Curvas algebraicas reales y superficies de Klein (*)

E. BUJALANCE, J. J. ETAYO (**) y J. M. GAMBOA (***)

Departamento de Matemáticas Fundamentales. U.N.E.D.

ABSTRACT

The classical correspondence between Riemann surfaces and complex algebraic curves, extends by the work of Alling and Greenleaf to Klein surfaces and real algebraic curves. The topological invariants of the surface determine the ones of a smonoth and bounded model of the associated curve, and conversely. Moreover, the fields of meromorphic functions of both coincide. So, the automorphisms group, the real part of the associated complex curve, and the coverings and moduli space of the curve, may be studied in terms of the automorphisms group, the symmetries, the coverings and the Teichmüller space of the associated surface.

INTRODUCCION

Siguiendo una vieja idea de Berzolari [2], Alling y Greenleaf desarrollan en [1] los fundamentos de lo que hoy en día se denomina teoría de superficies de Klein. Esta teoría, que como ponen de manifiesto los trabajos de Singerman, Zieschang y otros autores, tiene extraordinario interés por sí misma, desempeña en el estudio de las curvas algebraicas reales un papel análogo al desempeñado por la teoría de superficies de Riemann al estudiar curvas algebraicas sobre el plano complejo.

Dividiremos esta nota en tres puntos: [1], equivalencia funtorial entre la categoría de superficies de Klein compactas con borde y la de curvas algebraicas reales; [2], grupos de automorfismos de superficies de Klein, y [3], superficies de Klein hiperelípticas y el espacio de moduli.

1. La equivalencia funtorial entre las categorías

Sea k un cuerpo —que podemos suponer $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$— y F un cuerpo de funciones algebraicas en una variable. Se llama superficie de Riemann de F/k a:

$$\mathrm{Riem}_k F = \{D \mid D \text{ es anillo de valoración de } F,\ D \supset k\}$$

(*) Presentada en la sesión científica del día 1 de febrero de 1984.
(**) Departamento de Topología y Geometría. Universidad Complutense de Madrid.
(***) Departamento de Algebra y Fundamentos. Universidad Complutense de Madrid.

El ejemplo más sencillo se obtiene al tomar $F = k(x)$, con x trascendente sobre k. En tal caso:

$$\mathrm{Riem}_k F = \{k[x]_m \mid m \in \mathrm{Spec}_{\text{máx}}\, k[x]\} \cup k[x^{-1}]_{x^{-1}k[x^{-1}]}$$

Ahora, en el caso particular de $k = \mathbb{C}$, los ideales maximales de $k[x]$ son de la forma $(x - a)k[x]$, con $a \in \mathbb{C}$, luego si $\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es la compactificación de $\mathbb{C}$ por un punto, la aplicación:

$$\phi : \mathrm{Riem}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}(x) \to \Sigma,$$

dada por $\phi(\mathbb{C}[x]_{(x-a)}) = a$, $\phi(\mathbb{C}[x^{-1}]_{x^{-1}\mathbb{C}[x^{-1}]}) = \infty$, es biyectiva y nos permite dotar a $\mathrm{Riem}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}(x)$ de estructura de espacio topológico homeomorfo a Σ.

Cuando $k = \mathbb{R}$, los ideales maximales de $\mathbb{R}[x]$ son, bien de la forma $(x - a)\mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$, o bien $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})R[x]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ con parte imaginaria positiva.

De este modo, si $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Riem}\,(z) \geqslant 0\}$ y el disco $\Delta = \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$ es la compactificación por un punto de $\mathbb{C}^+$, la biyección $\phi : \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}\, \mathbb{R}(x) \to \Delta$, definida mediante $\phi(\mathbb{R}[x]_{(x-a)}) = a$, $\phi(\mathbb{R}[x]_{(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})}) = \alpha$, $\phi(\mathbb{R}[x^{-1}]_{x^{-1}\mathbb{R}[x^{-1}]}) = \infty$, permite dotar a $\mathrm{Riem}_{\mathbb{R}}\, \mathbb{R}(x)$ de estructura de espacio topológico homeomorfo a Δ.

Nótese que mientras que Σ no tiene borde, sí lo tiene Δ y, vía ϕ^{-1}, los puntos del borde son los anillos de valoración $\mathbb{R}[x]_{(x-a)\mathbb{R}[x]}$, es decir, aquéllos cuyo cuerpo residual es formalmente real. Por ello, en el caso general se define:

Definición:

$$\partial(\mathrm{Riem}_k F) = \{D \in \mathrm{Riem}_k F \mid D/m_D \text{ es formalmente real}\},$$

donde m_D denota el ideal maximal de D.

Construcción. Para F/k, cuerpo de funciones algebraicas en una variable sobre k, se dota a $\mathrm{Riem}_k F$ de estructura topológica del siguiente modo:

Consideramos, para cada $f \in F$ trascendente sobre k, la aplicación $\hat{f}: \mathrm{Riem}_k F \to \mathrm{Riem}_k k(f)$, tal que $\hat{f}(D) = D \in k(f)$, y consideremos en $\mathrm{Riem}_k F$ la topología inicial para la familia:

$$\mathscr{F} = \{\hat{f} \mid f \in F, f \text{ trascedente sobre } k\}$$

Al ser $\mathrm{Riem}_k\, k(f)$ Hausdorff, es sencillo probar que también lo es $\mathrm{Riem}_k F$. Además, si $k = \mathbb{C}$, Chevalley [6] prueba que $\mathrm{Riem}_{\mathbb{C}} F$ es conexo y compacto. Para el caso en que $k = \mathbb{R}$, se deduce el mismo hecho de ser $\mathrm{Riem}_{\mathbb{C}}\, F(\sqrt{-1})$ conexo y compacto, y la aplicación $\phi : \mathrm{Riem}_{\mathbb{C}}\, F(\sqrt{-1}) \to \mathrm{Riem}_{\mathbb{R}} F$ dada por $\phi(D) = D \cap F$ continua y suprayectiva.

De este modo, Alling y Greenleaf [1] dotan a $\mathrm{Riem}_{\mathbb{R}} F$ de estructura de superficie de Klein compacta, esto es, prueban que admite un atlas dianalítico. A partir de ahora llamaremos $X(F)$ a $\text{Riem}_{\mathbb{R}} F$, que es, pues, la superficie de Klein asociada a F.

Además, su cuerpo de funciones meromorfas $E(X(F)) \simeq F$. Por ello, si notamos Ⓡ a la categoría de cuerpos de funciones algebraicas en una variable sobre $\mathbb{R}$, disponemos de la siguiente correspondencia:

$$\text{Ⓡ} \to \{\text{superficies de Klein compactas}\} \to \text{Ⓡ}$$

$$F \to X(F) \to E(X(F)) = F$$

Pero, desde un punto de vista geométrico, si $C \subset \mathbb{R}^n$ es una curva algebraica real, $\mathbb{R}(C)$, su cuerpo de funciones, pertenece a Ⓡ; pero no todo $F \in$ Ⓡ es el cuerpo de funciones racionales de una curva algebraica real (por ejemplo, $F = cf(\mathbb{R}[x, y]/x^2 + y^2))$. ¿Qué cuerpos de Ⓡ son el cuerpo de funciones racionales de una curva real? La respuesta viene dada por los formalmente reales, esto es, aquéllos en que -1 no es suma de cuadrados. Así, las superficies de Klein asociadas a curvas algebraicas reales son las que se corresponden con cuerpos formalmente reales, esto es, las superficies con borde [5]. Queda, pues, completo el siguiente diagrama:

$$\{\text{curvas algebraicas reales}\} \to \text{Ⓡ} + \text{form. r.} \to$$

$$\to \{\text{superficies de Klein compactas con borde}\} \to$$

$$C \to \mathbb{R}(C) \to X(\mathbb{R}(C)) \to$$

$$\to \text{Ⓡ} \to \{\text{curvas algebraicas reales}\}$$

$$\to E(X(\mathbb{R}(C(() = \mathbb{R}(C) \to C' \text{ birracional con } C$$

Naturalmente, la existencia de estos funtores no es suficiente para traducir algunos resultados de una categoría a la otra, sino que es necesario saber calcular $X(\mathbb{R}(C))$ a partir de C y recíprocamente. En esta dirección, algunos de los resultados fundamentales son:

1) Sea C una curva algebraica real y C' un modelo liso y completo de C. Entonces $X(\mathbb{R}(C))$ es orientable si, y sólo si, $\tilde{C}'\backslash C'$ es no conexa, siendo $\tilde{C}'$ la complexificada de C' [15].

2) $\partial X(\mathbb{R}(C))$ es homeomorfo a C'.

3) Si k es el número de componentes conexas de $\partial X(\mathbb{R}(C))$, p el género topológico de $X(\mathbb{R}(C))$ y g el algebraico de C, es:

$$p = \frac{1}{2}(g - k + 1) \quad \text{si} \quad X(\mathbb{R}(C)) \text{ es orientable,}$$

$$p = g - k + 1 \quad \text{si} \quad X(\mathbb{R}(C)) \text{ es no orientable.}$$

De este modo, los invariantes topológicos y algebraicos de C' determinan los de $X(\mathbb{R}(C))$, y recíprocamente.

2. Grupos de automorfismos de superficies de Klein

Los trabajos de Alling y Alling-Greenleaf sobre automorfismos de superficies de Klein se limitan a los géneros 0 y 1, y no son extendibles a géneros superiores, hasta que Preston y May relacionan las superficies de Klein con los grupos NEC.

Un grupo no euclídeo cristalográfico —grupo NEC— Γ es un subgrupo discreto del grupo G de isometrías del plano hiperbólico D, tal que D/Γ sea compacto. Los grupos NEC fueron introducidos por Wilkie [18] y pueden contener elementos orientables y no orientables.

A cada grupo NEC le corresponde una signatura que determina una presentación del grupo y, por tanto, su estructura algebraica. La signatura tiene la forma:

$$(p, \pm, [m_1, \ldots, m_r], \{(n_{i1}, \ldots, n_{is_i})_{i = 1, \ldots, k}\}),$$

donde p es el género del grupo, m_i los períodos propios, y $(n_{i1}, \ldots, n_{is_i})$ los ciclo-períodos.

Los grupos NEC que contienen sólo elementos orientables son los fuchsianos. A un grupo NEC Γ le corresponde un grupo fuchsiano canónico, Γ^+, formado por los elementos orientables de Γ.

El resultado fundamental que relaciona grupos NEC y superficies de Klein fue obtenido por Preston [16]: si X es una superficie de Klein de género p, con k componentes en el borde y género algebraico $g \geqslant 2$, entonces $X = D/\Gamma$, donde Γ es un grupo NEC de signatura $(p, \pm, [-], \{(-), \overset{k}{\ldots}, (-)\})$, con signo «+» o «−», según que la superficie sea o no orientable.

Llamaremos automorfismo de la superficie de Klein X a los homeomorfismos de X en X compatibles con la estructura dianalítica. Nótese que el grupo de automorfismos de X coincide con el de automorfismos birracionales de la curva asociada C, pues ambos son el grupo de automorfismos de $E(X) = \mathbb{R}(C)$.

May probó [12] que un grupo finito G es un grupo de automorfismos de D/Γ si, y sólo si, $G = \Gamma'/\Gamma$, donde Γ' es un grupo NEC del que Γ es subgrupo normal.

Cuando el grupo Γ es fuchsiano, entonces el cociente D/Γ es una superficie de Riemann. Así, como al grupo NEC Γ le corresponde un grupo fuchsiano canónico Γ^+, a la superficie de Klein D/Γ le corresponde la superficie de Riemann D/Γ^+. Obsérvese que si $D/\Gamma = X(\mathbb{R}(C))$, $D/\Gamma^+ = \mathrm{Riem}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{R}(C)(\sqrt{-1}) = \mathrm{Riem}_{\mathbb{C}}\, \mathbb{C}(\tilde{C})$ y, por tanto, es un recubrimiento doble de D/Γ.

El estudio de los grupos de automorfismos de superficies de Klein mediante grupos NEC ha permitido en los últimos años avances en diversos aspectos. Haremos a continuación un resumen de los resultados obtenidos.

Se han estudiado los puntos fijos de los automorfismos de una superficie de Klein cuando el grupo G es cíclico de orden impar, lo cual permite calcular las signaturas de los grupos NEC que proporcionan los subgrupos de G [8].

La acotación del orden del grupo de automorfismos y del de los propios automorfismos, en función del género de la superficie, es un tema en el que se poseen resultados muy completos: May [13] probó que una superficie de Klein de género algebraico g tiene, a lo más, $12(g - 1)$ automorfismos, y que para cada g hay una superficie de género g y, al menos, $4(g + 1)$ automorfismos. Ambas cotas se alcanzan para infinitos valores de g. En [7] se construyen diversas familias infinitas de superficies que admiten $12(g - 1)$ automorfismos, con cálculo explícito del grupo de automorfismos de cada una de ellas.

El orden máximo de un automorfismo ha sido calculado por May [14]. El máximo orden primo posible de un automorfismo se obtiene en [9].

Un problema más general es el de calcular el mínimo género de una superficie en la que un grupo finito dado pueda ser grupo de automorfismos. Para los grupos cíclicos el problema fue resuelto en [3]. En grupos abelianos no cíclicos de orden impar, ha sido calculado en [10].

Todos los resultados generales obtenidos sobre acotaciones del orden de los automorfismos y del grupo que forman, y del género de la superficie, se emplean para construir efectivamente los grupos de automorfismos de superficies de Klein dadas. En [5] se han constituido todos los grupos que son grupo de automorfismos de una superficie de género 2. En la actualidad estamos estudiando el problema para las superficies de género algebraico 3.

3. Curvas y superficies hiperelípticas. El espacio de moduli

Un tipo particular de superficies de Klein, de especial interés por poseer grupo de automorfismos no trivial, es el de las superficies hiperelípticas. Estas superficies han sido estudiadas en [4] y resumiremos en primer lugar algunos resultados allí obtenidos.

Una curva real hiperelíptica es aquélla que es recubrimiento doble de una curva racional real. En el lenguaje de superficies de Klein este hecho se traduce en que D/Γ es hiperelíptica si lo es D/Γ^+.

Las superficies hiperelípticas quedan caracterizadas en términos de grupos NEC del siguiente modo: una superficie D/Γ es hiperelíptica si, y sólo si, Γ es subgrupo de índice 2 de un único grupo NEC Γ_1 tal que D/Γ_1 tenga género algebraico cero.

La signatura de Γ_1 queda determinada por la de Γ: si Γ tiene signatura $(p, \pm, [-], \{(-), \overset{k}{\ldots}, (-)\})$, la de Γ_1 es:

i) $(0, +, [-], \{(2, \overset{2k}{\ldots}, 2)\})$ si $p = 0$.

ii) $(0, +, [2, \overset{2p+k}{\ldots}, 2], \{(-)\})$ si $p \neq 0$ y Γ tiene signo «+».

iii) $(0, +, [2, \overset{p}{\ldots}, 2], \{(2, \overset{2k}{\ldots}, 2)\})$ si Γ tiene signo «−».

Estos resultados permiten estudiar problemas de curvas algebraicas reales hiperelípticas en términos de superficies de Klein.

El espacio de moduli. El conjunto de curvas algebraicas de género dado constituye una variedad algebraica, y un problema clásico es el estudio de esta variedad. En términos de superficies de Klein, esta cuestión se traduce en el estudio de la variedad topológica que constituyen las superficies de género dado. Este problema se puede estudiar mediante grupos NEC vía espacio de Teichmüller.

Sea Γ un grupo NEC y sea $R(\Gamma, G)$ el conjunto de todos los monomorfismos $r : \Gamma \longrightarrow G$, con la propiedad de que $r(\Gamma)$ es discreto y $D/r(\Gamma)$ es compacto. En este conjunto se establece la siguiente relación de equivalencia: $r_1, r_2 \in R(\Gamma, G)$ son llamados equivalentes si para todo $\gamma \in \Gamma$, $r_1(\gamma) = gr_2(\gamma)g^{-1}$ para algún $g \in G$. El espacio cociente de $R(\Gamma, G)$ respecto a esta relación de equivalencia se denota por $T(\Gamma, G)$, el espacio de Teichmüller de Γ.

Por [11] se sabe que $T(\Gamma, G)$ es homeomorfo a una bola abierta en un espacio euclídeo, y la dimensión de esta bola ha sido calculada por Singerman en [17]. Si Γ tiene signatura:

$$(p, \pm, [m_1, ..., m_r], \{(n_{i1}, ..., n_{is_i})_{i=1, ..., k}\}),$$

entonces:

$$d(T(\Gamma, G)) = 3\alpha p + 3k + 2r + \sum_{i=1}^{k} s_i - 6,$$

siendo $\alpha = 1$ si la signatura tiene signo «$-$» y $\alpha = 2$ si la signatura tiene signo «$+$».

Sea:

$$\operatorname{Mod} \Gamma = \frac{\operatorname{Aut} \Gamma}{I(\Gamma)}$$

donde por Aut Γ denotamos los automorfismos de Γ y por $I(\Gamma)$ los automorfismos internos de Γ. Mod Γ actúa como un grupo de isometrías en la métrica de Teichmüller. El espacio cociente:

$$M(\Gamma, G) = \frac{T(\Gamma, G)}{\operatorname{Mod} \Gamma}$$

se denomina espacio de moduli, y clasifica las superficies de Klein respecto a la relación de equivalencia de los homeomorfismos dianalíticos. Si $X = D/\Gamma$, el espacio de moduli de Γ corresponde al de moduli de la curva algebraica real asociada a X. Igual que en los otros casos, el estudio del espacio de moduli de superficies de Klein nos permite conocer propiedades del espacio de moduli de curvas reales.

Ejemplo. En [5] se ha determinado que el grupo de automorfismos, G, de las superficies de Klein, que son suma conexa de dos planos proyectivos con una componente en el borde, es Z_2 ó D_2. $G = \Gamma'/\Gamma$, donde Γ tiene signatura $(2, -, [-], \{(-)\})$ y Γ' tiene signatura $(0, +, [2, 2], \{(2, 2)\})$ si el grupo de automorfismos es Z_2 y $(0, +, [2], \{(2, 2, 2)\})$ ó $(0, +, [-], \{(2, 2, 2, 2, 2)\})$ si el grupo de automorfismos es D_2. Entonces $T(\Gamma, G)$ es una bola de dimensión 3; si denominamos $\Lambda(\Gamma, Z_2) = \{[\tau] \in T(\Gamma, G) \mid \operatorname{Aut}(D/\tau(\Gamma)) \simeq Z_2\}$ y

$\Lambda(\Gamma, D_2) = \{[\tau] \in T(\Gamma, G) \mid \mathrm{Aut}(D/\tau(\Gamma)) \simeq D_2\}$, entonces $\Lambda(\Gamma, Z_2)$ y $\Lambda(\Gamma, D_2)$ son subvariedades de $T(\Gamma, G)$ de dimensiones 3 y 2, respectivamente, cuya unión es $T(\Gamma, G)$.

REFERENCIAS

[1] ALLING, N. L., y GREENLEAF, N.: «Foundations of the theory of Klein surfaces», *Lect. Notes in Math.*, vol. 218, Springer-Verlag, Berlín, 1971.

[2] BERZOLARI, L.: «Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven», *Encyklopädie der Math. Wiss.*, III.2.1.04.

[3] BUJALANCE, E.: «Cyclic groups of automorphisms of compact non-orientable Klein surfaces without boundary», *Pacific J. Math.*, 109, 279-289, 1983.

[4] BUJALANCE, E.; ETAYO, J. J., y GAMBOA, J. M.: «Hyperelliptic Klein surfaces» *Quart. J. Math. Oxford*, (2) 36, 1985.

[5] BUJALANCE, E., y GAMBOA, J. M.: «Automorphisms groups of algebraic curves of $\mathbb{R}^n$ of genus 2», *Archiv der Math.* (aparecerá).

[6] CHEVALLEY, C.: «Introduction to the theory of algebraic functions of one variable», *Math. Surveys*, 6, AMS, Providence, 1951.

[7] ETAYO, J. J.: «Klein surfaces with maximal symmetry and their groups of automorphisms», *Math. Annalen* 268, 533-538, 1984.

[8] ETAYO, J. J.: «NEC subgroups in Klein surfaces» *Bol. Soc. Mat. Mex.* 29, 1984.

[9] ETAYO, J. J.: «On the order of automorphism groups of Klein surfaces» *Glasgow Math. J.*, 26, 75-81, 1985.

[10] ETAYO, J. J.: «Abelian groups of automorphisms of non-orientable Klein surfaces without boundary» (preprint).

[11] MACBEATH, A. M., y SINGERMAN, D.: «Spaces of subgroups and Teichmüller space», *Proc. London Math. Soc.*, 31, 211-256, 1975.

[12] MAY, C. L.: «Large automorphism groups of compact Klein surfaces with boundary», *Glasgow Math. J.*, 18, 1-10, 1977.

[13] MAY, C. L.: «A bound for the number of automorphisms of a compact Klein surface with boundary», *Proc. AMS.*, 63, 273-280, 1977.

[14] MAY, C. L.: «Cyclic automorphisms groups of compact bordered Klein surfaces», *Houston Math. J.*, 3, 395-405, 1977.

[15] NATANZON, S. M.: «Automorphisms of the Riemann surface of an *M*-curve», *Funct. Anal. and Appl.*, 12, 228-229, 1978.

[16] PRESTON, R.: «Projective structures and fundamental domains on compact Klein surfaces», *Ph. D. thesis*, Universidad de Texas, 1975.

[17] SINGERMAN, D.: «Symmetries of Riemann surfaces with large automorphism group», *Math. Annalen*, 210, 17-32, 1974.

[18] WILKIE, M. C.: «On non-euclidean crystallographic groups», *Math. Zeit.*, 91, 87-102, 1966.