Sobre la propiedad de extensión en espacios p-normados

Por JOSÉ MANUEL MIRA ROS

Recibido: 3 marzo 1982

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO NUMERARIO D. BALTASAR RODRÍGUEZ-SALINAS

Un espacio vectorial topológico Y se dice que tiene la propiedad de extensión respecto de un espacio vectorial topológico X si para cada subespacio M de X y cada aplicación lineal continua $T: M \to Y$ existe una extensión lineal continua $\bar{T}: X \to Y$. Si Y tiene la propiedad de extensión respecto de cada uno de los elementos de una clase $\mathscr{C}$ de espacios vectoriales topológicos se dice que Y es inyectivo en $\mathscr{C}$.

El teorema de Hahn-Banach establece que R (o C) son espacios inyectivos en la clase de los espacios localmente convexos reales (o complejos). Sin embargo, N. K. Kalton [6] ha probado que R (o C) no es inyectivo en cualquier clase de espacios vectoriales topológicos que incluya a los F-espacios. Más aún, que para cualquier F-espacio no localmente convexo real (o complejo), R (o C) no tiene la propiedad de extensión respecto de él.

En la clase de los espacios normados reales o complejos y en la clase de los espacios normados ultramétricos sobre un cuerpo valorado han sido caracterizados los espacios inyectivos tales que $\|\bar{T}\| = \|T\|$ (Cfr. [8], [3], [4] y [5]). No conocemos la existencia de ninguna caracterización de los espacios inyectivos de tales clases sin la hipótesis restrictiva de que la extensión conserve la norma.

A diferencia de lo que ocurre en espacios de Banach, W. Gejler [2] ha obtenido que para cualquier clase de espacios que contenga a los p-Banach reales o complejos cuyo dual separe puntos el único espacio inyectivo es el nulo.

Este resultado acaba con las esperanzas de obtener un teorema de tipo Hahn-Banach en esta situación. No obstante, el manejo frecuente en la práctica de espacios concretos hace que resulte de interés conocer si un determinado espacio tiene la propiedad de extensión respecto de otro. En este trabajo se plantea el estudio de la propiedad de extensión de un espacio localmente acotado fijo respecto de un F-espacio dado.

El resultado central es la proposición 3, que establece una condición necesaria de carácter general para que el espacio localmente acotado Y tenga la propiedad de extensión respecto de un F-espacio X en términos de las sucesiones básicas de éste.

Como consecuencia se obtiene que es condición necesaria para que un espacio p-normado sobre un cuerpo valorado completo y no trivial tenga la propiedad de extensión respecto de un F-espacio con base es que éste sea localmente p-convexo. La existencia de base es sólo una condición suficiente para la validez del resultado anterior, y de hecho se prueba que existen espacios con dual nulo que lo verifican.

En lo que sigue $(K, |\cdot|)$ designa un cuerpo valorado no trivial y completo.

Una F-seminorma en un espacio vectorial X sobre K es una función real no negativa η que satisface:

i) $\eta(x + y) \leqslant \eta(x) + \eta(y)$; $x, y \in X$
i) $\eta(ax) \leqslant \eta(x)$; $a \in K$, $|a| \leqslant 1$, $x \in X$
iii) $\lim\limits_{a \to 0} \eta(ax) = 0$; $a \in K$, $x \in X$
iv) $\lim\limits_{x \to 0} \eta(ax) = 0$; $a \in K$, $x \in X$

Si además $\eta(x) = 0$ implica $x = 0$, recibe el nombre de F-norma. Una F-seminorma define en la forma habitual una topología vectorial pseudometrizable (metrizable si es F-norma) en X. En el caso de que K sea el cuerpo real o complejo con la valoración ordinaria la condición iv) es consecuencia de las otras tres. Si la valoración de K es no arquimediana es necesario exigir iv) para que engendre una topología vectorial.

Una familia $(\eta_i)_{i \in I}$ de F-seminormas en X permite definir una topología vectorial en X. Y una argumentación paralela al caso real o complejo prueba que, recíprocamente, cada topología vectorial en X puede definirse mediante una colección de F-seminormas; siendo suficiente una única F-norma en el caso de que la topología sea metrizable. Un espacio vectorial topológico metrizable y completo se conoce con el nombre de F-espacio.

Diremos que una F-seminorma η es α-subhomogénea cuando

$$\eta(ax) \leqslant |a|^{\alpha} \eta(x) \quad \text{si} \quad |a| > 1$$

1. **Lema.** Sea X un espacio vectorial topológico sobre K cuya topología viene engendrada por una familia $(\eta_i)_{i \in I}$ de F-seminormas, siendo η_i α_i-homogénea ($i \in I$) y $\sup\limits_{i \in I} \alpha_i = \alpha < \infty$.'Sean (Y, v) un espacio cuasinormado sobre K y T una aplicación lineal de X en Y. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que T sea continua es la existencia de un subconjunto finito de I, J, y constantes $M > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$[v(T(x))]^{\alpha} \leqslant M \max_{i \in J} \eta_i(x)$$

para cada $x \in X$ con $\max\limits_{i \in J} \eta_i(x) < \varepsilon$.

Demostración. Evidentemente la condición es suficiente.

Si T es continua, existen J, subconjunto finito de I y $\delta > 0$ tales que $v(T(x)) \leqslant 1$ siempre que

$$\max_{i \in J} \eta_i(x) < \delta$$

Sea

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\rho^{-2\alpha}\delta, \quad \text{donde} \quad \rho = \inf\{|a|;\, a \in K, |a| > 1\}$$

Si

$$\max \eta_i(x) < \varepsilon \quad \text{y} \quad 0 < \omega < \rho^{-2}\left(\frac{1}{2}\delta\right)^{1/\alpha} - \max_{i \in J}{}^{1/\alpha} \eta_i(x)$$

sean $b \in K$ tal que

$$\max_{i \in J}{}^{1/\alpha} \eta_i(x) \leqslant |b| < \rho\left(\max_{i \in J}{}^{1/\alpha} \eta_i(x) + \omega\right)$$

y $a \in K$ tal que

$$\rho^{-1}\left(\frac{1}{2}\delta\right)^{1/\alpha} < |a| \leqslant \delta^{1/\alpha}$$

Puesto que

$$\max \eta_i(b^{-1}ax) \leqslant |b^{-1}|^\alpha |a|^\alpha \max_{i \in J} \eta_i(x) \leqslant \delta$$

se tiene

$$[v(T(x))]^\alpha \leqslant M \max_{i \in J} \eta_i(x)$$

donde $M = 2\delta^{-1}\rho^{2\alpha}$, siempre que $\max_{i \in J} \eta_i(x) < \varepsilon$.

Observe que en caso de que el cardinal de I sea contable, el resultado anterior adquiere una forma más simple como consecuencia de que la topología de X puede definirse por una única F-seminorma α-subhomogénea; basta tener en cuenta que

$$\eta(x) = \sum_n \left(\frac{1}{2}\right)^n \eta_n(x)\left(1 + \eta_n(x)\right)^{-1}$$

engendra la misma topología que $(\eta_n)_{n \in N}$ (el caso finito es trivial).

Una sucesión $(e_n)_{n \in N}$ en un espacio vectorial topológico X recibe el nombre de base si cada $x \in X$ admite una expresión única en la forma

$$x = \sum_n a_n e_n \quad ; \quad a_n \in K,\; n \in N$$

Una sucesión $(e_n)_{n \in N}$ de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial topológico separado X sobre K se llama sucesión básica si $(e_n)_{n \in N}$ es una base del subespacio lineal cerrado (en la compleción $\hat{X}$ de X) que engendra.

La proposición siguiente generaliza un resultado bien conocido para F-espacios reales o complejos (cfr. Rolewicz [9]).

2. **Lema.** Sea $(e_n)_{n\in N}$ una sucesión de vectores linealmente independientes en un espacio matrizable X sobre K. Son equivalentes:

i) $(e_n)_{n\in N}$ es una sucesión básica en X.

ii) La familia $(S_n)_{n\in N}$ definida en $E = \text{lím}\,\{(e_n)_{n\in N}\}$ por

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \quad ; \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in \text{lin}\,\{(e_n)_{n\in N}\}$$

es equicontinua.

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii). Si η es una F-norma que define la topología de $\hat{X}$, la función

$$\eta'(x) = \sup_n \eta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) \quad ; \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in \bar{E}$$

es una F-forma que define en $\bar{E}$ una topología vectorial metrizable y completa. El teorema de la aplicación abierta asegura que dicha topología coincide con la definida por η.

Continuando con la notación S_n para la extensión a $\bar{E}$ de las aplicaciones lineales antes definidas se tiene

$$\eta(S_n(x)) \leqslant \eta'(x) \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

y, por tanto, la familia $(S_n)_{n\in N}$ es equicontinua.

ii) $\Rightarrow$ i). Denotando con E_1 el subconjunto de los elementos $x \in X$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$$

se tiene que E_1 es un subespacio de $\bar{E}$ y por las condiciones impuestas a S_n, los coeficientes $(a_n)_{n\in N}$ están unívocamente determinados. Como $E \subseteq E_1 \subseteq \bar{E}$, la conclusión se obtiene probando que E_1 es completo.

3. **Proposición.** Sea (X, τ_1) un F-espacio sobre K e (Y, v) un espacio cuasinormado sobre K. Supongamos que existe una topología vectorial τ_2 en X definida por una familia $(\eta_i)_{i\in I}$, de F-seminormas α_i-subhomogéneas con $\sup_{i\in I} \alpha_i < \infty$ de forma que para aplicaciones lineales de X en Y la τ_1-continuidad equivale a la τ_2-continuidad. Si existe una sucesión básica $(e_n)_{n\in N}$ en (X, τ_1) convergente a cero en τ_2 y no convergente a cero en τ_1, entonces Y no tiene la propiedad de extensión respecto de X.

Demostración. Sea η la F-norma que define la topología τ_1. Mediante el paso a una subsucesión (que también es una sucesión básica por el lema 2) puede suponerse $\inf_{n\in N} \eta(e_n) = \delta > 0$.

Sea M el subespacio lineal τ_1-cerrado engendrado por la familia $(e_n)_{n\in N}$. Cada $x\in M$ admite una expresión única en la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} e'_n(x)e_n \quad ; \quad e'_n(x)\in K$$

donde $(e'_n)_{n\in N}$ es la sucesión de funcionales lineales continuos asociados a la base $(e_n)_{n\in N}$.

La convergencia de la serie $\sum e'_n(x)e_x$ asegura que $\text{lím}\, e'_n(x)e_n = 0$; y como $\eta(e_n) \geqslant \delta > 0$, se tiene $\text{lím}\, e'_n(x) = 0$.

En efecto, si existe $a\in K$ tal que $\eta(e'_{n_k}) > |a| > 0$ $(k\in N)$, se tendría

$$\eta(ae_{n_k}) \leqslant \eta(e'_{n_k}(x)e_{n_k})$$

y como $\text{lím}\, e'_{n_k}(x)e_{n_k} = 0$, también $\text{lím}\, e_{n_k} = 0$.

Dado $y\in Y$ no nulo, para cada sucesión $(a_n)_{n\in N}$ de ℓ^1 definimos

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e'_n(x)y$$

La convergencia de la serie está asegurada, ya que **K** es completo y $(e'_n(x))_{n\in N}$ converge a cero. T es evidentemente lineal y al ser los funcionales coordenados $(e'_n)_{n\in N}$ τ_1-continuos se deduce del teorema de Banach-Steinhauss que T es también τ_1-continua. Si T pudiera extenderse a una aplicación lineal τ_1-continua en X, que seguiremos denotando con T, al ser τ_2-continua se tendría por el lema 1 garantizada la existencia de $C > 0$ y un subconjunto finito J de I tales que

$$v[(T(e_n))]^\alpha \leqslant C \max_{i\in J} \eta_i(e_n) \quad ; \quad x\in M,\ \alpha = \sup \alpha_i$$

en un cierto τ_2-entorno del origen. Por tanto,

$$|\alpha|^\alpha \leqslant C' \max_{i\in J} \eta_i(e_n) \quad \text{si} \quad n \geqslant n_0 \qquad (*)$$

Si el cardinal de I es infinito existe un subconjunto numerable de I que contiene a J que identificaremos con N y $J = \{1, 2, ..., i_0\}$. Como la sucesión $(e_n)_{n\in N}$ converge a cero en τ_2, por recurrencia, puede construirse una subsucesión $(e_{n_j})_{j\in N}$ de $(e_n)_{n\in N}$ tal que

$$\max_{1\leqslant i\leqslant j}{}^{1/\alpha} \eta_i(e_{n_j}) < j^{-3}$$

Sea $(a_{n_j})_{j\in N} \subset$ K de modo que

$$\rho^{-1} j \max_{1\leqslant i\leqslant j}{}^{1/\alpha} \eta_i(e_{n_j}) < |a_{n_j}| \leqslant j \max_{1\leqslant i\leqslant j}{}^{1/\alpha} \eta_i(e_{n_j}) + j^{-2}$$

donde $\rho = \inf\{|a|;\ a\in K, |a| > 1\}$.

La sucesión $(a_{n_j})_{j\in N}$ puede completarse con ceros hasta obtener una sucesión $(a_n)_{n\in N}$ de ℓ^1 que no satisface. (*)

Si I es un conjunto finito se procede análogamente con modificaciones obvias.

Observación. Puesto que cada aplicación lineal continua T de M en Y queda determinada por la sucesión $y_n = T(e_n)$ $(n \in N)$, una revisión de la demostración anterior y el teorema de Aoki-Rolewicz evidencian que, si además de las hipótesis de 3 se supone lím inf $\gamma(y_n) > 0$ e Y completo, entonces T puede perturbarse en la forma

$$T'(x) = \sum e'_n(x) a_n y_n$$

por alguna sucesión $(a_n)_{n \in N}$ de ℓ^1 de manera que T' no puede extenderse a una aplicación lineal continua definida en X.

Para cada entero positivo n sea X_n un espacio vectorial sobre K y $\|\cdot\|$ una r_n-norma en X_n, es decir, una F-norma que satisface

$$\|ax_n\| = |a|^{r_n}\|x_n\| \quad ; \quad a \in K,\ x_n \in X_n$$

Designemos con $\ell(X_n)$ al conjunto de las sucesiones $x = (x_n)_{n \in N}$ tales que $x_n \in X_n$ y

$$\eta(x) = \sum \|x_n\| < \infty$$

Sea $\sup r_n = \alpha$, que supondremos finito. De la desigualdad

$$\eta(ax) \leqslant \text{máx}\,\{|a|^\alpha, 1\}\eta(x) \quad ; \quad a \in K,\ x \in \ell(X_n)$$

se obtiene que $\ell(X_n)$ es un espacio vectorial sobre K y que la función no negativa η es una F-norma α-subhomogénea en $\ell(X_n)$. Obsérvese que si la valoración de K es arquimediana $\alpha \leqslant 1$; si la valoración es no arquimediana, $\ell(X_n)$ puede no ser un espacio vectorial si $\alpha = \infty$.

Como el procedimiento habitual se obtiene que si cada X_n es completo también lo es $\ell(X_n)$, y recíprocamente la completitud de $\ell(X_n)$ implica la completitud de X_n para cada $n \in N$.

Si el espacio $(X_n, \|\cdot\|)$ es r_n-normado y $s_n \leqslant r_n$, entonces

$$|||\cdot||| = \|\cdot\|^{r'_n} \quad \text{donde} \quad r'_n = \frac{s_n}{r_n}$$

es una s_n-norma equivalente en X_n. Denotaremos con Y_n al espacio X_n provisto de la s_n-norma $|||\cdot|||$. Con esta notación, $\ell(Y_n)$ puede sumergirse de forma continua y densa en $\ell(X_n)$; basta tener en cuenta que si $\sum |||x_n||| \leqslant 1$, entonces $\sum \|x_n\| \leqslant \sum |||x_n|||$ y que el espacio de las sucesiones finitamente no nulas es denso en $\ell(X_n)$.

Si la inclusión es una identidad y para cada entero natural n el espacio X_n es completo se sigue del teorema de la aplicación abierta que la topología inducida por $\ell(X_n)$ en $\ell(Y_n)$ coincide con la propia. Recíprocamente, si sobre $\ell(Y_n)$ coinciden las dos topologías, como $\ell(Y_n)$ es denso en una y completo en la otra se obtiene que $\ell(X_n) = \ell(Y_n)$.

La igualdad $\ell(X_n) = \ell(Y_n)$ puede caracterizarse mediante un criterio de tipo numérico obtenido por H. T. Croft y J. H. Conway en condiciones más restrictivas y que conserva su validez en la situación aquí considerada.

4. **Lema.** Sean X_n una sucesión de espacios r_n-normandos sobre K,

$$r'_n = \frac{s_n}{r_n} \leqslant 1 \quad ; \quad \pi_n = \left(1 - \frac{1}{r'_n}\right)^{-1}$$

con el convenio de que $\pi_n = \infty$ *si* $r'_n = 1$. Con las notaciones anteriores las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) $\ell(X_n) = \ell(Y_n)$

2) Existe un entero $m > 1$ tal que $\sum\limits_n m^{\pi_n} < \infty$

Demostración. En primer lugar hagamos notar que si $\liminf\limits_n r'_n < 1$, entonces $\ell(X_n) \neq \ell(Y_n)$.

En efecto, si $\liminf r'_n < 1$ existe $\delta < 1$ tal que $\delta \geqslant r'_n$ para un subconjunto infinito de N. La conclusión se obtiene probando que para cada n de este subconjunto existe $x_n \in X_n$ tal que

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{r_n/s_n} \leqslant \|x_n\| \leqslant C\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{r_n/s_n} + \varepsilon_n\right]$$

donde C es una constante y $\varepsilon_n > 0$ con $\sum \varepsilon_n < \infty$.

Dado $z \in X_n$ puede elegirse $a \in K$ de manera que

$$\|z\|^{-1/r_n}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/s_n} \leqslant |a| < \rho\left[\|z\|^{-1/r_n}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/s_n} + \left(\frac{1}{n}\right)^{2/r_n}\right]$$

donde $\rho = \inf\{|a|;\, a \in K, |a| > 1\}$.

El vector $x_n = az \in X_n$ satisface las condiciones requeridas ya que considerando separadamente los casos $r_n \leqslant 1$ y $r_n > 1$ se tiene

$$\|x_n\| = |a|^{r_n}\|z\| \leqslant (2\rho)^{\sup r_n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{r_n/s_n} + \|z\|n^{-2}\right]$$

1) $\Rightarrow$ 2) Si 1) es cierto, existe n_1 tal que si $n \geqslant n_1$ entonces $r'_n \geqslant \frac{1}{2}$ y, por tanto, $\pi_n \leqslant -1$. Proceder como en [12] (teo. 3), tomando $x_n = 0$ si $n < n_1$ y $x_n \in X_n$ satisfaciendo

$$m^{\pi_n - 1} \leqslant \|x_n\| < (2\rho)^{\sup r_n}[m^{\pi_n - 1} + m^{-2}(n_{m+1} - n_m)^{-1}]$$

si $n_m \leqslant n < n_{m+1}$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Se hace como en [12] sustituyendo p_n por r'_n.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio r-normando sobre K e $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio p-normado sobre K; el espacio vectorial $L(X, Y)$ de las aplicaciones lineales y continuas de X en Y tiene por elementos las aplicaciones lineales T de X en Y tales que

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|^r\|x\|^{-p};\, x \in X, x \neq 0\}$$

es finito.

5. **Proposición.** Para cada entero positivo n sea $(X_n, \|\cdot\|)$ un espacio r_n-normado sobre K y sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio p-Banach sobre K con $p \geqslant \sup r_n$. El espacio vectorial $L(\ell(X_n), Y)$ es isomorfo al espacio

$$\ell^\infty(X_n, Y) = \left\{(T_n)_{n\in N};\ T_n \in L(X_n, Y) \text{ y } \sup_n \|T_n\| < \infty\right\}$$

Demostración. Sea T una aplicación lineal continua de $\ell(X_n)$ en Y. Sean i_n la inclusión de X_n en $\ell(X_n)$ y $T_n = Ti_n$ $(n \in N)$. Comprobaremos que la aplicación que a cada T de $L(\ell(X_n), Y)$ le asocia la sucesión $(T_n)_{n\in N}$ así definida, establece el isomorfismo buscado.

El lema 1 garantiza la existencia de $C > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\|T(X)\|^\alpha \leqslant C\eta(x)^p$$

para cada $x = (x_n)_{n\in N}$ de $\ell(X_n)$ con $\eta(x) < \varepsilon < 1$, donde $\alpha = \sup r_n$. En particular, si $x_n \in X_n$ y $\|x_n\| < \varepsilon$ es

$$\|T_n(x_n)\|^\alpha = \|Ti_n(x_n)\|^\alpha \leqslant C\eta(i_n(x_n))^p = C\|x_n\|^p$$

Sea $x_n \in x_n/\{0\}$ y $a \in K$ tal que

$$\frac{1}{2}\rho^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{\|x_n\|}\right)^{1/r_n} \leqslant |a| < \left(\frac{\varepsilon}{\|x_n\|}\right)^{1/r_n}$$

entonces, puesto que $\|ax_n\| < \varepsilon$, se tiene

$$\|T_n(ax_n)\|^{r_n} \leqslant C^{\frac{r_n}{\alpha}} \|ax_n\|^{\frac{r_n p}{\alpha}}$$

y, por tanto,

$$\|T_n(x_n)\|^{r_n} \leqslant \text{máx}\,\{C, 1\}(2\rho)^{p\alpha}\varepsilon^{-p}\|x_n\|^p$$

Esto asegura que $(T_n)_{n\in N}$ pertenece a $\ell(X_n, Y)$.

La aplicación que a cada T de $L(\ell(X_n), Y)$ hace corresponder la sucesión $(T_n)_{n\in N}$ de $\ell^\infty(X\ Y)$ es lineal e inyectiva, ya que si $x = (x_n)_{n\in N}$ pertenece a $\ell(X_n)$, es $T(x) = \sum T_n(\dot{x}_n)$.

Sea $(T_n)_{n\in N}$ de $\ell^\infty(X_n, Y)$ y $C = \sup \|T_n\|$. Para cada x de $\ell(X_n)$ existe n_0 tal que $\|T_n(x_n)\| \leqslant 1$ si $n \geqslant n_0$ y, por tanto, si $i, j \geqslant n_0$ es

$$\left\|\sum_i^j T_n(x_n)\right\| \leqslant \sum_i^j \|T_n(x_n)\| \leqslant \sum_i^j \|T_n(x_n)\|^{\frac{r_n}{p}} \leqslant \sum_i^j C^{1/p}\|x_n\|$$

La completitud de Y garantiza la convergencia de la serie $\sum T_n(x_n)$. Para cada $x = (x_n)_{n\in N}$ de $\ell(X_n)$ definimos $T(x) = \sum T_n(x_n)$. Así definida, T es evidentemente lineal y continua ya que si $\eta(x) < C^{-1/p}$ entonces

$$\|T(x)\| \leqslant \sum \|T_n(x_n)\| \leqslant \sum \|T_n(x_n)\|^{\frac{r_n}{p}} \leqslant C^{1/p}\eta(x)$$

Como consecuencia del teorema de representación anterior se obtiene:

6. **Proposición.** Para cada entero positivo n sea X_n un espacio r_n-Banach sobre K. Sea Y un espacio p-Banach sobre K y supongamos $r_n \leqslant p$. Sea $(s_n)_{n \in N}$ una sucesión de reales positivos tales que

$$\inf \frac{s_n}{r_n} > 0 \quad \text{y} \quad \ell(Y_n) \neq \ell(X_n)$$

Entonces Y no tiene la propiedad de extensión respecto de $\ell(Y_n)$.

Demostración. Sea $(X_n)_{n \in N}$ de $\ell(X_n) \setminus \ell(Y_n)$. Se define recursivamente la sucesión $(y_j)_{j \in N}$ de $\ell(X_n)$ mediante

$$y_1 = (x_1, ..., x_{n_1}, 0, ...) \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{n_1} \|x_i\|^{r'_i} > 1$$

$$y_j = (0, ..., 0, x_{n_{j-1}} + 1, ..., x_{n_j}, ...) \quad \text{con} \quad \sum_{n_{j-1}+1}^{n_j} \|x_i\|^{r'_i} > 1$$

....

$(y_j)_{j \in N}$ es una sucesión básica en $\ell(Y_n)$ contenida en el complementario de la bola unidad de $\ell(Y_n)$ y convergente a cero para la topología inducida en $\ell(Y_n)$ por $\ell(X_n)$. El resultado se sigue de la proposición 3 observando que una aplicación lineal T de $\ell(Y_n)$ en Y continua para la topologá de $\ell(Y_n)$ también es continua para la topología de $\ell(X_n)$. En efecto, si T es continua para la topología de $\ell(Y_n)$ por la proposición anterior se tiene

$$\sup \{\|T_n(x_n)\|^{s_n} \|x_n\|^{-pr'_n};\ x_n \in Y_n \setminus \{0\}\} = C < \infty$$

y, por tanto,

$$\sup \{\|T_n(x_n)\|^{r_n} \|x_n\|^{-p};\ x_n \in Y_n \setminus \{0\}\} \leqslant (1 + C)^{\sup r_n/s_n} < \infty$$

7. **Proposición.** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio r-Banach sobre K. Para cada entero positivo n sea $Y_n = X$ y $r'_n = s/r = r'$ con $s < r$. Entonces $\ell(Y_n)$ contiene un subespacio casi isométrico a ℓ^s no complementado en $\ell(Y_n)$.

Demostración. Sea $(X_n)_{n \in N} \in \ell(X_n) \setminus \ell(Y_n)$ con $\sum \|x_n\| \leqslant 1$, donde para cada $n \in N$, X_n es el espacio r-Banach $(X, \|\cdot\|)$. Dado $\varepsilon > 0$ se construye recursivamente

$$y_k = (0, 0, ..., x_{n_k}, ..., x_k + n'_k, 0, ...) \quad (k \in N)$$

donde $n_{k+1} > n_k + n'_k$ y

$$1 \leqslant \sum_{i=n_k}^{n_k+n'_k} \|x_i\|^{r'} < 1 + \varepsilon$$

El subespacio lineal cerrado M de $\ell(Y_n)$ que engendra la sucesión básica $(y_k)_{k\in N}$ satisface las condiciones requeridas. En efecto, si $(a_n)_{n\in N}\in\ell^s$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^s \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^s \sum_{i=n_k}^{n_k+n'_k}\|x_i\|^{r'} = \eta\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k\right) \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^s$$

Además, M no es complementado, pues si lo fuera cualquier operador definido en M con valores en un espacio r-Banach podría prolongarse a $\ell(Y_n)$, lo cual es imposible como se ha probado en demostración de 3.

El resultado siguiente es una generalización de uno de J. H. Shapiro (teorema 1 de [10]), que establece que los únicos F-espacios reales o complejos con base para los que es cierto el teorema de Hahn-Banach para formas son los espacios de Frechet.

8. **Proposición.** Sea X un F-espacio sobre K y sea Y un espacio p-normado sobre K. Si X tiene una base y no es localmente p-convexo, entonces Y no tiene la propiedad de extensión respecto de X.

Demostración. Sea η una F-norma que define la topología metrizable y completa de X. Sin pérdida de generalidad (cfr. 2) supondremos

$$\eta\left(\sum_{i=1}^{r} e'_i(x)e_i\right) \leqslant \eta(x) \quad \text{si} \quad x = \sum e'_i(x)e_i \qquad (*)$$

Sea $V_n = \{x\in X;\ \eta(x) \leqslant 1/n\}$ y sea v_n el calibre de V_n, es decir,

$$v_n(x) = \inf_k \inf\left\{\sum_{i=1}^{k}|a_i|^p;\ x\in\sum_{i=1}^{k} a_i V_n,\ a_i\in K\right\}$$

La sucesión creciente $(v_n)_{n\in N}$ de p-seminormas define una topología vectorial localmente p-convexa τ_1 en X estrictamente menos fina que la topología τ que define la F-norma η. Además, cualquier aplicación lineal T de X en un espacio p-normado que sea τ-continua es también τ_1-continua. En efecto, la τ-continuidad de T garantiza que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n\in N$ de manera que $\|T(x)\| < \varepsilon$ si $\eta(x) < 1/n$. Es inmediato de la definición que si $v_n(x) < 1$, entonces $\|T(x)\| < \varepsilon$. En particular, los funcionales coordenados $(e'_i)_{i\in N}$ son τ_1-continuos, ya que $|\cdot|^p$ es una p-norma que define la topología de K.

Existe una sucesión $(a_n)_{n\in N}$ de escalares tales que la sucesión $\left(\sum_1^n a_i e_i\right)_{n\in N}$ es de Cauchy en τ_1, pero no es de Cauchy en τ. Si esto no ocurre vamos a probar que τ_1 es completa y por el teorema de la aplicación abierta que coincide con τ.

En primer lugar, si $x\in\sum_{i=1}^{k} a_i V_n$, entonces $x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$ con $\eta(x_i) \leqslant 1/n$. De

$$\sum_{j=1}^{\infty} e'_j(x)e_j = \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{j=1}^{\infty} e'_j(x_i)e_j = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e'_j(x_i)\right)e_j$$

se obtiene en particular

$$\sum_{j=1}^{r} e'_j(x)e_j = \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e'_j(x_i)\right)e_j = \sum_{i=1}^{k} a_i\left(\sum_{j=1}^{r} e'_j(x_i)e_j\right)$$

con

$$\eta\left(\sum_{j=1}^{r} e'_j(x)e_j\right) \leqslant \eta(x) \leqslant 1/n$$

y, por tanto, para cada n y r enteros positivos es

$$v_n\left(\sum_{i=1}^{r} e'_i(x)e_i\right) \leqslant v_n(x)$$

Sea $(x_n)_{n\in N}$ una sucesión de Cauchy en (X, τ). La τ_1-continuidad de los funcionales coordenados y la completitud de K aseguran la existencia para cada $i \in N$ de

$$a_i = \lim_n e'_i(x_n)$$

Para cada una de las p-seminormas v de la familia $(v_n)_{n\in N}$ que define la topología τ_1 se tiene

$$v\left(\sum_s^r e'_i(x_n)e_i\right) \leqslant v\left(\sum_s^r (e'_i(x_n) - e'_i(x_m))e_i\right) + v\left(\sum_s^r e'_i(x_m)e_i\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2v(x_n - x_m) + v\left(\sum_s^r e'_i(x_m)e_i\right)$$

Como la sucesión $(X_n)_{n\in N}$ es de Cauchy en τ_1, fijado m suficientemente grande y tomando límite superior respecto a n en los dos miembros de la desigualdad anterior, se deduce que la sucesión $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right)_{n\in N}$ es de Cauchy en τ_1 y, por la suposición hecha, es también de Cauchy en τ, y, por tanto, convergente en τ (y en τ_1) a $x \in X$. x es de hecho el límite en τ_1 de la sucesión $(x_n)_{n\in N}$, ya que, para cada entero natural r, es

$$v\left(\sum_{i=1}^{r} (e'_i(x_n) - e'_i(x_m))e_i\right) \leqslant v(x_n - x_m)$$

y, por tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que si $m \geqslant n_0$ es

$$v\left(\sum_{i=1}^{r} (a_i - e'_i(x_m))e_i\right) < \varepsilon$$

de donde $v(x,- x_m) \leqslant \varepsilon$ si $m \geqslant n_0$.

Si la sucesión $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right)_{n\in N}$ es de Cauchy en τ_1, pero no es de Cauchy en τ es fácil construir recursivamente una sucesión $(a_k)_{k\in N}$ estrictamente creciente de enteros positivos de manera que la sucesión $\left(\sum_{n_k+1}^{n_{k+1}} a_i e_i\right)_{k\in N}$ tiende a cero en τ_1 y no tiende a cero en τ. De (*) y el lema 2 se deduce que $\left(\sum_{n_{k+1}}^{n_{k+1}} a_i e_i\right)_{k\in N}$ es una sucesión básica, y la conclusión se sigue de la proposición 3.

En el caso de espacios reales o complejos, la conclusión de 8 se mantiene sin suponer la existencia de una base.

9. **Proposición.** Sea X un espacio F-normado e Y un espacio, p- normado sobre el cuerpo real o complejo. Si X no es localmente p-convexo, entonces Y no tiene la propiedad de extensión respecto de X.

Demostración. Sea τ_1 la topología construida en la demostración de la proposición anterior, y τ_2 la topología vectorial menos fina sobre X que hace continuas las aplicaciones lineales τ-continuas de X en Y (tal topología existe y tiene como subbase de entornos del origen en X la formada por las antiimágenes mediante aplicaciones lineales τ-continuas de una base de entornos del origen en Y).

Si Y tiene la propiedad de extensión respecto de X se prueba que cada subespacio τ-cerrado M de X es τ_2-cerrado sin más que tener en cuenta que si $x_0 \in X \setminus M$ existe una aplicación τ-continua de X en Y que se anula en M y no se anula en x_0.

Como $\tau \geqslant \tau_1 \geqslant \tau_2$, τ_1 tiene los mismos subespacios cerrados que τ y por ser metrizable se sigue de un resultado de *N.* J. Kalton (corolario 5.2 de [6]), que $\tau_1 = \tau$. En particular, X sería localmente p-convexo.

CONSIDERACIONES FINALES

a) De la proposición 4 se deduce que si un espacio localmente acotado Y de tipo p tiene la propiedad de extensión respecto de otro espacio localmente acotado X con base (o sin ella, si el espacio es real o complejo), entonces el tipo de X es no inferior a p. La validez de la propiedad de extensión supone así un cierto teorema de transmisión de las desigualdades triangulares del espacio Y al espacio X análogo al que, con condiciones más exigentes respecto de la extensión, aparece en [7].

b) Si X es un espacio cuasi-Banach con dual nulo cuyo tipo es inferior al tipo de Y, tomando $X_n = X$ $(n \in N)$ con la misma r-norma para todos, el espacio $\ell(X_n)$ proporciona un ejemplo de un espacio con dual nulo (por 2), respecto del cual Y no tiene la propiedad de extensión. Esto prueba que, como en el caso de espacios reales y complejos, la existencia de una base en X no es condición necesaria para que Y tenga la propiedad de extensión respecto de X.

BIBLIOGRAFIA

[1] BASTERO, J.: «Convexidad y acotación en espacios vectoriales topológicos sobre cuerpos cuasivalorados», *Rev. Acad. Ciencias Zaragoza, 31* (196?), 129-135).

[2] GEJLER, W.: «On extending and lifting continuous linear mappings in topological vector spaces», *Studia Math., 62* (1978), 295-303.

[3] HASUMI, M.: «The extension property of complex Banach spaces», *Tohoku Math. J.*, *10* (1958), 135-142.
[4] HUSTAD, O.: «A note on complex P_1 spaces», *Israel J. Math.*, *16* (1973), 117-119.
[5] INGLETON, A. W.: «The Hahn-Banach theorem for non-archimedean valued fields», *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, *48* (1952), 41-45.
[6] KALTON, N. J.: «Basic sequences in F-spaces and their applications», *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, *19* (1974), 151-167.
[7] MIRA, J. M.: *Desigualdades triangulares y el problema de la extensión acotada*, Publicaciones de la Universidad de Zaragoza, 1980.
[8] NACHBIN, L.: «A theorem of Hahn-Banach type for linear transformations», *T.A.M.S.*, *68* (1950), 24-40.
[9] ROLEWICZ, S.: *Metric linear spaces*, Polish Scientific Pub., Warszawa, 1972.
[10] SHAPIRO, J. H.: «Extension of linear functionals on F-spaces with bases», *Duke Math. J.*, *37* (1970), 639-645.
[11] SIMMONS, S.: «Boundedness in linear topological spaces», *T.A.M.S.*, *113* (1964), 169-180.
[12] SIMMONS, S.: «The sequence spaces $\ell(p_\nu)$ and $m(p_\nu)$», *Proc. London Math. Soc.*, *15* (1965), 422-436.

Departamento Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias. Murcia