La capacidad de expresión de L_S frente a propiedades topológicas

Por MARÍA TERESA HORTALÁ GONZÁLEZ

Recibido: 6 marzo 1982

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. ALBERTO DOU MASDEXESÁS

Abstract

Classical Model Theory deals with algebraic structures with the aid of formal languages. During the last few years a new line of investigation in this subjet has been concerned with the search for formal languages which enable the study of structures endowed with a topology, metric, uniformity or proximity.

In the book by Flum/Ziegler, mentioned in the bibliography, the L_t language is studied in detail. This language is adequate, not only for the study of topological spaces but also for topological structures such as topological groups, fields and vector spaces.

The paper by Dahn on an L_s language published in 1980, shows that it is appropiate for the Lowenhein-Skolem theorem and is ω-compact. It also proves that L_t restricted to metrizable structures is a sublogic of L_s.

In this paper we show that for metrizable topological structures L_t is equivalent to the L_s sublanguage torned by the sentences which express the properties which only depend on the topology induced by the metric of the structure. Thus we obtain a syntactical characterization of those sentences. This result is a consequence of the Lindstrom theorem for L_t (see (4), pág. 48-61), although a miror hick is required in the proof, since metrizable is not axiomatizable in L_t.

In 2 we introduce a few concepts and we prove that metrizable is not finitely axiomatizable in $(L\omega_1\omega)_t$.

In 3 we show the above-mentioned result.

1. INTRODUCCION DE CONCEPTOS

A lo largo de este trabajo vamos a suponer que S es un subconjunto cualquiera de R que contiene al cero y que L es una signatura a lo sumo numerable.

L_t denotará al lenguaje topológico definido por L (véase [4]).

$(L_{\omega_1\omega})_t$ denotará al lenguaje topológico con conjunciones infinitas definido por L (véase [4]).

L_2^d denotará al lenguaje monádico de 2.º orden con modelos débiles.

L_S denotará al lenguaje métrico definido por S y L (véase [2]).

Las letras $\mathscr{L}$ denotarán a los sistemas lógicos formados por el conjunto de sentencias L y la relación del modelo $|=$, es decir, $\mathscr{L} = (L, |=)$.

Las letras góticas $\mathfrak{a}, \mathfrak{B}, \ldots$ denotarán a las estructuras algebraicas y letras latinas A, B, ... a sus dominios.

Los pares $(\mathfrak{a}, \mathscr{T})$ denotarán a las estructuras topológicas, siendo $\mathscr{T}$ la topología sobre A. Los pares $(\mathfrak{a}, d)$ denotarán estructuras métricas, siendo d una métrica sobre A. Diremos que la estructura $(\mathfrak{a}, \mathscr{T})$ *es numerable* si A es a lo sumo numerable y $\mathscr{T}$ tiene una base numerable.

Si d es una métrica A, $\mathscr{T}_d$ denotará a la topología inducida por d en A y top $(\mathfrak{a}, d) = (\mathfrak{a}, \mathscr{T}_d)$ es la estructura topológica asociada a la estructura métrica $(\mathfrak{a}, d)$.

La definición de la sentencia *haus* (Hausdorff o T_2), *reg* (regular) y *bas* (base de una topología), así como la definición y propiedades del concepto de homeomorfía $(\simeq t)$ pueden consultarse en [4].

1. **Lema.** La clase de las L-estructuras topológicas $(\mathfrak{a}, \mathscr{T})$ que son metrizables no es finitamente axiomatizable en $(L_{\omega_1\omega})_t$.

Demostración. Supongamos que existe una sentencia $\phi \in (L_{\omega_1\omega})_t$ tal que

$$(\mathfrak{a}, \mathscr{T}) |= \phi \quad \text{si} \quad (\mathfrak{a}, \mathscr{T}) \text{ es metrizable}$$

Sabemos que la sentencia $\psi = (haus \wedge reg \wedge \neg\phi) \in (L_{\omega_1\omega})_t$ es satisfactible; aplicando a ψ el teorema de Lowenheim-Skolem para $(L_{\omega_1\omega})_t$ obtenemos: existe $(\mathfrak{B}, \sigma)$ numerable con $(\mathfrak{B}, \sigma) \models \psi$.

Luego $(\mathfrak{B}, \sigma) \models (haus \wedge reg)$ y σ posee una base numerable, es decir, $(\mathfrak{B}, \sigma)$ es metrizable.

Por otra parte, $(\mathfrak{B}, \sigma) \models \phi$, es decir, $(\mathfrak{B}, \sigma)$ es no metrizable.

De esta contradicción se deduce que el concepto de metrizable no es finitamente axiomatizable en $(L_{\omega_1\omega})_t$.

Como consecuencia obtenemos:

2. **Corolario.** La clase de las L-estructuras topológicas $(\mathfrak{a}, \mathscr{T})$ que son metrizables no es L_t-axiomatizable.

3. **Definición.** Sea $\phi \in L_S$ una sentencia de L_S diremos que ϕ *depende sólo de la topología:* $\Leftrightarrow$ P.t. $(\mathfrak{a}, d)$, $(\mathfrak{B}, d')$ estructuras métricas con

$$\operatorname{top}(\mathfrak{a}, d) \simeq \operatorname{top}(\mathfrak{B}, d')$$

verifica:

$$(\mathfrak{a}, d) \models \phi \quad \text{sii} \quad (\mathfrak{B}, d') \models \phi$$

Llamaremos $L_S^t = \{\phi \in L_S \mid \phi$ depende sólo de la topología$\}$.

En [2] se describe un método efectivo para obtener a partir de una sentencia ϕ de L_t una sentencia $\bar{\phi}$ de L_S que verifique: P.t. estructura métrica $(\mathfrak{a}, d)$:

$$(\mathfrak{a}, d) \models \bar{\phi} \quad \text{sii} \quad \operatorname{top}(\mathfrak{a}, d) \models \phi$$

Llamaremos $\bar{L}_t = \{\bar{\phi} \in L_S \mid \phi \in L_t\}$.

4. **Lema.** $\bar{L}_t \subseteq L_S^t$.

Demostración. Sea $\bar{\phi} \in \bar{L}_t$ y sea $(\mathfrak{a}, d) \models \bar{\phi}$.

Por definición de $\bar{L}_t$ tenemos: $\operatorname{top}(\mathfrak{a}, d) \models \phi$. Consideremos una estructura métrica $(\mathfrak{B}, d')$ tal que $\operatorname{top}(\mathfrak{a}, d) \simeq_t \operatorname{top}(\mathfrak{B}, d')$ entonces $\operatorname{top}(\mathfrak{B}, d') \models \phi$; aplicando de nuevo la definición de $\bar{L}_t$ tenemos: $(\mathfrak{B}, d') \models \bar{\phi}$. Luego $\bar{\phi} \in L_S^t$.

2. CAPACIDAD DE EXPRESION DE L_S^t

Queremos comprobar que L_S^t coincide con $\bar{L}_t$ para ello demostraremos el siguiente teorema.

5. **Teorema.** P.t. $\phi \in L_S^t$ existe $\hat{\phi} \in L_t$ tal que P.t. $(\mathfrak{a}, d)$ estructura métrica se cumple:

$$(\mathfrak{a}, d) \models \phi \quad \text{si} \quad \operatorname{top}(\mathfrak{a}, d) \models \hat{\phi}$$

La demostración de este teorema se basa en contradecir el teorema de Lindström de $\mathscr{L}_t$ para estructuras topológicas que afirma:

P.t. sistema lógico regular $\mathscr{L}$ para estructuras topológicas que sean modelo del conjunto Φ de sentencias de L_t y que tenga al menos la misma capacidad de expresión que $\mathscr{L}_t$: si $\mathscr{L}$ verifica el teorema de Lowenheim-Skolem y es ω-compacto, *entonces* $\mathscr{L}$ tiene la misma capacidad de expresión que $\mathscr{L}_t$.

$\mathscr{L}$ sistema lógico regular significa que $\mathscr{L}$ verifica los lemas de sustitución, coincidencia, relativización e isomorfía y que contiene conectivos booleanos (véase [3], 256-279).

Demostración. Supongamos que existen al menos un L_0, S_0 y una sentencia $\psi \in (L_0)^t_{S_0}$ para la que existe $\hat{\psi} \in (L_0)_t$ que verifique lo pedido en el teorema.

Construimos un sistema lógico regular abstracto $\mathscr{L} = (\mathrm{sent}_{\mathscr{L}}, \models_{\mathscr{L}})$ que contradice el teorema de Lindstrom de $\mathscr{L}_t$ de la siguiente manera:

$$\mathrm{sent}_{\mathscr{L}}(L) = \begin{cases} L_t & \text{si} \quad \psi \notin L^t_S \\ \text{Boole } (L_t \cup [\psi\}) & \text{si} \quad \psi \in L^t_S \end{cases}$$

Boole $(L_t \cup \{\psi\})$ denota al cierre booleano de L_t y $\{\psi\}$.

Antes de definir la relación $\models \mathscr{L}$ vamos a demostrar el siguiente lema.

6. **Lema.** Es posible asignar a cada L-estructura topológica $(\mathfrak{a}, \sigma)$ que sea modelo de (*haus* $\wedge$ *reg*), una L-estructura topológica $T(\mathfrak{a}, \sigma)$ y una L_S-estructura métrica $M(\mathfrak{a}, \sigma)$ de manera que se verifique:

(i) Si $(\mathfrak{a}, \sigma) \simeq_t (\mathbf{L}, \mathscr{T})$, entonces $T(\mathfrak{a}, \sigma) = T(\mathfrak{B}, \mathscr{T})$.
(ii) $T(\mathfrak{a}, \sigma)$ es numerable y $T(\mathfrak{a}, \sigma) \equiv_t (\mathfrak{a}, \sigma)$.
(iii) Si $(\mathfrak{a}, \sigma)$ es numerable, entonces $T(\mathfrak{a}, \sigma) \simeq_t (\mathfrak{a}, \sigma)$.
(iv) $\mathrm{top}\,(M(\mathfrak{a}, \sigma)) = T(\mathfrak{a}, \sigma)$.

Demostración. Suponemos que, para cardinal κ, partimos de una familia de L-estructuras topológicas que verifican lo siguiente:

Su dominio es el cardinal κ, cada estructura de la familia es modelo de (*haus* $\wedge$ *reg*), los elementos de la familia no son homeomorfos dos a dos y para cada L-estructura $(\mathfrak{B}, \mathscr{T})$ de dominio κ que sea modelo de (*haus* $\wedge$ *reg*) existe un elemento de la familia $R(\mathfrak{B}, \mathscr{T})$ y uno sólo que es homeomorfo a él y que llamaremos representante de $(\mathfrak{B}, \mathscr{T})$.

Convenio. $(\mathfrak{a}, \sigma)$ denotará a partir de quí al representante $R(\mathfrak{a}, \sigma)$ que tiene unívocamente asociado.

Definición de $T(\mathfrak{a}, \sigma)$ *y* $M(\mathfrak{a}, \sigma)$:

a) Si $(\mathfrak{a}, \sigma)$ es numerable:

$$T(\mathfrak{a}, \sigma) := (\mathfrak{a}, \sigma)$$
$$M(\mathfrak{a}, \sigma) := (\mathfrak{a}, d) \quad \text{con} \quad \mathscr{T}_d = \sigma$$

b) Si $(\mathfrak{a}, \sigma)$ no es numerable.

Asociamos a $(\mathfrak{a}, \sigma)$ la L_2-estructura débil con dos clases de variables $(\mathfrak{a}, \sigma; \varepsilon)$, donde ε es la relación de pertenencia entre los elementos de A y los elementos de la base de la topología σ. Como $(\mathfrak{a}, \sigma)$ es modelo de (*haus* $\wedge$ *reg*) y estructura topológica, se verifica que $(\mathfrak{a}, \sigma; \varepsilon)$ es modelo de (*haus* $\wedge$ *reg* $\wedge$ *bas*)* que es la sentencia de L^d_2 que se obtiene escribiendo (*haus* $\wedge$ *reg* $\wedge$ *bas*) con dos clases de variables.

Consideremos ahora una subestructura elemental numerable de $(\mathfrak{a}, \sigma; \varepsilon)$ que denotaremos $(\mathfrak{B}, F; E)$, E es una relación de equivalencia entre los elementos de B y de F. $(\mathfrak{B}, F; E)$ es modelo de $(haus \wedge reg \wedge bas)^*$ en L_2^d, luego existe una estructura topológica $(\mathfrak{B}, \mathscr{T})$ que será modelo de $(haus \wedge reg)$ en L_t. $(\mathfrak{B}, \mathscr{T})$ se construye tomando $\mathscr{T} = \{Ef \mid f \in E\}$, siendo $Ef = \{b \in B \mid bEf\}$ y usando que en $\mathscr{L}_2^d$ no se pueden escribir fórmulas del tipo $x^2 = y^2$, para x^2 e y^2 variables de tipo 2.

Entonces:

$$T(\mathfrak{a}, \sigma) := (\mathbf{L}, \mathscr{T})$$
$$M(\mathfrak{a}, \sigma) := (\mathfrak{B}, d) \quad \text{con} \quad \mathscr{T}_d = \mathscr{T}$$

La estructura $M(\mathfrak{a}, \sigma)$ definida en *a)* y *b)* existe por el lema de Urysohn.

Se comprueba fácilmente que las estructuras $T(\mathfrak{a}, \sigma)$ y $M(\mathfrak{a}, \sigma)$ definidas de este modo verifican las propiedades (i)-(iv) del lema 6.

Definición de la relación $\models \mathscr{L}$:

$$\begin{array}{lll}
(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}} \phi & \text{para } \phi \in L_t & \Leftrightarrow T(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}_t} \phi \\
(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}} \psi & & \Leftrightarrow M(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}_S} \psi \\
(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}} \phi & & \Leftrightarrow \text{no}\,(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}_S} \phi \\
(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}} \phi_1 \wedge \phi_2 & & \Leftrightarrow (\mathfrak{a}, \sigma) =_{\mathscr{L}} \phi_1 \text{ y } (\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}} \phi_2
\end{array}$$

7. **Lema.** El sistema lógico $\mathscr{L} = (\text{sent}_{\mathscr{L}}(L), \models_{\mathscr{L}})$ es regular.

Demostración. Se comprueba rutinariamente que $\mathscr{L}$ verifica el lema de sustitución, coincidencia, relativización y que contiene a los conectivos booleanos.

El lema de isomofía es el que motivó la introducción de los puntos (i) e (iv) en el lema 6.

En efecto, sean $(\mathfrak{a}, \sigma) \simeq_t (\mathfrak{B}, \mathscr{T})$ y sea $\phi \in \text{sent}_{\mathscr{L}}(L)$; hemos de comprobar que $(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}} \phi$ si $(\mathfrak{B}, \mathscr{T}) \models_{\mathscr{L}} \phi$.

La demostración la realizamos por inducción sobre la construcción de ϕ: $\phi \in L_t$: trivial.

$\phi := \psi \in L_{S_0}^t$. En este caso: $(\mathfrak{a}, \sigma) \models \psi \Leftrightarrow M(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}_{S_0}} \psi$.

Por la propiedad (iv) del lema 6: $\text{top}\,(M(\mathfrak{a}, \sigma)) = T(\mathfrak{B}, \sigma)$ y $\text{top}\,(M(\mathfrak{B}, \mathscr{T})) = T(\mathfrak{B}, \mathscr{T})$.

Por la propiedad (i) del lema 6: $T(\mathfrak{a}, \sigma) = T(\mathfrak{B}, \mathscr{T})$. Por otra parte, $\psi \in L_S^t$, luego

$$M(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}_{S_0}} \psi \quad \text{sii} \quad M(\mathfrak{B}, \mathscr{T}) \models_{\mathscr{L}_{S_0}} \psi$$

Los casos restantes son triviales.

8. **Lema.** $\mathscr{L}$ verifica el teorema de Lowenheim-Skolem, es decir: P.t. $\Phi \subset \mathscr{L}$ con $(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}} \Phi$ existe $(\mathfrak{B}, \mathscr{T}) \models \Phi$ y $(\mathfrak{B}, \mathscr{T})$ es numerable.

Demostración. Como la estructura $T(\mathfrak{a}, \sigma)$ es numerable, basta con demostrar: P.t. $(\mathfrak{a}, \sigma)$ $\mathscr{L}$-estructura y p.t. $\phi \in \mathscr{L}$ se verifica:

$$(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}} \phi \Leftrightarrow T(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}} \phi$$

Demostración por inducción sobre la construcción de ϕ:

— $\phi \in L_t$: Se deduce de 6(ii).
— $\phi := \psi \in L^t_{S_0}$: Hemos de demostrar que:

$$M(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}_{S_0}} \psi \quad \text{si} \quad MT(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}_{S_0}} \psi$$

Como ψ sólo depende de la topología, basta con comprobar que

$$\operatorname{top}(MT(\mathbf{a}, \sigma)) \simeq_t \operatorname{top}(M(\mathfrak{a}, \sigma))$$

Por 6(iv):

$$\operatorname{top}(MT(\mathbf{a}, \sigma)) = TT(\mathfrak{a}, \sigma) \quad \text{y} \quad \operatorname{top}(M(\mathfrak{a}, \sigma)) = T(\mathfrak{a}, \sigma)$$

Por 6(ii): $T(\mathfrak{a}, \sigma)$ es numerable.
Por 6(iii): $TT(\mathfrak{a}, \sigma) \simeq_t T(\mathbf{a}, \sigma)$.
Los otros dos casos se obtienen trivialmente.

9. **Lema.** $\mathscr{L}$ es ω-compacto, es decir: P.t. $\Phi \subset \mathscr{L}$: Si Φ es finitamente satisfactible, entonces Φ es satisfactible.

Demostración. Para utilizar la ω-compacidad de $\mathscr{L}_{S_0}$, necesitamos demostrar:

$$\text{P.t. } \phi \in \mathscr{L} \text{ ex } \tilde{\phi} \in \mathscr{L}_{S_0}$$

tal que

P.t. $(\mathfrak{a}, \sigma)$ $\mathscr{L}$-estructura se verifica:

$$(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}} \phi \quad \text{si} \quad M(\mathfrak{a}, \sigma) \models_{\mathscr{L}_{S_0}} \tilde{\phi}$$

Demostración por inducción sobre la construcción de ϕ:

Para $\phi \in L_t$ tomamos $\tilde{\phi} := \phi^*$ descrita en [2], pág. 80.
Para $\phi := \psi$ tomamos $\tilde{\phi} := \psi$
Para $\phi := \phi_1$ tomamos $\tilde{\phi} := \neg\tilde{\phi}_1$
Para $\phi := \phi_1 \wedge \phi_2$ tomamos $\tilde{\phi} := \tilde{\phi}_1 \wedge \tilde{\phi}_2$

Es claro que este $\tilde{\phi}$ así definido verifica la condición anterior.

Luego: P.t. $\Phi_0 \subset \Phi$ finito: Satisf.$_{\mathscr{L}}(\Phi_0)$ sii Satisf.$_{\mathscr{L}_{S_0}}(\tilde{\Phi}_0)$. Como $\mathscr{L}_{S_0}$ es ω-compacto: Satisf.$_{\mathscr{L}_{S_0}}(\Phi) \Rightarrow$ Satisf.$_{\mathscr{L}}(\Phi)$.

Asi pues, hemos construido un sistema lógico $\mathscr{L}$ que contradice el teorema de Lindström de $\mathscr{L}_t$ para estructuras topológicas modelos (*haus* $\wedge$ *reg*); por tanto, el teorema queda demostrado.

10. **Corolario.** L^t_S coincide con $\bar{L}_t$.

Demostración. Sea $\phi \in L^t_\omega$ por el teorema 5 sabemos que: ex $\hat{\phi} \in L_t$ con $(\mathfrak{a}, d) \models \phi$ sii top $(\mathfrak{a}, d) \models \hat{\phi}$. Consideramos $\hat{\phi} \in \bar{L}_t$, vamos a comprobar que: $\bar{\hat{\phi}} \models_{\mathscr{L}_{S_0}} \dashv \phi$.

En efecto:

$$(\mathfrak{a}, d) \models \phi \text{ equivale por el teorema 5, a: } (\mathfrak{a}, \mathscr{C}d) \models \hat{\phi}$$

La definición de $\bar{L}_t$ implica que:

$$\operatorname{top}(\mathfrak{a}, d) \models \hat{\phi} \quad \text{sii} \quad (\mathfrak{a}, d) \models \bar{\hat{\phi}}$$

De este modo obtenemos una caracterización sintáctica de las sentencias de L_S que sólo dependen de la topología, puesto que son aquellas fórmulas de L_S que provienen de transformar fórmulas de L_t mediante el proceso definido en [2], salvo equivalencia lógica.

BIBLIOGRAFIA

[1] BELL, S., y MACHOVER, M.: *A course in mathematical Logic*, North-Holland (1977).

[2] DAHN, BERND I.: «First order Logics for methric structures», *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, vol. 24 (1980).

[3] EBBINGHAUS, H. D.; FLUM, J., y THOMAS, W.: «Einführung in die Mathematische Logik», *Wissenschaftliche Buchgessellschaft*, (1978).

[6] FLUM, J., y ZIEGLER, M.: «Topological model theory», *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, (1980).