Conjuntos de Lebesgue y compactaciones de un espacio topológico

Por José L. Blasco

Recibido: 5 mayo 1982

Presentado por el académico numerario D. Manuel Valdivia Ureña

Resumen

Sea $C^*(X)$ el anillo de las funciones reales continuas y acotadas en un espacio topológico X de Hausdorff completamente regular. Sea H un subconjunto de $C^*(X)$ que separa puntos y cerrados y sea $L(H)$ la familia de los conjuntos de Lebesgue de las funciones de H. Escribiremos $\sigma(X, H)$ para la compactación de X que se obtiene por la inmersión de X en un cubo homeomorfo a $[0, 1]^H$ y denotamos por $\omega(X, \mathscr{P})$ la compactación de Wallman-Sanin de X asociada a la base de conjuntos cerrados $\mathscr{P}$. Sea $\Delta L(H)$ la mínima familia de subconjuntos de X que es cerrada para intersecciones finitas, uniones finitas y contiene a $L(H)$. En este artículo se prueba que las compactaciones $\sigma(X, H)$ y $\omega(X, \Delta L(H))$ son siempre comparables y damos una condición necesaria y suficiente para que esas compactaciones sean equivalentes. Se da un ejemplo de un anillo de Wallman A sobre un espacio X tal que las compactaciones $\sigma(X, A)$ y $\omega(X, Z(A))$ no son comparables ni homeomorfas. También se dan ejemplos de anillos de Wallman B y C sobre el espacio discreto N tales que $\sigma(N, B) = \omega(N, Z(B)) < \omega(N, \Delta L(B))$ y $\omega(N, Z(C)) < \sigma(N, C) = \omega(N, \Delta L(C))$.

Abstract

Let X be a Tychnoff space and let H be a subset of $C^*(X)$ which separates points from closed sets. We write $\sigma(X, H)$ for the compactification of X obtained by embedding X into a cube whose factors are indexed by H and we denote $\omega(X, \mathscr{P})$ for the Wallman-Sanin compactification of X associated with the base $\mathscr{P}$ of closed sets in X. Let $L(H)$ be the family of all Lebesgue sets of the functions of H and let $\Delta L(H)$ be the smallest ring of subsets of X containing $L(H)$. In this paper we prove that the compactifications $\sigma(X, H)$ and $\omega(X, \Delta L(H))$ are always comparable and we give a necessary and sufficient condition for the equivalence of the above compactifications. Several examples are given.

En este artículo X será un espacio de Hausdorff completamente regular. Una compactación del espacio X es un par (K, f), donde K es un espacio compacto y f es un homeomorfismo de X sobre un subespacio denso de K. En lo sucesivo no distinguiremos entre X y $f(X)$. Se define una relación en la familia de todas las compactaciones de X conviniendo en que $K_1 \leqslant K_2$ si existe una función continua K_2 sobre K_1 cuya restricción a X es la identidad. Se dice que las compactaciones K_1 y K_2 son equivalentes si existe un homeomorfismo de K_1 sobre K_2 cuya restricción a X es la identidad y en ese caso escribiremos $K_1 = K_2$. Sabemos que si K_1 y K_2 son compactaciones de Hausdorff de X tales que $K_1 \leqslant K_2$ y $K_2 \leqslant K_1$, entonces $K_1 = K_2$.

Sea $\mathscr{D}$ una base de conjuntos cerrados de X tal que $\phi \in \mathscr{D}$, $X \in \mathscr{D}$ y es cerrada para uniones finitas. Escribiremos $\omega(X, \mathscr{D})$ para la compactación de Wallman-Sanin de X asociada a $\mathscr{D}$ [6]. El espacio $\omega(X, \mathscr{D})$ tiene las siguientes propiedades:

WS1. La familia $\{cl_\omega D : D \in \mathscr{D}\}$es una base de conjuntos cerrados de $\omega(X, \mathscr{D})$.

* Este trabajó ha sido realizado en el departamento de Teoría de Funciones de la Facultad de Ciencias Matemáticas de Valencia que dirige el profesor don Manuel Valdivia.

WS2. Si $D_1, ..., D_n \in \mathscr{D}$, entonces

$$cl_\omega \cap \{D_i: 1 \leqslant i \leqslant n\} = \cap \{cl_\omega D_i: 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

WS3. Si $p \in \omega(X, \mathscr{D}) \sim X$, el conjunto $\{p\}$ es cerrado.

El siguiente resultado constituye una interesante caracterización del espacio $\omega(X, \mathscr{D})$ debida a Sanin [6].

1. **Teorema.** Si T es una compactación de X que satisface WS1, WS2 y WS3, entonces $T = \omega(X, \mathscr{D})$.

2. **Corolario.** Si $\Delta\mathscr{D}$ es la mínima familia de subconjuntos de X que contiene a $\mathscr{D}$ y es cerrada para uniones finitas e intersecciones finitas se tiene que $\omega(X, \mathscr{D}) = \omega(X, \Delta\mathscr{D})$.

Demostración. Si $T = \omega(X, \Delta\mathscr{D})$ y $\mathscr{B} = \{cl_T D: D \in \mathscr{D}\}$ es claro que las propiedades WS2 y WS3 se cumplen; por tanto, únicamente queda por probar que se verifica WS1. Sea C un subconjunto cerrado de T y sea $p \in T \sim C$. Entonces existe $B \in \Delta\mathscr{D}$ tal que $C \subset cl_T B$ y $p \notin cl_T B$. Como por hipótesis la familia $\mathscr{D}$ es cerrada para uniones finitas se tiene que $\Delta\mathscr{D}$ coincide con la familia de las intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{D}$. Por consiguiente existen $D_1, ..., D_n \in \mathscr{D}$ tales que $B = D_1 \cap \cdots \cap D_n$. Pero $cl_T B = \cap\{cl_T D_i: 1 \leqslant i \leqslant n\}$; por tanto, existe $D_{i_0} \in \mathscr{D}$ tal que $p \notin cl_T D_{i_0}$ y $C \subset cl_T D_{i_0}$. Por tanto, $\mathscr{B}$ es una base de cerrados de T y por el teorema de Sanin $\omega(X, \mathscr{D}) = \omega(X, \Delta\mathscr{D})$.

Escribiremos $C^*(X)$ para el conjunto de todas las funciones reales continuas y acotadas sobre X. Sea B un subconjunto de $C^*(X)$ que separa puntos y cerrados. La función evaluación determinada por B es la función e_B: $X \to \pi\{cl_R f(x): f \in B\}$ definida por las igualdades $g = \pi_g \circ e_B$, $g \in B$, donde π_g es la proyección del espacio producto sobre $cl_R g(X)$. Sabemos que e_B es un homeomorfismo de X sobre $e_B(X)$, por consiguiente, la clausura de $e_B(X)$ es una compactación Hausdorff de X que denotamos por $\sigma(X, B)$. Si K es una compactación de X escribiremos $E(K)$ para el conjunto $\{f|_X: f \in C^*(K)\}$.

Sea f una función real definida en X. Llamaremos conjuntos de Lebesgue de f a los conjuntos de la forma $L_\alpha(f) = \{x \in X: f(x) \leqslant \alpha\}$, $L^\alpha(f) = \{x \in X: f(x) \geqslant \alpha\}$, $\alpha \in R$. Si $\mathscr{E}$ es una familia de subconjuntos de X escribiremos $\lambda^*(\mathscr{E})$ para la familia de todas las funciones reales acotadas definidas en X cuyos conjuntos de Lebesgue pertenecen a $\mathscr{E}$.

Supongamos ahora que H es un subconjunto no vacío de $C^*(X)$ y sea $L(H)$ la familia de todos los conjuntos de Lebesgue de las funciones de H. Si $\Delta L(H)$ es la mínima familia de subconjuntos de X que contiene a $L(H)$ y es cerrada para uniones finitas e intersecciones finitas, es fácil probar que $\lambda^*(\Delta L(H))$ es un subretículo de $C^*(X)$ que contiene a H y a las funciones reales constantes. Notemos que si además H separa puntos y cerrados entonces $\Delta L(H)$ es una base de conjuntos cerrados de X.

3. **Teorema.** [2] Sea S un subespacio denso de un espacio topológico T y sea $g \in C^*(S)$. La función g se puede extender continuamente a T si y sólo si para todo par de números reales $\alpha < \beta$ los conjuntos $L_\alpha(g)$ y $L^\beta(g)$ tienen clausuras disjuntas en T.

4. **Proposición.** Si H es un subconjunto de $C^*(X)$ que separa puntos y cerrados, entonces $\sigma(X, H) \leqslant \omega(X, \Delta L(H))$.

Demostración. Del teorema anterior y de la propiedad WS2 se deduce que toda función de H se puede extender continuamente a $\omega(X, \Delta L(H))$. Por consiguiente, $H \subset E(\omega(X, \Delta L(H))$. Si $\mathscr{R}(H)$ es el mínimo subanillo de $C^*(X)$ que contiene a H y a las funciones reales constantes, entonces $\mathscr{R}(H) \subset E(\omega(X, \Delta L(H)(($. Por consiguiente, la clausura uniforme de $\mathscr{R}(H)$ está contenida en $E(\omega(X, \Delta L(H))$ y entonces $E(\sigma(X, H)) \subset E(\omega(X, \Delta L(H))$ ([2], prop. 1). Sea φ la identidad de $X \subset \omega(X, \Delta L(H))$ sobre $X \subset \pi\{cl_R f(x): f \in E(\sigma(X, H))\}$. Como las funciones $\pi_f \circ \varphi$ se extienden continuamente a $\omega(X, \Delta L(H))$ se sigue que φ admite una extensión continua a $\omega(X, \Delta L(H))$. Finalmente, como $\sigma(X, H)$ es un espacio de Hausdorff se tiene que la imagen por φ de $\omega(X, \Delta L(H))$ es $\sigma(X, H)$, luego $\sigma(X, H) \leqslant \omega(X, \Delta L(H))$.

Como ha sido puesto de manifiesto en [2] ciertas propiedades topológicas de $\sigma(X, H)$ pueden ser caracterizadas en términos de H y de X únicamente por medio de los conjuntos de Lebesgue de H. A ese respecto el autor ha introducido en [2] la siguiente noción de separación. Sean A y B dos subconjuntos de X. Diremos que H L-separa A y B si existen funciones $g_{kj} \in H$ y números reales $\alpha_{kj} < \beta_{kj} \leqslant \gamma_{kj} < \delta_{kj}$, $1 \leqslant k \leqslant n_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$ tales que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} \left(\bigcap_{k=1}^{n_j} g_{kj}^{-1}([\beta_{kj}, \gamma_{kj}]) \right)$$

y

$$B \subset \bigcap_{j=1}^{m} \left(\bigcup_{k=1}^{n_j} g_{kj}^{-1}(]-\infty, \alpha_{kj}] \cup [\delta_{kj}, +\infty[) \right)$$

El siguiente resultado ha sido probado en [2] y pone de manifiesto el papel fundamental de los conjuntos de Lebesgue de las funciones que genera la compactación.

5. **Proposición.** Sea H un subconjunto de $C^*(X)$ que separa puntos y cerrados. Dos subconjuntos A y B de X tienen clausuras disjuntas en $\sigma(X, H)$ si y sólo si H L-separa A y B.

6. **Teorema.** Sea H un subconjunto de $C^*(X)$ que separa puntos y cerrados. Entonces $\sigma(X, H) = \omega(X, \Delta L(H))$ si y sólo si H L-separa todo par de conjuntos disjuntos de $L(H)$.

Demostración. La necesidad de la condición es consecuencia de la propiedad WS2 y de la proposición anterior. Veamos la suficiencia. Sea $\mathscr{F}(L(H))$ la familia de las uniones finitas de conjuntos de $L(H)$, que es una base de conjuntos cerrados de X. De la hipótesis y de la proposición anterior se deduce que si A y B son elementos disjuntos de $\mathscr{F}(L(H))$, entonces $cl_\sigma A \cap cl_\sigma B = \phi$. Por consiguiente, existe una función $g \in C^*(\sigma(X, H))$ tal que $\sup\{g(x): x \in cl_\sigma A\} < \inf\{g(x): x \in cl_\sigma B\}$. Por tanto, el conjunto

$$\{f \in C^*(\omega(X, \mathscr{F}(L(H)))): f|_X \in E(\sigma(X, H))\}$$

es un subanillo de $C^*(\omega(X, \mathscr{F}(L(H))))$ que separa los puntos de $\omega(X, \mathscr{F}(L(H)))$, contiene las funciones reales constantes y es cerrado uniformemente. Por el teorema de Stone-Weierstrass se tiene que ese anillo coincide con $C^*(\omega(X, \mathscr{F}(L(H))))$. Como las compactaciones $\sigma(X, H)$ y $\omega(X, \mathscr{F}(L(H)))$ son de Hausdorff se sigue que $\sigma(X, H) = \omega(X, \mathscr{F}(L(H)))$. Del corolario 2 se deduce que $\sigma(X, H) = \omega(X, \Delta L(H))$.

Sea F un subconjunto de $C^*(X)$ y sean A y B dos subconjuntos de X. Se dice que F S-separa A y B si para cada $\delta > 0$ existe $f \in F$ tal que $0 \leqslant f \leqslant 1, f(A) \subset [0, \delta]$ y $f(B) \subset [1 - \delta, 1]$. Se dice que un subespacio vectorial E de $C^*(X)$ tiene la propiedad S si para cada función $f \in E$ y cada par de números reales $\alpha < \beta$, E S-separa $L_\alpha(f)$ y $L^\beta(f)$. Sea ahora E un subespacio vectorial de $C^*(X)$ que separa puntos y cerrados. Como ha sido probado en ([3], corolario 9), E tiene la propiedad S si y sólo si existe una compactación Hausdorff K de X tal que E es denso en $E(K)$*. El siguiente resultado es una caracterización de los subespacios vectoriales E de $C^*(X)$ que S-separan todo par de conjuntos disjuntos de $L(E)$.

7. **Teorema.** Sea E un subespacio vectorial de $C^*(X)$ que separa puntos y cerrados y tiene la propiedad S. Entonces E S-separa todo par de conjuntos disjuntos de $L(E)$ si y sólo si $\sigma(X, E) = \omega(X, \Delta L(E))$.

Demostración. La necesidad es consecuencia inmediata del teorema 6. Veamos la suficiencia. Si L y L' son conjuntos disjuntos de $L(E)$, entonces $cl_\omega L \cap cl_\omega L' = \phi$ y, por tanto, $cl_\sigma L \cap cl_\sigma L' = \phi$. Consecuentemente existe una función $h \in E(\sigma(X, E))$ tal que $h(L) = \{0\}$ y $h(L') = \{1\}$. Como E es denso en $E(\sigma(X, E))$, existen números reales $\alpha < \beta$ y una función $f \in E$ tales que $L_0(h) \subset L_\alpha(f)$ y $L^1(h) \subset L^\beta(f)$. Pero E S-separa $L_\alpha(f)$ y $L^\beta(f)$, luego E S-separa L y L'.

A continuación se dan varios ejemplos en relación con los resultados obtenidos.

8. **Ejemplo.** Es bien conocido que la compactación de Stone-Cech βX de X coincide con la compactación de Wallman-Sanin $\omega(X, Z(X))$. Vamos a dar un ejemplo de un subconjunto H de $C^*(X)$ que separa puntos y cerrados, $\sigma(X, H) = \omega(X, \Delta L(H))$ y la familia $Z(H)$ de los conjuntos cero de las funciones de H no es una subbase de conjuntos cerrados de X.

Sea $X = [0, +\infty[$ con la topología usual y sea $H = \{f\}$, donde $f(x) = e^{-x}$, $x \geqslant 0$. Es claro que H separa puntos y cerrados y que H L-separa todo par de conjuntos disjuntos de $L(H)$. Del teorema 6 se deduce entonces que $\sigma(X, H) = \omega(X, \Delta L(H))$. Notemos que en este caso $Z(H) = \{\phi\}$.

9. **Ejemplo.** A continuación vamos a dar un ejemplo de un anillo de Wallman A en el espacio discreto N de los números naturales tal que $\omega(N, Z(A)) < \sigma(N, A) = \omega(N, \Delta L(A))$.

Sea $B = \{h \in R^N: h$ es eventualmente constante$\}$. Entonces B es un subanillo de $C^*(N)$ y $Z(B) = \{M \subset N: M$ o bien $N \sim M$ es finito$\}$. No es difícil probar que B es un anillo de Wallman sobre N tal que $\omega(N, Z(B)) = N^*$ (la compactación de Alexandroff de N).

Sea f la función definida $f(2n) = 1/n, f(2n - 1) = 1 + 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ Sea A el subanillo de $C^*(N)$ engendrado por B y $\{f\}$. Como ha sido probado en ([1], ejemplo 6) $Z(A) = Z(B)$, por lo que A es un anillo de Wallman sobre N y $\omega(N, Z(A)) = N^*$.

Sea K la suma topológica de la compactación de Alexandroff P^* del conjunto P de los números naturales pares y de la compactación de Alexandroff I^* del conjunto I de los números naturales impares. Es claro que las funciones de A se pueden

* De hecho, $K = \sigma(X, E)$ por ([3], teorema 6) y ([2], proposición 1).

extender continuamente a K. Sea entonces $A_0 = \{g \in C^*(K) : g|_N \in A\}$. Puesto que A_0 es un subanillo de $C^*(K)$ que contiene las funciones reales constantes y separa los puntos de K, del teorema de Stone-Weierstrass se deduce que A_0 es denso en $C^*(K)$. Por consiguiente, $\sigma(N, A) = K$.

Veamos finalmente que $\sigma(N, A) = \omega(N, \Delta L(A))$. Por el teorema 6 es suficiente probar que A L-separa todo par de conjuntos disjuntos de $L(A)$. En primer lugar probaremos que si M es un subconjunto de N tal que $M \cap P$ es finito o cofinito en P y $M \cap I$ es finito o cofinito en I, entonces M y $N \sim M$ están L-separados por A. Supongamos que $M \cap P$ es finiro y que $M \cap I = \{m_1, m_2, ..., m_k, m_k + 1, m_k + 2, ...\}$, $m_i < m_{i+1}$. Sea h la función que en los puntos del conjunto $\{m_1, m_2, ..., m_{k-1}\} \cup (M \cap P)$ vale 1 y en los restantes puntos de N vale 0. Entonces $h \in B$,

$$M \subset h^{-1}([1/2, 1]) \cup f^{-1}([1, 1 + 2/(1 + m_k)])$$

y

$$N \sim M \subset h^{-1}(]-\infty, 0]) \cap f^{-1}(]-\infty, 3/4] \cup [1 + 2/m_k, +\infty[)$$

Por tanto, A L-separa M y $N \sim M$. Los restantes casos se prueban de forma análoga.

Sea $g \in A$ y $\beta \in R$. Entonces $g = h_0 + h_1 f + \cdots + h_p f^p$, donde $h_i \in B$, $0 \leqslant i \leqslant p$, $p \in N$. Sea $m_0 \in N$ tal que para todo $m \geqslant m_0$, $h_i(m) = \alpha_i \in R$, $0 \leqslant i \leqslant p$. Si $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$, entonces $g \in B$ y $L_\beta(g)$ es finito o cofinito, por consiguiente, B L-separa $L_\beta(g)$ y $N \sim L_\beta(g)$. Supongamos ahora que para algún $i_0 \geqslant 1$, $\alpha_{i_0} \neq 0$. Entonces $g(2n) = \alpha_0 + \alpha_1/n + \cdots + \alpha_p/n^p$, $g(2n-1) = \alpha_0 + \alpha_1(n+1)/n + \cdots + \alpha_p (n+1)^p/n^p$, si $2n - 1 \geqslant m_0$. En este caso se tiene que $L_\beta(g) \cap P$ es finito o cofinito en P y que $L_\beta(g) \cap I$ es finito o cofinito en I; por consiguiente, A L-separa $L_\beta(g)$ y $N \sim L_\beta(g)$.

10. **Ejemplo.** En [1] se dan condiciones sobre un anillo de Wallman A en un espacio X para que las compactaciones $\sigma(X, A)$ y $\omega(X, Z(A))$ sean comparables. Como hemos probado en la proposición 4, siempre se verifica la desigualdad $\sigma(X, H) \leqslant \omega(X, \Delta L(H))$. A continuación damos un ejemplo de un anillo de Wallman H en un espacio X tal que las compactaciones $\sigma(X, H)$ y $\omega(X, Z(H))$ no son comparables ni homeomorfas.

Sea X el subespacio de R formado por $[-1, 0[\cup N$. Sea H el subconjunto de $C^*(X)$ formado por las funciones g tales que su restricción a $[-1, 0[$ pertenece a $E([-1, 0])$ y su restricción a N pertenece a A, A es el anillo de Wallman sobre N considerado en el ejemplo anterior. Entonces H es un subanillo de $C^*(X)$ que contiene las funciones reales constantes y además $Z(H) = \{M \subset X : M \cap [-1, 0]$ es cerrado y $M \cap N$ o bien $N \sim M$ es finito$\}$ (notemos que como $[-1, 0[$ es un espacio métrico, todo conjunto cero de $[-1, 0[$ es la intersección de un conjunto cero de $[-1, 0]$ con $[-1, 0[$. Por consiguiente, $\omega(X, Z(H))$ es la suma topológica de la compactación de Stone-Cech de $[-1, 0[$ y de la compactación de Alexandroff de N.

Sea K la suma topológica de los espacios compactos $[-1, 0]$, P^* e I^*. Las funciones de H se pueden extender continuamente K y el conjunto W de tales extensiones es un subanillo de $C^*(K)$ que contiene las funciones reales constantes y separa los puntos de K. Por el teorema de Stone-Weierstrass W es uniformemente denso en $C^*(K)$, luego $K = \sigma(X, H)$.

Puesto que el cardinal de $\omega(X, Z(H))$ es 2^c ([4]) y el de $\sigma(X, H)$ es c se tiene que las compactaciones consideradas no son homeomorfas y que no se verifica la desigualdad $\omega(X, Z(H)) \leqslant \sigma(X, H)$. No es difícil probar que tampoco es cierta la desigualdad $\sigma(X, H) \leqslant \omega(X, Z(H))$.

11. **Ejemplo.** Vamos a dar un ejemplo de anillo de Wallman A sobre N tal que $\sigma(N, A) = \omega(N, Z(A)) < \omega(N, \Delta L(A))$.

Sea B el subanillo de $C^*(N)$ formado por las funciones eventualmente constantes y sea A el subanillo de $C^*(N)$ engendrado por B y la función f definida $f(n) = (-1)^n/n$, $n = 1, 2, \ldots$ Veamos que $Z(A) = Z(B)$. Sea $g \in A \sim B$. Razonando como en el ejemplo 9 existe $m_0 \in N$ tal que

$$g(n) = \alpha_0 + \alpha_1(-1)^n/n + \cdots + \alpha_p(-1)^{np}/n^p \ , \ n \geqslant m_0$$

donde $\alpha_i \in R$ con $\alpha_{i_0} \neq 0$ para algún $i_0 \geqslant 1$. Por consiguiente, g se anulo a lo sumo en un número finito de puntos del conjunto $\{m_0, m_0 + 1, \ldots\}$, consecuentemente el conjunto $Z(g)$ es finito. Luego $Z(B) = Z(A)$. Entonces A es un anillo de Wallman y $\omega(N, Z(A)) = N^*$. Además, puesto que la función $f \in E(N^*)$ se sigue que $\sigma(N, A) = N^*$. Finalmente, como $L_0(f) \cap L^0(f) = \phi$ y $cl_{N^*}L_0(f) \cap cl_{N^*}L^0(f) \neq \phi$ se tiene que $\omega(N, Z(A)) \neq \omega(N, \Delta L(A))$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BLASCO, J. L.: «Algunos resultados sobre anillos de Wallman», *Collect. Math.*, *31* (1980), 103-111.

[2] BLASCO, J. L.: «Hausdorff compactifications and Lebesgue sets», *Top. and its Appl.*, *15* (1983), 111-117.

[3] BLASCO, J. L., y MOLTÓ, A.: «On the uniform closure of a linear space of bounded real-valued functions», *Ann. Mat. Pura ed Appl.*, *134* (1983), 233-239.

[4] GILLMAN, y JERISON, M.: *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, 1960.

[5] HENRIKSEN, M., y JOHNSON, D. G.: «On the structure of a class of archimedean lattice-ordered algebras», *Fund. Math.*, L (1961), 73-94.

[6] NAGATA, J.: *Modern General Topology*, North-Holland P. Comp., Amsterdam, 1968.