado centenares de artículos científicos con las más variadas aplicaciones: el estudio de los latidos del corazón, la óptica física y geométrica, la embriología, la lingüística, la psicología experimental, la economía, la hidrodinámica, la geología, la teoría de partículas elementales, etc. Varios artículos de divulgación han sido también publicados en la prensa diaria tal como *Newsweek*, *El País*, etc. Esta singular actividad es debida fundamentalmente a que la Teoría de Catástrofes supone una nueva orientación en la aplicación de la Matemática a otras ramas de la ciencia y al hecho de las fuertes controversias que han originado algunas de sus aplicaciones.

A continuación se expone, en síntesis, en qué consiste la Teoría de Catástrofes. Para una mejor comprensión de la Teoría, se va a considerar un problema concreto, y al ir describiendo lo que sucede en dicho problema se irá presentando la Teoría.

Se considera la siguiente máquina: Una barra rígida, a, sujeta en un techo. Un disco, D, rígido y homogéneo de radio 1, sujeto por su centro, O, al final de la barra, a, en posición perpendicular a la misma, el cual puede girar libremente alrededor de su centro. Un punto fijo, A, de coordenadas $(0, -3, -3)$ y un punto, C, fijo en el borde del disco, entre los cuales se coloca un elástico, CA, de longitud 3 cuando está distendido (CA resulta que está siempre tirante con longitud mayor que 3). Finalmente, CP, $P(x, y, z)$, es un elástico de extremos C y P de longitud distendida 3.

(*) Presentada en la sesión científica del día 1 de febrero de 1984.
(**) Instituto Jorge Juan del C.S.I.C.



Por la ley de Hooks, para una posición determinada de $P(x, y, z)$, la energía potencial del sistema es:

$$V(x, y, z, \theta) = k[(n - 3)^2 + (m - 3)^2] \quad \text{y} \quad n = \sqrt{19 + 6\cos\theta}$$
$$m = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1 - 2x \operatorname{sen}\theta - 2y\cos\theta}$$

Para una posición de P(x, y, z), por el teorema de Dirichlet, el sistema adopta una posición de equilibrio estable, determinada por el ángulo θ, que corresponde a los mínimos de la función potencial $V(x, y, z, \theta) = V_{(x, y, z)}(\theta)$. Es claro que puede haber más de un mínimo. Asimismo, los máximos y puntos de inflexión corresponden a los equilibrios inestables.

El problema que se pretende estudiar es cómo varía la posición del disco (estado interno del sistema) al variar el punto P (parámetro de control), por ejemplo, sobre una curva σ o sobre un subconjunto cualquiera, y fundamentalmente si existen puntos P para los cuales pequeñas variaciones de P producen saltos bruscos o discontinuidades del estado interno o posición del disco determinado por θ. A estos puntos les llamaremos de catástrofe.

Por otro lado, si admitimos el principio del retardo perfecto, un sistema en evolución abandona una posición de equilibrio estable únicamente cuando ese equilibrio desaparece, o dicho de forma más gráfica, cuando no tiene más remedio.

Es claro que para estudiar la evolución del sistema (constituido por la máquina descrita) cuando P recorre un abierto C de R^3, bastará estudiar la correspondencia:

$$c = (x, y, z) \in C \longrightarrow \{\theta_0 \in R \mid v(x, y, z)(\theta) \text{ tiene un mínimo local en } \{\theta_0\}$$

Ahora bien, las correspondencias, en general, son difíciles de estudiar y es por eso que se simplifica el problema, desde el punto de vista matemático, convirtiendo la correspondencia en una aplicación de la siguiente forma:

$$\Omega_* : C \to F = \{H \subset R \ / \ H \text{ es cerrado en } (R, T_u)\}$$

c = $(x, y, z) \to \{\theta / V(x, y, z, \cdot)$ tiene un máximo, un mínimo o una inflexión de tangente horizontal$\}$. Es decir:

$$\Omega_*(x, y, z) = \left[\theta \ / \ \frac{\partial V(x, y, z, \theta)}{\partial \theta} = 0\right] = \Omega_c$$

Lo primero que se observa es que, efectivamente, Ω_c es un cerrado de R.

Al evolucionar el fenómeno a partir de unas condiciones iniciales o historia previa, la variable de estado describe una selección continua o no de la aplicación Ω_*. (Una selección φ de Ω_* es una aplicación de C en R tal que $\varphi(x, y, z) \in \Omega_*(x, y, z)$ para todo elemento (x, y, z) de C.)

Conjunto de bifurcación

Un elemento $c = (x, y, z)$ de C es un punto regular si existe V^c, entorno de c en C, tal que para todo par de elementos c_1 y c_2 de V^c, existe $\alpha_{(c_1, c_2)}$ homeomorfismo de Ω_{c_1} sobre Ω_{c_2} tal que para todo $\theta \in \Omega_{c_1}$ Se verifica que $\alpha_{(c_1, c_2)}(\theta)$ y θ son del mismo tipo (ambos máximos, ambos mínimos o ambos puntos de inflexión).

Al conjunto de elementos de C no regulares se le llama conjunto de bifurcación y se le designa por B.

Por tanto, podemos decir que en un punto de bifurcación ocurre que pequeñas variaciones del parámetro de control producen estados internos cualitativamente distintos.

Conjunto de catástrofe

Para formalizar la idea de punto de catástrofe se define en F una topología llamada de Hausdorff, la cual está determinada por la siguiente métrica:

$$\rho_H(\Omega_c, \Omega_{c'}) = \text{máx}\left\{\sup_{a \in \Omega_c} d(a, \Omega_{c'}), \ \sup_{b \in \Omega_{c'}} d(b, \Omega_c)\right\}$$

$$\left\{d(a, \Omega_{c'}) = \inf_{b \in \Omega_{c'}} d(a, b), \ d(b, \Omega_c) = \inf_{a \in \Omega_c} d(b, a)\right\}$$

Entonces un punto $c \in C$ es de catástrofe si la aplicación $\Omega_* : C \to F$ no es continua en c. Al conjunto de puntos de catástrofes se le designa por K. De acuerdo con esta definición si a partir de unas condiciones iniciales o historia anterior realizamos un recorrido del parámetro de control, obtenemos una selección que en el punto de catástrofe tiene una discontinuidad no evitable (respecto a la topología usual de R).

Se comprueba que $\bar{K}$ es un subconjunto de B.

Una primera aproximación para el conocimiento de $\bar{K}$ es determinar B. En el caso de la máquina que nos ocupa, B se calcula de la siguiente forma:

$$\text{Sea } M_V = \bigcup_{c \in C} (\{c\} \times \Omega_c) \subset R \times R^3$$

$$\text{y} \quad X_V : M_V \longrightarrow C \text{ la aplicación definida por } X_V(c, x) = c.$$

Entonces M_V es una subvariedad de dimensión 3 de R^4, llamada subvariedad de equilibrios y B es el conjunto de valores críticos de X_V, es decir:

$$B = \left[(x, y, z) \,/\, \text{existe } \theta \in R \text{ cumpliendo que} \right.$$

$$\left. \frac{\partial V(x, y, z, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 V(x, y, z, \theta)}{\partial \theta^2} = 0 \right]$$

A la aplicación X_V se le puede aplicar la teoría de singularidades de aplicaciones diferenciables y resolver así cualitativamente el problema planteado.

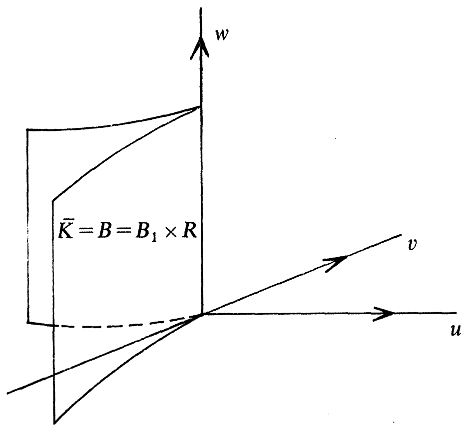
De hecho, en el caso particular que nos ocupa, ocurre que $X_V : M_V \longrightarrow C$ es equivalente a:

$$X_{t^4 + ut + vt^2} \times 1_R : M_{t^4 + ut + vt^2} \times R \longrightarrow R^2 \times R$$

que corresponde a una de las catástrofes elementales, obtenidas en el teorema fundamental de clasificación.

Observamos también que en este caso particular $\bar{K} = B$.

En el modelo equivalente que se ha encontrado mediante la clasificación de X_V, se tiene el siguiente esquema:



($B_1 = \{(u, v)/4t^3 + u + 2vt = 0,\ 12t^2 + 2v = 0\}$) y en un punto (u, v, w) exterior de B la función $f(u, v, w, t) = t^4 + ut + vt^2$ tiene un único mínimo local, en un punto (u, v, w) de B dicha función tiene un mínimo local y un punto de inflexión de tangente horizontal y finalmente en el interior la función tiene un máximo local y dos mínimos locales. Esto nos da el comportamiento cualitativo del fenómeno. Si se conocieran los difeomorfismos de equivalencia se tendría también el comportamiento cuantitativo.

Todos los fenómenos de tipo potencial pueden ser modelados de manera análoga al del caso precedente y el teorema general que regula la clasificación es el teorema de R. Thom cuyo enunciado es el siguiente:

Sean n y r números naturales tales que $1 \leqslant r \leqslant 5$. Entonces existe un conjunto abierto y denso G, de $C^\infty(R^{n+r})$ (conjunto de aplicaciones de clase ∞ de R^{n+r} en R) con la topología de Whitney (dos funciones f y g están ε-próximas si $|f(x) - g(x)| < \varepsilon(x), \ldots, |D^k f(x) - D^k g(x)| < \varepsilon(x)$ para todo $x \in R^{n+r}$, siendo ε una función continua de R^{n+r} en R^+ y $k \in N \cup \{0\}$), tal que:

1.º Para todo $g \in G$:

$$M_g = \left[(x, y) \in R^{n+r} \,/\, \frac{\partial g(x, y)}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial g(x, y)}{\partial x_n} = 0 \right]$$

es una subvariedad diferenciable de clase ∞ de dimensión r de R^{n+r}.

2.º Para todo $g \in G$, la aplicación de clase ∞ $X_g : M_g \to R^r$ es localmente estructuralmente estable en todo punto $(x, y) \in M_g$.

3.º Para todo $g \in G$ y todo punto (x, y) de M_g que sea punto crítico de X_g se verifica que X_g es equivalente a $X_{\bar{h}}$, donde $X_{\bar{h}}$ es una de las once catástrofes elementales.

Además el número de catástrofes elementales, según el valor de r, está dado por la siguiente tabla:

r	1	2	3	4	5	6
Número de catástrofes elementales	1	2	5	7	11	∞

La teoría anterior, «teoría de catástrofes elementales», se basa en tres hechos fundamentales:

1.º Los equilibrios estables del fenómeno minimizan una determinada función, llamada función potencial.

2.º Los únicos estados de equilibrio del fenómeno son puntos críticos de la función potencial.

3.º Para codimensión menor o igual que 5 se dispone de un teorema de clasificación con un número finito de modelos.

La generalización de la teoría consiste en abordar fenómenos en los que no se cumple el primer supuesto. En este caso lo primero que hay que definir es el concepto de equilibrio estable y, en general, de equilibrio concerniente al fenómeno particular que se está tratando. A continuación se determina la superficie de equilibrios y se estudia si es una subvariedad, presentándose en esta comprobación la primera dificultad de la teoría. Una segunda dificultad surge al ver si los valores críticos de la función X de la superficie de equilibrios en el espacio de los parámetros de control coinciden con el conjunto de bifurcación.

Otra dificultad se presenta al tratar de obtener un teorema de clasificación para la aplicación X.

Nota: Más detalles de los aquí expuestos pueden verse en: «Teoría de Catástrofes. Aplicaciones», a publicar por la Academia de Ciencias en la revista *Actualizaciones.*