Un teorema de Radon-Nikodym para integrales bilineales (*)

A. BALBÁS Y P. JIMÉNEZ GUERRA
Departamento de Matemáticas Fundamentales. UNED

The purpose of this work is to obtain a Radon-Nikodym theorem for a Bartle type integral in locally convex spaces.

El objeto del presente trabajo es dar un teorema de Radon-Nikodym para una integral del tipo de la de Bartle, para espacios localmente convexos, dada por S. A. Sivasankara en [3]. A este trabajo nos remitimos en cuanto a aquéllas definiciones, notaciones y conceptos no enunciados en el presente trabajo, a lo largo de él denotaremos por $\mathscr{A}$ una σ-álgebra de partes de un conjunto Ω, por X, Y y Z a tres espacios localmente convexos, de los que supondremos separados y completos a X y Z, y denotaremos por $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ y $\mathscr{R}$ tres familias de seminormas generantes en X, Y y Z, respectivamente. Supondremos definida una aplicación bilineal y continua de $X \times Y$ en Z, que representaremos por $(x, y) \rightarrow xy$, y dos medidas σ-aditivas $\beta : \mathscr{A} \rightarrow Y$ y $\alpha : \mathscr{A} \rightarrow Z$, de las que β tiene la *-propiedad, es decir, para cada $r \in \mathscr{R}$ existe una medida finita no negativav_r definida en $\mathscr{A}$, tal que $||\beta||_{B,r} \ll v_r$, para todo $B \in \mathscr{B}$, siendo $\mathscr{B}$ la clase de los subconjuntos absolutamente convexos y acotados de X y $||\beta||_{B,r}$ la semivariación de β definida en [3] (nótese que β tiene trivialmente la *-propiedad, si es de variación acotada), si existe una v válida para todo $r \in \mathscr{R}$ se dice que la medida β tiene la **-propiedad. Fijaremos de antemano una familia $(v_r)_{r \in \mathscr{R}}$ de medidas finitas y no negativas definidas en $\mathscr{A}$, tales que $\lim\limits_{v_r(E) \rightarrow 0} ||\beta||_{B,r}(E) = 0$, para todo $B \in \mathscr{B}$ y todo $r \in \mathscr{R}$. Siguiendo la notación de Grothendieck, para cada $B \in \mathscr{B}$, denotaremos por X_B el subespacio de X generado por B y en él consideraremos la topología definida por el funcional de Minkowski q_B de B. Para indicar que un subconjunto de X_B es compacto o totalmente acotado en (X_B, q_B), diremos que es X_B-compacto o X_B- totalmente acotado. Para $\varepsilon > 0$, $E \in \mathscr{A}$, $r \in \mathscr{R}$ y $B \in \mathscr{B}$, fijemos los siguientes conjuntos:

$$A_{B,r}(E, \varepsilon) = \{x \in X_B : r(\alpha(F) - x\beta(F)) \leqslant \varepsilon ||\beta||_{B,r}(F),\ \forall F \subset E, F \in \mathscr{A}\},$$

$$\mathscr{A}^+_{B,r} = \{E \in \mathscr{A} : ||\beta||_{B,r}(E) > 0\} \quad \text{y} \quad \mathscr{A}^+_r = \{E \in \mathscr{A} : v_r(E) > 0\}$$

En este trabajo, y por razones de espacio, tan solo esbozaremos las demostraciones de la proposición 5 y del teorema 7. Las restantes demostraciones, así como las anteriores, suficientemente detalladas, aparecerán en otro trabajo posterior.

(*) Presentada en la sesión celebrada el 18 de enero de 1984.

1. Definición

Para $r \in \mathcal{R}$ y $B \in \mathcal{B}$ diremos que $E \in \mathcal{A}^+_r$ está (B, r)-localizado en $C \subset X_B$ si para cualesquiera que sean $F \in \mathcal{A}^+_r$, con $F \subset E$ y $\varepsilon > 0$, existe $F' \subset F$ con $F' \in \mathcal{A}^+_r$, tal que $A_{B,r}(F', \varepsilon) \cap C \neq \emptyset$.

2. Proposición

Sean $r \in \mathcal{R}$, $B \in \mathcal{B}$ y $E \in \mathcal{A}^+_r$ (B, r)-localizado en $C = C_1 \cup C_2 \subset X_B$, entonces se verifica al menos una de las siguientes afirmaciones: 2.1, E está (B, r)-localizado en C_1; 2.2, E está (B, r)-localizado en C_2; 2.3, existen $E_1, E_2 \in \mathcal{A}^+_r$ tales que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 \cup E_2 = E$ y E_i está (B, r)-localizado en C_i para $i = 1, 2$.

3. Proposición

Sean $r \in \mathcal{R}$, $B \in \mathcal{B}$ y un conjunto $E \in \mathcal{A}^+_r$ (B, r)-localizado en $C \subset X_B$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión disjunta $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^+_r$, tal que $v_r(E - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = 0$ y $A_{B,r}(E_n, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset$, para todo $N \in \mathbb{N}$.

4. Lema

Sean $B \in \mathcal{B}$ y una función β-integrable $f: \Omega \to X_B$ tal que $\alpha(E) = \int_E f\,d\beta$ para todo $E \in \mathcal{A}$ (en adelante pondremos $\alpha = \beta_f$). Entonces si $\|\beta\|_{B,r}(\Omega) > 0$ para $r \in \mathcal{R}$, existe un conjunto $E \in \mathcal{A}^+_{Br}$, tal que $f(E)$ es X_B-totalmente acotado y f es límite uniforme (en E y (X_B, q_B)) de una sucesión de funciones simples de Ω en X_B.

5. Proposición

Sean $B \in \mathcal{B}$ y $f: \Omega \to X_B$ una función β-integrable tal que $\alpha = \beta_f$. Dada $r \in \mathcal{R}$ con $\Omega \in \mathcal{A}^+_{B,r}$ existe un subconjunto $K \subset X_B$, X_B-totalmente acotado y $E \in \mathcal{A}^+_{B,r}$ tales que E está (B, r)-localizado en K.

Demostración. Del lema 4 resulta la existencia de un conjunto $E \in \mathcal{A}^+_{B,r}$ tal que f es límite uniforme (en E y (X_B, q_B)) de una sucesión de funciones simples de Ω en X_B y $f(E)$ es X_B-totalmente acotado. Veamos que E está (B, r)-localizado en $f(E)$. En efecto, dados $\varepsilon > 0$ y $F \in \mathcal{A}^+_r$ con $F \subset E$, para cada $m \in \mathbb{N}$ existen $x^m_1, \ldots, x^m_{n_m} \in f(E) \subset \bigcup_{i=1}^{n_m} \bar{B}(x^m_i, 1/m)$ (donde $\bar{B}(x^m_i, 1/m)$ denota la bola cerrada en (X_B, q_B) de centro x^m_i y radio $1/m$). Entonces $F^m_i = f^{-1}(\bar{B}(x^m_i, 1/m) \cap F \in \mathcal{A}$, para $i = 1, \ldots, n_m$, por ser f límite uniforme de funciones simples, y $F = \bigcup_{i=1}^{n_m} F_i^m$, de donde resulta que para algún $j \in \{1, ..., n_m\}$ se tiene que $F_j^m \in \mathscr{A}^+_r$ y si $H \in \mathscr{A}$ es tal que $H \subset F_j^m$, entonces:

$$r(\alpha(H) - x_j^m \beta(H)) = r\left(\int_H (f - x_j^m)\, d\beta\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{w \in H} q_B(f(w) - x_j^m) \|\beta\|_{B,r}(H) \leqslant \frac{1}{m} \|\beta\|_{B,r}(H).$$

Por consiguiente, $x_j^m \in A_{B,r}(F_j^m, 1/m) \cap f(E)$, de donde resulta inmediatamente que E está (B, r)-localizado en $f(E)$.

Supongamos a partir de este momento que Z es un espacio de Banach y denotemos por r una norma que define la topología de Z.

6. Proposición

Sea $B \in \mathscr{B}$ tal que $\Omega \in \mathscr{A}^+_{B,r}$ y supongamos que cada $E \in \mathscr{A}^+_{B,r}$ admite un subconjunto $F \in \mathscr{A}^+_{B,r}$ que está (B, r)-localizado en un X_B-compacto K (que depende de F). Entonces existe una sucesión disjunta $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{A}^+_{B,r}$ y una sucesión $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos X_B-compactos, tales que E_n está (B, r)-localizado en K_n para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\|\beta\|_{B,r}(\Omega - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = 0$.

7. Teorema

Supongamos que para cada $B \in \mathscr{B}$ existe $M_{B,r} > 0$ tal que $\|\beta\|_{B,r} \leqslant M_{B,r} v_r$ (esta condición se verifica trivialmente si β es de variación acotada), entonces α tiene derivada de Radon-Nikodym respecto de β si, y sólo si, existe $B \in \mathscr{B}$ cerrado tal que se cumplen: 7.1, $\lim\limits_{\|\beta\|_{B,r}(E) \to 0} r(\alpha(E)) = 0$ $(E \in \mathscr{A})$; 7.2, para cada $E \in \mathscr{A}^+_{B,r}$ existen $F \in \mathscr{A}^+_{B,r}$ y $K \subset X_B$ tales que $F \subset E$, K es X_B-compacto y F está (B, r)-localizado en K.

Demostración. Supondremos que α es diferenciable respecto a β, entonces 7.1 es consecuencia del teorema 2.41 de [3] y 7.2 resulta inmediatamente de la proposición 5. Supongamos que existe $B \in \mathscr{B}$ cerrado tal que se verifican 7.1 y 7.2 y $\Omega \in \mathscr{A}^+_{B,r}$ (ya que en caso contrario de 7.1 resulta que $\alpha = 0$ y el resultado se tiene trivialmente). De la proposición 6 resulta la existencia de una sucesión disjunta $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{A}^+_{B,r}$ y una sucesión $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos X_B-compactos tales que $\|\beta\|_{B,r}(\Omega - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = 0$ y E_n está (B, r)-localizado en K_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Obviamente bastará con construir f en $\Omega_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Dado $\delta > 0$, a partir de las proposiciones 2 y 3 se prueba la existencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, de $F_1^n, ..., F_m^n \in \mathscr{A}^+_r$ disjuntos y $K_1^n, ..., K_n^n$ conjuntos X_B-compactos, tales que: i), si $n < m$ cada K_j^m está contenido en algún K_i^n y $F_j^m \subset F_i^n$; ii), el diámetro de cada K_i^n es menor que $1/n$ $(n \in \mathbb{N}, i \in \{1, ..., m_n\})$; iii(, F_i^n está

(B, r)-localizado en K_i^n ($n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, ..., n_m\}$); iv), $A_{B,r}(F_i^n, 1/n) \cap K_i^n \neq \varnothing$; v), $v_r(\Omega_1 - \bigcup_{i=1}^{m_n} F_i^n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \delta/2^j$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean:

$$G_n = \bigcup_{i=1}^{m_n} F_i^n \quad \text{y} \quad f_n = \bigcup_{i=1}^{m_n} x_i^n \chi_{F_i^n},$$

siendo $x_i^n \in K_i^n \cap A_{B,r}(F_i^n, 1/n)$ ($i = 1, ..., m_n$). Se demuestra que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ y, por tanto, existe $f : G \longrightarrow X_B$ que es límite uniforme (en (X_B, q_B)) de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y β-integrable. Además, $v_r(\Omega_1 - G) \leqslant \delta$ y si $E \subset G$ y $E \in \mathscr{A}$, entonces:

$$r\left(\alpha(E) - \int_E f_n \, d\beta\right) \leqslant \sum_{1=1}^{m_n} r(\alpha(E \cap F_i^n) - x_i^n \beta(F_i^n \cap E)) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{m_n} \frac{1}{n} ||\beta||_{B,r}(E \cap F_i^n) \leqslant \frac{1}{n} M_{B,r} v_r(\Omega),$$

de donde resulta inmediatamente que:

$$\alpha(E) = \int_E f' d\beta.$$

Por consiguiente, acabamos de probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $G_n \in \mathscr{A}$ y $g_n : G_n \longrightarrow X_B$, β-integrable, tales que $v_r(G_n) \geqslant v_r(\Omega) - 1/n$ y $\alpha = \beta_f$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $H_n = \bigcup_{j=1}^{n} G_j$ y $f_n : \Omega_1 \longrightarrow X_B$ por:

$$f_n(w) = \begin{cases} g_1(w) & \text{si} \quad w \in G_1 \\ g_2(w) & \text{si} \quad w \in G_2 - G_1 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ g_n(w) & \text{si} \quad w \in G_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} G_i \\ 0 \quad \text{si} \quad w \notin H_n. & \end{cases}$$

Se prueba que existe $f(w) = \lim_n f_n(w)$ para todo $w \in \Omega_1$ y que $\alpha = \beta_f$.

Un teorema análogo al anterior se puede dar para Z localmente convexo separado y completo (no necesariamente Banach), mediante un proceso similar, suponiendo que β tiene la **-propiedad y modificando ligeramente la definición de localización.

REFERENCIAS

[1] DEVIEVE, C.: «Integration of vector valued functions with respect to vector valued measures», *Rev. Roum. Math. P. et Appl.*, 26 (1981), 943-957.

[2] MAYNARD, H. B.: «A Radon-Nikodym theoem for operator valued measures», *Trans. Amer. Math. Soc.*, 173 (1972), 449-463.

[3] SIVASANKARA, S. A.: *Vector integrals and products of vector measures*, Univ. Microfilm Inter., Michigan, 1983.